

Введение

Основной объект изучения — математические модели, которые позволяют описывать и исследовать экономические системы и процессы. Практические задачи моделирования условно делятся на три класса:

- анализ экономических систем;
- экономическое прогнозирование;
- выработка управленческих решений на всех уровнях экономических систем.

Отметим, что при построении моделей используются самые разнообразные разделы математики: теория графов, теория меры (вероятность, статистика), дифференциальные уравнения, динамические системы, геометрия, вариационное исчисление и т.д.

Имеются следующие основные типы математических моделей:

- дискретные и непрерывные;
- статические и динамические;
- линейные и нелинейные;
- оптимизационные, детерминированные, стохастические.

Поясним сказанное. Как правило, модель содержит параметры и переменные. Например, потребность предприятия в ресурсе зависит от величин двух различных видов: норм расходов материалов a_j и объемов выпуска продукции x_j . Здесь величины x_j — переменные, а a_j — параметры.

В некоторых случаях переменные могут принимать лишь целые неотрицательные значения (число рабочих на предприятии, число пошитых костюмов, число произведенных телевизоров и т.д.). Такие модели называются **дискретными**. Если же переменные принимают в определенных пределах любые неотрицательные значения (расход электроэнергии и воды, труд), то модель называют **непрерывной**.

Пусть в модели изучается зависимость ее параметров от времени. Такую модель будем называть **динамической**. Если же параметры от времени не зависят, то модель называется **статической**.

После того как определены параметры модели, необходимо указать множество X допустимых значений переменных. Это так называемые ограничения модели. Они могут быть как линейными, так и нелинейными. В соответствии с этим модели бывают **линейными** и **нелинейными**.

Рассмотрим теперь примеры **оптимизационных задач**. Эти задачи связаны с нахождением объектов, которые наилучшие в том или ином смысле. Например, отыскание **Парето-эффективных состояний** является такого типа задачей и ее можно сформулировать следующим образом. Если есть набор функций f_1, \dots, f_n , определенных на множестве W , то требуется найти такие точки $x \in W$ (**оптимумы Парето**), что не существует $x' \in W$ с $f_j(x') \geq f_j(x)$ для всех j и $f_i(x') > f_i(x)$ для некоторого i . Другой пример связан с нахождением максимальной прибыли при производстве и продаже некоторого товара. Эта проблема приводит к поиску экстремалей следующей вариационной задачи:

$$\int_a^b L(t, u(t), u'(t)) dt \rightarrow \text{ext}.$$

Модель называется **детерминированной**, если ее поведение в будущем однозначно определяется состоянием в настоящий момент времени. Такие модели, как правило, описываются системами дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = F_i(t, x_1, \dots, x_n),$$

$i = 1, \dots, n$, где x_1, \dots, x_n — параметры системы. Если F_i — линейные функции, то мы имеем *линейную модель*, а в противном случае — это *нелинейная модель*.

Стохастические модели связаны, как правило, с предсказаниями тех или иных экономических событий при неопределенных условиях, например, при стохастических ограничениях на параметры.

При анализе экономических систем используются все указанные типы моделей. Если рассматривается динамическая модель, то основную роль играет понятие *траектории*, т.е. кривой в пространстве параметров, которую описывает точка при своем движении во времени. Важнейшим понятием здесь является фазовое пространство, которое в геометрии появляется как кокасательное расслоение T^*M к пространству параметров M , причем предполагается, что M — гладкое многообразие.

Анализ экономической системы состоит в том, что ее развитие рассматривается как движение в фазовом пространстве по некоторой траектории. Один из главных вопросов здесь — это вопрос об устойчивости траекторий. Для различных моделей в рамках этого класса задач важное место занимают задачи о магистралях. *Магистраль* — это траектория развития, на которой за длительное время достигается максимальная скорость роста экономики.

При экономическом прогнозировании часто используются стохастические модели и методы математической статистики. Прогноз представляет собой научно обоснованное суждение о возможных состояниях экономической системы в будущем или об альтернативных путях и сроках достижения этих состояний.

В этом классе задач важное значение имеет так называемая *теория катастроф*, связанная с изучением внезапных изменений в экономических системах при медленных внешних влияниях. Методы анализа таких ситуаций были развиты французским математиком Рене Томом. В качестве примера рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} = ax,$$

зависящее от параметра $a \in \mathbb{R}$. Если $a < 0$, то решения периодические — линейные комбинации вида

$$c_1 \sin \sqrt{|a|} t + c_2 \cos \sqrt{|a|} t.$$

Если $a = 0$, то решения имеют вид линейных функций

$$x(t) = a_1 t + c_2.$$

Если $a > 0$, то решения имеют экспоненциальный рост — линейные комбинации вида

$$c_1 e^{\sqrt{a}t} + c_2 e^{-\sqrt{a}t}.$$

Итак, при $a = 0$ происходит скачкообразная перестройка фазового портрета, рис. 1.

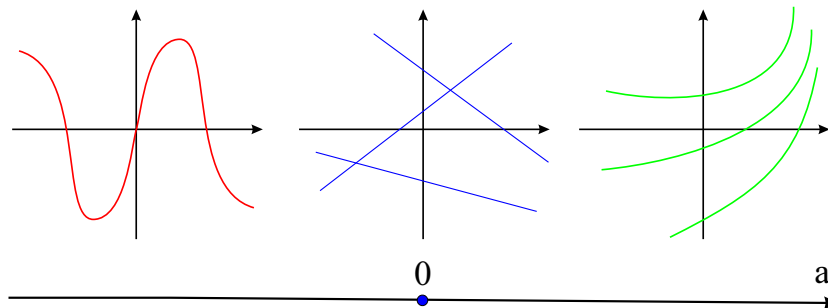


Рис. 1: Перестройка фазового портрета

При изучении задач выработки управленческих решений используются фундаментальные понятия *управления* и *управляющего параметра*. Отметим здесь только один класс задач оптимального управления. Для модели, описываемой системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(x, u),$$

требуется найти такое значение $u = u^*$ параметра управления u , что функционал

$$J = \int_a^b L(x, u) dt$$

принимает наименьшее значение.

Немного истории

Первым математическим экономистом, по-видимому, был **Лука Бартоломео де Пачоли** (1445 – 1517 гг.) — итальянский математик, один из основоположников современных принципов бухгалтерии.



Рис. 2: Лука Бартоломео де Пачоли (1445 – 1517 гг.)

В 1470 г. он закончил свою первую книгу, которую написал для своих воспитанников, — учебник коммерческой арифметики с изложением изобретенной им системы двойного счета в бухгалтерии¹. Через два года Л. Пачоли покинет Рим и примет монашеский постриг, став монахом-францисканцем и одним из крупнейших математиков Европы конца XV века. До конца жизни он преподавал математику в лучших университетах Италии.

Вторым по хронологии следует отметить английского торговца, статистика и экономиста **Уильяма Петти** (1623-1687 гг.).



Рис. 3: Уильям Петти (1623-1687 гг.)

В предисловии к “Политической арифметике” он указывал, что вместо употребления слов в сравнительной и превосходной степени, он вступил на путь выражения своих мнений на языке чисел, весов и мер. Экономиста Уильяма Петти вполне заслуженно называют первым статистиком. Другой знаменитой книгой Уильяма Петти стал “Трактат о налогах и сборах”. Здесь он одним из первых формулирует гипотезу, что ценность предметов определяется количеством затраченного на их производство труда.

¹ **Двойная запись** — способ ведения бухгалтерского учёта, при котором каждое изменение состояния средств организации отражается по крайней мере на двух бухгалтерских счетах (дебет — кредит), обеспечивая общий баланс

Впрочем, традиционно принято считать, что математические методы анализа макроэкономических процессов впервые применены лейб-медиком короля Людовика XV **Франсуа Кенэ** (1694 – 1774 гг.), французским экономистом, основоположником школы физиократов².



Рис. 4: Франсуа Кенэ (1694 – 1774 гг.)

В 1758 г. он напечатал Экономическую таблицу с объяснениями. В ней была сделана первая попытка количественно описать национальную экономику на основе принципа незыблемости и справедливости абсолютной монархии — гаранта порядка и законов.

Любопытные факты. В своем труде “Китайский деспотизм” (1767) Кенэ, описывая политику и общество Китая, обращается не столько к действительным сведениям об азиатской стране, сколько к своим собственным представлениям о благотворности такого восточного деспотизма, при котором государство якобы управляется на основе “естественного закона”. Николая Бодо, ученик всемерно почитавшего учение конфуцианства Кенэ, назвал своего учителя “Конфуцием Европы”.

В 1773 году Кенэ издал свой последний труд, в котором пытался найти квадратуру круга. Ученики Кенэ усмотрели в появлении этого труда признак упадка его умственных способностей. В это же время у Кенэ была отнята должность придворного врача.

Книга французского экономиста, философа и математика **Антуана Огюста Курно** (1801 – 1877 гг.) “Исследование математических принципов теории богатства”, опубликованная во Франции в 1838 г., является его главным вкладом в экономическую науку.



Рис. 5: Антуан Огюст Курно (1801 – 1877 гг.)

В этой работе впервые использованы количественные методы для анализа конкуренции между товарами при различных рыночных ситуациях.

²Название **физиократия** (от греческого физис — природа, кратос — сила, власть, господство) дано Дюпон де Немуром — первым издателем сочинений Кенэ — ввиду того, что единственным самостоятельным фактором производства эта школа считала почву, природу. Впрочем, это название могло бы характеризовать учение физиократов и в другом отношении, так как они были сторонниками “естественного порядка” в хозяйственной жизни общества.

В последующие годы происходила интенсивная математизация экономической теории. Например, в книге **Уильяма Джевонса** (1835-1882 гг.) «Об общей математической теории политической экономии» (1862 г.) изложена одна из первых версий теории полезности.



Рис. 6: Уильям Стэнли Джевонс (1835 – 1882 гг.)

В историю экономической мысли У. Джевонс вошел в первую очередь как автор книги «Теория политической экономии», выход которой одновременно с основными трудами **К. Менгера** (1840 – 1921 гг.) — основателя австрийской школы экономики и Л. Вальраса (1834 – 1910 гг.) — основателя лозаннской школы ознаменовал начало маржиналистской³ революции в экономике.



Рис. 7: Карл Менгер (1840 – 1921 гг.)

В 1871 году К. Менгер опубликовал книгу «Основания политической экономии», которая принесла ему известность и стала основой для формирования австрийской экономической школы.

³**Маржинализм** (от латинского марго — край) — направление в экономической науке, широко применяющее методы анализа, основанные на оперировании «предельными» (т.е. приростными) понятиями в экономике (производными), исследующее явления с точки зрения максимизирующего собственное удовлетворение отдельного хозяйствующего субъекта.

Альфред Маршалл (1842-1924 гг.) — английский экономист, основатель кембриджской школы политической экономики.

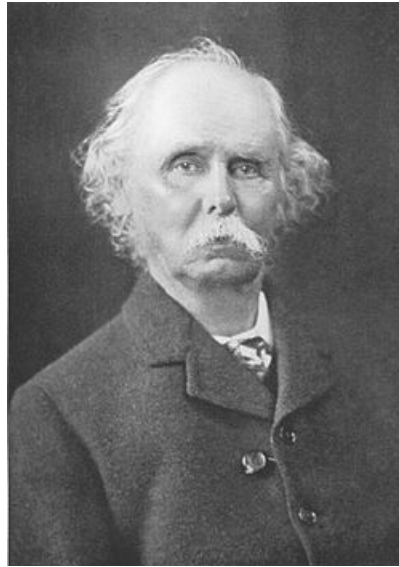


Рис. 8: Альфред Маршалл (1842 – 1924 гг.)

Основы его теории изложены в изданных в 1890 г. “Принципах политической экономики”, на протяжении многих десятилетий служивших основным учебником по экономической теории в ряде стран. В этом труде были обобщены достижения раннего маржинализма и заложено начало неоклассической политической экономики⁴.

Мари Эспри Леон Вальрас (1834 – 1910 гг.) — французский экономист, лидер лозаннской школы маржинализма, один из крупнейших экономистов XIX в.



Рис. 9: Мари Эспри Леон Вальрас (1834 – 1910 гг.)

Впервые ввел высшую математику как обязательный элемент экономической науки, предложил концепцию и первую математическую интерпретацию общего экономического равновесия и общий критерий рыночного равновесия — спрос равен предложению. Удивительно, но в 1890-х гг. против использования Л. Вальрасом математических моделей в курсе политической экономики выступало подавляющее большинство его коллег по лозаннскому университету.

⁴ **Неоклассическое** направление исследует поведение т.н. экономического человека (потребителя, предпринимателя, наёмного работника), который стремится максимизировать доход и минимизировать затраты. Основные категории анализа — предельные величины (см. маржинализм).

Итальянский экономист и социолог **Вильфредо Парето** (1848 – 1923 гг.), друг и соратник Л. Вальраса, — один из лидеров лозаннской школы маржинализма.

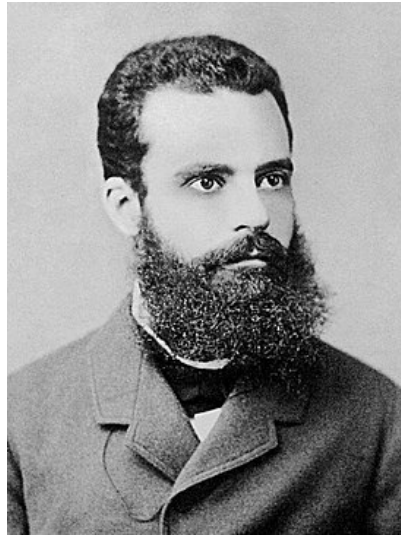


Рис. 10: Вильфредо Федерико Дамасо Парето (1848 – 1923 гг.)

В. Парето сформулировал принцип оптимальности: благосостояние общества достигает максимума, а распределение ресурсов становится оптимальным, если любое изменение этого распределения ухудшает благосостояние хотя бы одного субъекта экономической системы.

В 1911 г. американским экономистом **Ирвингом Фишером** (1867 – 1947 гг.), представителем неоклассического направления в экономической науке, была опубликована работа “Покупательная сила денег”, в которой он привел вывод своей знаменитой формулы Фишера.



Рис. 11: Ирвинг Фишер (1867–1947 гг.)

Исходя из данной формулы, Фишер делает вывод, что стоимость денег обратно пропорциональна их количеству. Формула Фишера позволяет объяснить явление инфляции с точки зрения нарушений в сфере бумажно-денежного обращения. Таким образом, впервые была построена математическая модель экономики, учитывающая влияние инфляции.

Евгений Евгеньевич Слуцкий (1880 – 1948 гг.) — выдающийся российский и советский математик, статистик и экономист.

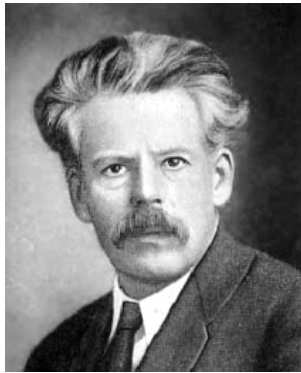


Рис. 12: Евгений Евгеньевич Слуцкий (1880 – 1948 гг.)

Провел анализ модели поведения потребителя и вывел “уравнение Слуцкого”. Е.Е.Слуцкий — один из создателей современной теории случайных функций (распределений в функциональных пространствах). Он также вел работы по параметрам корреляции (условие и теорема Слуцкого).

Василий Васильевич Леонтьев (1905 – 1999 гг.) — советский и американский экономист.

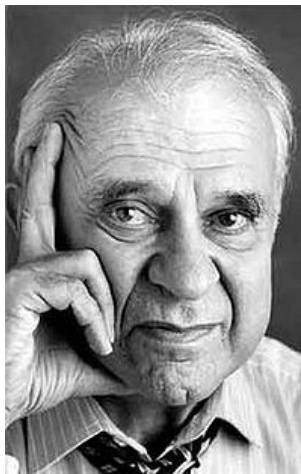


Рис. 13: Василий Васильевич Леонтьев (1905 – 1999 гг.)

Один из создателей теории межотраслевого анализа, лауреат Нобелевской премии по экономике (1973г.). Этой награды он был удостоен “за развитие метода затраты–выпуск и за его применение к важным экономическим проблемам”.

Любопытные факты. В.В.Леонтьев выехал из СССР в 1928 г. в Китай в качестве специалиста по экономике железнодорожного транспорта. В 1931 г. переехал в США. Причина эмиграции — запрещение в СССР к публикации статьи Леонтьева с размышлениями о путях развития науки. “Это была историко-аналитическая статья, страшно далекая от политики, от идеологии. И если запретили даже ее... Я понял, что здесь наукой невозможно будет заниматься.”

После начала Второй мировой войны В.В.Леонтьев работал консультантом по экономическому планированию для военно-воздушных сил США. Под его руководством была построена матрица “затраты — выпуск” для экономики Германии. Матрица служила основой для выбора целей американскими ВВС.

В начале 1990-х годов В.В.Леонтьев приезжал в Российскую Федерацию с предложением помощи в реформировании российской экономики. Вернувшись в Америку, он сказал: “Я туда больше не поеду. Они ничего не слушают”.

В 1992 году подписал “Предупреждение человечеству”.

Леонид Витальевич Канторович (1912 – 1986 гг.) — советский математик и экономист.

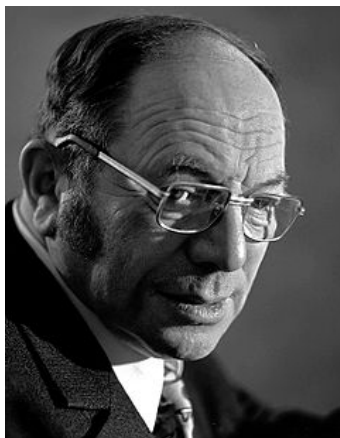


Рис. 14: Леонид Витальевич Канторович (1912 – 1986 гг.)

Л.В.Канторович — лауреат Нобелевской премии по экономике 1975 г. “за вклад в теорию оптимального распределения ресурсов”. Пионер и один из создателей линейного программирования. В 1939 г. он опубликовал работу “Математические методы организации и планирования производства”, в которой описал задачи экономики, решаемые с помощью открытого им математического метода, тем самым заложил основы линейного программирования.