Математические методы в экономике

И. К. Козлов
(*Московский государственный университет*)

Октябрь 2018

Было на прошлых занятиях

- Модель Леонтьева (замкнутая и открытая)
- Неотрицательные и неразложимые матрицы
- Теорема Фробениуса-Перрона

Модель Леонтьева

Модель Леонтьева задаётся системой

$$x - Ax = c, \qquad x \geq 0$$

- $A \geq 0$ — матрица прямых затрат
- x — вектор валового выпуска
- c — вектор спроса

(Модель Леонтьева описывает работу системы, состоящей из n процессов, производящей n товаров при условиях линейности технологии по валовому выпуску и постоянству технологии по времени.)

Замкнутая модель Леонтьева:

$$x - Ax = 0, \qquad x \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1.$$

(Замкнутая модель Леонтьева описывает схему международной торговли.)

Теорема Фробениуса-Перрона

Теорема (Фробениус-Перрон)

Неразложимая матрица $A \geq 0$ имеет положительное собств. знач. $\lambda_A > 0$ такое, что

$$\forall \lambda \in \mathrm{Spec}\,(A) \qquad\qquad |\lambda| \leq \lambda_A$$

Числу λ_A отвечает единственный (с точностью до скалярного множителя) собств. вектор x_A, при этом все его координаты одного знака (без огр. общ. они >0)

$$Ax_A = \lambda_A x_A, \qquad x_A > 0$$

Аналогично существует единственный (с точностью до скалярного множителя) собств. вектор p_A матрицы A^T, все координаты которого положительны

$$p_A A = \lambda_A p_A, \qquad p_A > 0$$

- λ_A —фробениусово собственное значение.
- x_A — правый фробениусов собственный вектор.
- p_A — левый фробениусов собственный вектор.

Устойчивость модели Леонтьева

- Пусть $A > 0$ — неразложимая $n \times n$ матрица,
- Фробениусово собственное значение $\lambda_A = 1$ (иначе вместо A рассматриваем $\bar{A} = \frac{A}{\lambda_A}$)).
- Пусть p_A — левый фробениусов собственный вектор т.,ч. $\langle p_A, p_A \rangle = 1$. Введём норму на $\mathbb{R}^n$:
$$||x||_A = \langle p_A, |x| \rangle.$$

Здесь $|x| = (|x_1|, \ldots, |x_n|)$.

Определение

Матрица A устойчива, если для любого вектора x существует предел $\lim_{k\to\infty} A^k x$.

В $\mathbb{R}^n$ сходимость по метрика и по координатам эквивалентны.

Замечание о пределах и нормах

Ввели норму на $\mathbb{R}^n$:

$$||x||_A = \langle p_A, |x| \rangle.$$

Правый фробениусов собств. вектор x_A выберем так, что $||x_A||_A = 1$.
Отметим, что

$$||Ax||_A \leq ||x||_A, \qquad \text{и если } x \geq 0, \quad \text{то} \quad ||Ax||_A = ||x||_A$$

Утверждение

Пусть $x \geq 0$. Тогда, если предел $\lim_{k\to\infty} A^k x$ существует, то

$$z = \lim_{k\to\infty} A^k x = \mu x_A, \quad \text{где} \quad \mu = ||x||_A.$$

Доказательство. $z = \mu x_A$, так как $Az = z$. Наконец

$$\mu = \langle p_A, \mu x_A \rangle = \langle p_A, z \rangle = \lim \langle p_A, A^k x \rangle = \lim \langle p_A, x \rangle = ||x||_A,$$

так как $x \geq 0$.

Импримитивные матрицы

Пример. Матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ неустойчива.

Определение

Неразложимая матрица A называется импримитивной (или циклической), если

$$\{1, \dots, n\} = S_0 \coprod \cdots \coprod S_{m-1},$$

при этом

$$a_{ij} > 0 \Rightarrow \begin{cases} i \in S_r, j \in S_{r-1}, & 1 \le r \le m-1 \\ i \in S_0, j \in S_{m-1} \end{cases}$$

Иными словами, матрица импримитивна, если одновременной перестановкой строк и столбцов она приводится к следующему виду (циклическому представлению матрицы A):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & A_{m-1} \\ A_0 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & A_{m-2} & 0 \end{pmatrix}$$

Матрицы, которые не являются импримитивными, называются примитивными.

Устойчивость = примитивность

Теорема

Неразложимая матрица A с $\lambda_A = 1$ устойчива $\Leftrightarrow$ A — примитивна.

Лемма 1

A — примитивна $\Rightarrow$ у некоторой степени матрицы A первая строка положительна

$$(\exists k \quad \forall j \quad a_{1j}^{(k)} > 0)$$

Здесь через $a_{ij}^{(k)}$ обозначен коэффициент матрицы A^k.

Доказательство Леммы 1. Пусть

$$R = \left\{ r : a_{11}^{(r)} > 0 \right\}, \qquad m = \text{НОД}(R)$$

Возможны 2 варианта:

- $m > 1$
- $m = 1$

Первый случай. НОД>1

Случай А. $m > 1$. Тогда матрица A импримитивна. Покажем это.
Множества S_i: $0 \le i \le m-1$ определим так:

$$S_i = \left\{ j \mid \quad \exists k \equiv -i \pmod{m} : a_{1j}^{(k)} > 0 \right\}$$

Множество индексов мы разбиваем на части в зависимости от того, какие коэффициенты в первой строчке матриц A^k не равны нулю.
Тогда

1. $S_i \neq \varnothing$, иначе у матрицы A^{m-i} первая строка нулевая.
2. $S_r \cap S_t = \varnothing$, если $r \neq t$. Пусть $j \in S_r \cap S_t$. Тогда

$$\exists k, l \qquad a_{1j}^{(k)} > 0, \; a_{1j}^{(l)} > 0, \qquad k \equiv -r, \; l \equiv -t \pmod{m}$$

Так как матрица A неразложима, то $\exists q$ т.,ч. $a_{j1}^{(q)} > 0$. Тогда

$$a_{11}^{(k+q)} \ge a_{1j}^{(k)} a_{j1}^{(q)} > 0, \qquad a_{11}^{(l+q)} \ge a_{1j}^{(l)} a_{j1}^{(q)} > 0$$

Но тогда

$$m | k+q, \quad m | l+q \quad \Rightarrow \quad m | k-l \quad \Rightarrow \quad r \equiv t \pmod{m}$$

Несложно убедиться, что в этом случае множества S_i задают искомое разбиение множества $\{1, \ldots, n\}$.

Второй случай. НОД=1

Случай В. $m = 1$. Докажем, что в этом случае матрица A примитивна.

В R существует набор чисел с НОД 1, поэтому

$$\exists l_1, \dots, l_p \in R, \qquad \exists \beta_1, \dots, \beta_p \in \mathbb{Z} \quad , \quad \sum \beta_i l_i = 1$$

Обозначим

$$d = \sum |\beta_i| l_i, \qquad Q = d^2.$$

Тогда любое $l > Q$ можно представить в виде

$$l = \sum n_i l_i, \qquad \text{где} \quad n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

Действительно,

$$l = sd + q, \quad s \geq d, \ 0 \leq q < d \quad \Rightarrow \quad l = s(\sum |\beta_i| l_i) + q(\sum \beta_i l_i) = \sum (s|\beta_i| + q\beta_i)\, l_i = \sum \alpha_i l_i$$

Легко видеть, что все коэффициенты α_i больше или равны 0. Поэтому

$$a_{11}^{(l)} \geq \prod \left(a_{11}^{(l_i)} \right)^{\alpha_i} > 0.$$

Рассмотрим t_j т.,ч. $a_{1j}^{(t_j)} > 0$, положим $t = \max t_j$.

Тогда в A^{Q+t} первая строка положительна:

$$a_{1j}^{(Q+t)} \geq a_{11}^{(Q+t-t_j)} a_{1j}^{(t_j)} > 0.$$

Устойчивость степеней оператора

Лемма 1 доказана. Мы используем её, чтобы доказать устойчивость оператора A^k. Этого будет достаточно.

Лемма 2

Если матрица A^k устойчива при некотором натуральном k, то матрица A также устойчива.

Доказательство Леммы 2. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$ и

$$\lim_{s\to\infty} (A^k)^s x = \mu x_A.$$

Докажем, что

$$\lim_{m\to\infty} A^m x = \mu x_A.$$

Действительно,

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists S \in \mathbb{N} \quad \text{т., ч.} \quad \forall\ s \geq S \qquad ||A^{sk} x - \mu x_A|| \leq \varepsilon$$

Тогда $\forall m \geq Sk$ разложим $m = sk + r$, где $0 \leq r < k$. Получаем

$$||A^m x - \mu x_A|| = ||A^r (A^{sk} x - \mu x_A)|| \leq ||A^{sk} x - \mu x_A|| < \varepsilon$$

Лемма 2 доказана.

Оператор сжатия

Для доказательство устойчивости оператора с положительной 1ой строкой воспользуемся следующим.

Определение

Оператор P действует на нормированном линейном пространстве $(L, ||\cdot||)$, как оператор сжатия, если $\exists\ 0 < \gamma < 1$ такой, что для любого вектора $v \in L$ выполнено

$$||Pv|| \leq \gamma ||v||$$

γ называется коэффициентом сжатия.

Лемма 3

Обозначим

$$L_A = \mathrm{Ann}(p_A) = \{v | \langle v, p_A \rangle = 0\}.$$

Если оператор A действует на L_A как оператор сжатия, то матрица A устойчива.

Отметим, что подпространство L_A ковариантно относительно оператора A.

Доказательство Леммы Пусть $x = \mu x_A + z$, где $z \in L_A$. Тогда

$$||A^k x - \mu x_A|| = ||A^k(x - \mu x_A)|| = ||A^k z|| \leq \gamma^k ||z|| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

Поэтому $\lim_{k\to\infty} A^k x = \mu x_A$

Лемма 3 доказана.

Оператор с положительной строкой устойчив

Лемма 4

Если неразложимая матрица A с $\lambda_A = 1$ имеет положительную строку, то оператор A действует на пространстве

$$L_A = \mathrm{Ann}(p_A) = \{v | \langle v, p_A \rangle = 0\}$$

как оператор сжатия. Как следствие, матрица A устойчива.

Доказательство Леммы 4 Без ограничения общности 1ая строка A положительна.
Обозначим строки A через a_i. Тогда $a_1 > 0$.
Пусть $\delta > 0$ т.,ч. $\delta p_A \le a_1$. Пусть p_A^1 — первая координата p_A.
Покажем, что $\gamma = 1 - \delta p_A^1$ — коэффициент сжатия A на L_A.
Действительно, пусть $z \in L_A$. Можно считать, что $\langle a_1, z \rangle \ge 0$ (иначе заменим $z \to -z$).
Тогда

$$||Az|| = \sum_{i=1}^{n} p_A^i |\langle a_i, z \rangle| = p_A^1 \langle a_1, z \rangle + \sum_{i=2}^{n} p_A^i |\langle a_i, z \rangle| \le p_A^1 \langle a_1, z \rangle + \sum_{i=2}^{n} p_A^i \langle a_i, |z| \rangle =$$

$$= p_A^1 \langle a_1, z - |z| \rangle + \sum_{i=1}^{n} p_A^i \langle a_i, |z| \rangle = p_A^1 \langle a_1, z - |z| \rangle + \langle p_A, A|z| \rangle \le p_A^1 \langle \delta p_A, z - |z| \rangle + \langle p_A, A|z| \rangle,$$

так как $z - |z| \le 0$. Но $z \in L_A$ и $p_A A = p_A$, поэтому $||Az|| \le (1 - \delta p_A) \, \|z\| = \gamma ||z||$
Лемма 4 и Теорема доказаны.

Устойчивость в терминах спектра

Теорема

$A > 0$ неразложима и $\lambda_A = 1$. Тогда A устойчива $\Leftrightarrow$ $\forall \lambda \in \mathrm{Spec}(A) \backslash 1$ выполнено $|\lambda| < 1$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть ЖНФ матрицы (над $\mathbb{C}$).

Достаточно рассмотреть одну жорданову клетку $J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$ матрицы A.

- Если $|\lambda| < 1$, то легко проверить, что $\lim_{k\to\infty} J_\lambda^k = 0$.
- Если $|\lambda| \geq 1$, $\lambda \neq 1$, то предела $\lim_{k\to\infty} J_\lambda^k$ не существует.
- Собственному значению $\lambda = 1$ соответствует ровно одна жорданова клетка размера 1×1.
  Клетка одна, т.к. есть только один правый фробениусов собственный вектор x_A (с точностью до пропорциональности).
  Её размер 1×1, так как есть только один (с точностью до пропорциональности) левый фробениусов вектор p_A и $\langle p_A, x_A \rangle = 1$. Действительно

$$0 = p_A(A - E)e_2 = \langle p_A, \mu x_A \rangle = \mu$$

Теорема доказана.

Устойчивость разложимых матриц через спектр

Покажем теперь, когда разложимые матрицы устойчивы.

Теорема

Пусть $A > 0$ замкнута и имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & * & * & * \\ & A_2 & * & * \\ & & \ddots & * \\ & & & A_l \end{pmatrix},$$

где все матрицы A_i неразложимы.

Тогда A устойчива $\Leftrightarrow$ для каждого $i = 1, \ldots, l$

- *либо $\lambda_{A_i} < 1$*
- *либо $\lambda_{A_i} = 1$ и A_i примитивна.*

$(\Rightarrow)$ очевидно, т.к. каждая из неразложимых матриц A_i должна быть устойчива. Далее докажем только $(\Leftarrow)$.

Устойчивость разложимых матриц

Теорему можно переформулировать.

Следствие

$A > 0$ и замкнута. Тогда A — устойчива $\Leftrightarrow \forall i \left[\begin{array}{l} A_i \text{ — не замкнута,} \\ A_i \text{ — замкнута и примитивна.} \end{array} \right.$.

Мы докажем, что $\lambda_{A_i} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad A_i$ — замкнута. Этого будет достаточно.

Обозначим $\hat{p}_{A_i} = (1, \ldots, 1)$ — вектор для A_i. Так как $A > 0$ и замкнута

$$\hat{p}_{A_i} A_i \leq \hat{p}_{A_i}$$

($\Leftarrow$) Пусть A_i — замкнута, т.е.$\hat{p}_{A_i} A_i = \hat{p}_{A_i}$. Тогда p_{A_i} — её левый фробениусов собственный вектор (т.к. все его компоненты >0) и $\lambda_{A_i} = 1$.

($\Rightarrow$) Пусть $\hat{p}_{A_i} A_i < \hat{p}_{A_i}$. Покажем, что $\lambda_{A_i} < 1$. Действительно, если x_{A_i} — правый фробениусов вектор A_i, то

$$(\hat{p}_{A_i}, \lambda_{A_i} x_{A_i}) = (\hat{p}_{A_i}, A_i x_{A_i}) < (\hat{p}_{A_i}, x_{A_i})$$

Доказательство теоремы про устойчивость

Докажем теорему по индукции по l. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} A' & B \\ 0 & A_l \end{pmatrix}$$

Вектор $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ будем обозначать через $\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$. Мы считаем, что A' устойчива, поэтому у всех векторов $\tilde{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ есть предел. Остаётся рассмотреть векторы $\tilde{x}_2$.

- Пусть $\lambda_{A_l} < 1$. Тогда $\left\|A_l^k x_2\right\| \leq \gamma^k \left\|x_2\right\|$, где $\gamma < 1$. Обозначим $y_N = A^N \tilde{x}_2$. Тогда

$$y_{N+p} - y_N = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\left(A'\right)^{N-k-1+p} - \left(A'\right)^{N-k-1}\right] BA_l^k x_2 + \sum_{k=N}^{N+p-1} \left(A'\right)^{N-k-1+p} BA_l^k x_2$$

Доказательство теоремы про устойчивость

Итак,

$$y_{N+p} - y_N = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\left(A'\right)^{N-k-1+p} - \left(A'\right)^{N-k-1} \right] BA_l^k x_2 + \sum_{k=N}^{N+p-1} \left(A'\right)^{N-k-1+p} BA_l^k x_2$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Сделаем сумму маленькой ($< \varepsilon$). Обозначим $C = \sum_{N \in \mathbb{N}} \left\| \left(A'\right)^N \right\|$. Тогда

$$\exists K : \quad \forall k \geq K \qquad \frac{2C \|B\|}{1-\gamma} \|x_2\| \gamma^k < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists N_0 : \quad \forall N > N_0, \quad \forall p \qquad \left\| \left(A'\right)^{N-K-1+p} - \left(A'\right)^{N-K-1} \right\| < \frac{\varepsilon}{2K \|B\| \|x_2\|}$$

Тогда

$$y_{N+p} - y_N = \sum_{k=0}^{K-1} + \sum_{k=K}^{N-1} + \sum_{k=N}^{N+p-1} < K \frac{\varepsilon}{2K \|B\| \|x_2\|} \|B\| \|x_2\| + 2C \|B\| \sum_{k=K}^{N-1} \left\| A_l^k x_2 \right\| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2C \|B\| \|x_2\| \sum_{k=K}^{N-1} \gamma^k = \frac{\varepsilon}{2} + 2C \|B\| \|x_2\| \frac{\gamma^K \left(1 - \gamma^{N-K}\right)}{1-\gamma} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Случай $\lambda_{A_l} < 1$ разобран.

Доказательство теоремы про устойчивость-2

- Пусть $\lambda_{A_I} = 1$ и A_I устойчиво. Тогда $\tilde{x}_2 = \mu x_{A_I} + \tilde{z}$. Для $\tilde{z}$ док-во $\exists$ предела аналогично предыдущему случаю. Для x_{A_I} предел существует, потому что

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ x_{A_I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_{A_I} \end{pmatrix},$$

  потому что

  - с одной стороны, $A_I x_{A_I} = \lambda_{A_I} x_{A_I} = x_{A_I}$,
  - с другой стороны, $Ax \leq x, \forall x$ т.к. A замкнуто.

Теорема доказана.

Теорема о замещении

Покажем теперь, как случай, когда есть несколько способов производства товаров, сводится к обычной модели Леонтьева (когда каждый товар производится 1 способом).

Дано:

- n товаров
- m производственных процессов, $m \geq n$.
- каждый процесс производит 1 товар, каждый товар производится.

Обозначим

- M — множество процессов:
$$M = \{1, \dots, m\},$$
- M_k — множество процессов, производящих k-тый товар. Тогда
$$M = M_1 \cup \dots M_n$$

Обобщённая модель Леонтьева

Рассмотрим обобщённую модель Леонтьева

$$\hat{I}x - \hat{A}x = c,$$

где

- $n \times m$ матрица, описывающая выпуск в модели:

$$\hat{I} = (e_{ij}), \qquad e_{ij} = \begin{cases} 1, & j \in M_i, \\ 0, & j \notin M_i \end{cases}$$

- Матрица прямых затрат:

$$\hat{A} = (a_{ij})_{i=1,\ldots,n, j=1,\ldots,m}$$

- Вектор интенсивностей:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Задача минимизации трудовых затрат

Пусть производство по j-тому процессу вызывает затраты L_j. Они образуют вектор трудовых затрат

$$L = (L_1, \ldots, L_m) .$$

Возникает задача минимизации затрат

$$(L, x) \to \min$$

$$\hat{I}x - \hat{A}x \geq c, \qquad x \geq 0.$$

Подмодель

Подмодель — это подмножество технологических процессов с номерами

$$\sigma = \{j_1, \dots, j_n\}, \qquad j_k \in M_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Для подмодели обозначим

$$A_\sigma = \left((a_\sigma)_{ik}\right)_{i,k=1,\dots,n}, \qquad (a_\sigma)_{ik} = a_{i,j_k},$$
$$x_\sigma \in \mathbb{R}^n, \qquad (x_\sigma)_k = x_{j_k}$$

Теорема Самуэльсона о замещении

Теорема (о замещении (Самуэльсон))

Пусть обобщённая модель Леонтьева

$$\hat{I}x - \hat{A}x = c$$

продуктивна. Тогда существует подмодель σ т.,ч. среди решений задачи о минимизации затрат

$$(L, x) \to \min$$

$$\hat{I}x - \hat{A}x \geq c, \qquad x \geq 0$$

существует решение $\hat{x}$ т.,ч.

$$\hat{x}_j = \begin{cases} 0, & j \notin \sigma \\ > 0, & j \in \sigma \end{cases}$$

Доказательство теоремы о замещении

Рассмотрим $c >> 0$. Т.к. модель продуктивна, существует решение $\tilde{x}$ уравнения

$$\hat{I}x - \hat{A}x \geq c$$

Назовём решение базисным, если $\tilde{x}$ имеет не более n положительных координат.

Доказательство теоремы разобьём на 3 леммы:

Лемма

Задача о минимизации затрат имеет базисное решение.

Лемма

У базисного решения ровно n положительных координат (они задают подмодель σ). Таким образом для любого $k = 1, \ldots, n$ существует индекс

$$j_k \in \sigma \cap M_k.$$

Лемма

Для любого $c' \geq 0$ существует решение x' задачи о минимизации затрат т.,ч.

$$x'_j > 0 \quad \Leftrightarrow \quad j \in \sigma.$$

Доказательство теоремы о замещении. Лемма 1

Лемма

Задача о минимизации затрат имеет базисное решение.

Пусть у $\tilde{x}$ более n положительных координат. Обозначим их номера за σ. Соответствующие столбцы $\hat{I}-\hat{A}$ линейно зависимы, поэтому существует вектор z_σ т.,ч.

$$\left(\hat{I}-\hat{A}\right) z_\sigma = 0$$

Вектор z получается из z_σ добавлением нулей.

- Если $(L, z) \neq 0$, то $\exists \varepsilon$:

  $$\tilde{x} + \varepsilon z \geq 0, \qquad (L, \tilde{x} + \varepsilon z) < (L, \tilde{x})$$

  Но в то же время

  $$\left(\hat{I}-\hat{A}\right)(\tilde{x} + \varepsilon z) = \left(\hat{I}-\hat{A}\right)\tilde{x} \geq c$$

  Мы получаем противоречие с тем, что решение — минимально.

- Поэтому $(L, z) = 0$ и мы можем взять $\tilde{x}' = \tilde{x} + \lambda z$ с большим числом нулей (редукция).

Доказательство теоремы о замещении. Лемма 2

Лемма

У базисного решения ровно n положительных координат (они задают подмодель σ). Для любого $k = 1, \dots, n$ существует индекс

$$j_k \in \sigma \cap M_k.$$

Действительно

$$\left(\hat{I} - \hat{A}\right)\tilde{x} \geq c >> 0$$

Поэтому

$$\left(\hat{I}\tilde{x}\right)_k = \sum_{j \in M_k} \tilde{x}_j \geq c > 0$$

Поэтому $\tilde{x}_{j_k} > 0$ для некоторого $j_k \in M_k$. Но индексов не более, чем n.

Доказательство теоремы о замещении. Лемма 3

Лемма

Для любого $c' \geq 0$ существует решение x' задачи о минимизации затрат т.,ч.

$$x'_j > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad j \in \sigma.$$

Пусть $c' \geq 0$. Тогда $\exists\lambda$ т.,ч. $\lambda c \geq c'$.

Поскольку $(I - A_\sigma)\,\tilde{x}_\sigma \geq c >> 0$, система A_σ продуктивна. Поэтому $\exists x'_\sigma \geq 0$ т,,ч.

$$(I - A_\sigma)\,x'_\sigma = c'$$

Дополним x'_σ нулями до x'. Пусть x' — не решение. Тогда $\exists x''$ т.,ч.

$$\left(\hat{I} - \hat{A}\right) x'' \geq c', \qquad Lx'' < Lx'$$

Рассмотрим вектор y_σ т.,ч.

$$(I - A_\sigma)\,y_\sigma = \lambda c - c',$$

дополним y_σ нулями до вектора y и положим

$$\tilde{x}' = x'' + y$$

Тогда $x'_\sigma + y_\sigma = \lambda\tilde{x}_\sigma$, поэтому $x' + y = \lambda\tilde{x}$. Но тогда

$$L\tilde{x}' = L(x'' + y) < L(x' + y) = L(\lambda\tilde{x})$$

И поэтому $\lambda\tilde{x}$ — не решение для λc, т.е. $\tilde{x}$ — не решение для c. Противоречие.

Сравнительная статистика модели Леонтьева

Как зависит вектор валового выпуска от изменения спроса на товары?

Теорема

Пусть $A > 0$ — неразложима и продуктивная матрица, вектора

$$c = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \qquad c' = (c_1', c_2, \ldots, c_n)$$

отличаются только первой компонентой, $c_1' > c_1$, $c \geq 0$,

$$x = (I - A)^{-1} c, \qquad x' = (I - A)^{-1} c'.$$

Тогда

$$\frac{x_1'}{x_1} = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i'}{x_i}$$

При этом, если

$$\frac{x_1'}{x_1} = \frac{x_i'}{x_i}, \qquad i \neq 1$$

то $c_i' = c_i = 0$

Сравнительная статистика модели Леонтьева. Доказательство теоремы

Пусть $\gamma_i = \frac{x_i'}{x_i}$. Так как $c' > c$, то $x' > x$. Поэтому $\gamma_i \geq 1$.
По условию $x = c + Ax$ или в координатах $x_i = c_i + \sum_j a_{ij} x_j$. Подставим выражение для x_i.

$$\frac{1}{\gamma_i} x_i' = c_i + \sum_j a_{ij} \frac{1}{\gamma_j} x_j' \qquad \Rightarrow \qquad x_i' = \gamma_i c_i + \sum_j a_{ij} \frac{\gamma_i}{\gamma_j} x_j'$$

Пусть $S = \{i | \gamma_i = \max \gamma_j\}$ и пусть $i \in S \backslash \{1\}$.
Тогда, если $c_i' \neq 0$, то

$$x_i' = \gamma_i c_i + \sum_j a_{ij} \frac{\gamma_i}{\gamma_j} x_j' > c_i' + \sum_j a_{ij} x_j' = x_i',$$

так как $\gamma_i > 1$ и $\frac{\gamma_i}{\gamma_j} \geq 1$.
Получаем противоречие. Поэтому

$$\frac{x_i'}{x_i} = \max_{1 \leq j \leq n} \frac{x_j'}{x_j}, \quad i \neq 1 \qquad \Rightarrow \qquad c_i' = c_i = 0.$$

Если $1 \notin S$, то из тех же соображений получаем $a_{ij} = 0$ для всех $i \in S, j \notin S$, что означает, что A — разложимая матрица. Противоречие. Следовательно $1 \in S$.
Теорема доказана.

Эластичность продукта по спросу

Теорема (Эластичность продукта по спросу)

Пусть матрица $A > 0$ неразложима и продуктивна. Тогда

$$\frac{\partial x_i}{\partial c_j}\frac{c_j}{x_i} \le 1.$$

Число $E_{ij} = \frac{\partial x_i}{x_i} : \frac{\partial c_j}{c_j}$ называется эластичностью i-го продукта по спросу c_j на j-тый продукт.

Доказательство. Пусть $j = 1$. Рассмотрим конечные приращения как в предыдущей теореме. Тогда

$$\frac{x_i' - x_i}{x_i} = \gamma_i - 1, \qquad \frac{c_1' - c_1}{c_1} = \mu_1 - 1, \qquad \mu_1 = \frac{c_1'}{c_1}$$

Тогда

$$x_1' = \gamma_1 c_1 + \sum_i a_{1i}\frac{\gamma_1}{\gamma_i}x_i' \ge \frac{\gamma_1}{\mu_1}c_1' + \sum_i a_{1i}x_i',$$

так как $\gamma_1 \ge \gamma_i$.

Получаем, что

$$\frac{\gamma_1}{\mu_1} \le 1 \quad \Rightarrow \quad \mu_1 \ge \gamma_1 \ge \gamma_i \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma_i - 1}{\mu_1 - 1} \le 1$$

Что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Нелинейная модель Леонтьева

- n товаров

- $f_{ij}(x_j)$ — количество i-го товара, необходимого для производства x_j товара под номером j.

  Считаем, что $f_{ij} \geq 0$ — непрерывные неотрицательные функции.

- условие замкнутости (бесприбыльность)

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} f_{ij}(x_j)$$

- нелинейная (замкнутая) модель Леонтьева

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(x_j)$$

Равновесие в нелинейной модели Леонтьева

Обозначим $\Delta_K^{n-1} = \{x = (x_1, \dots, x_n) | x_i \geq 0, \sum x_i = K\}$ — $(n-1)$-мерный симплекс.

Теорема (Брауэр)

У любого непрерывного отображения $F : \Delta_K^{n-1} \to \Delta_K^{n-1}$ существует неподвижная точка $x \in \Delta_k^{n-1}$, т.е. такая точка, что $F(x) = x$.

Теорема

В нелинейной замкнутой модели Леонтьева существует равновесие x т.,ч. $\sum x_i = K$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $F : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+^n$ т.,ч.

$$F(x)_i = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(x_j)$$

Если $x \in \Delta_K^{n-1}$, то $\sum_i F(x)_i = \sum_{i,j} f_{ij} = \sum_j x_j = K$. Поэтому $F(x) \in \Delta_K^{n-1}$.
F — непрерывное отображение, так как все функции f_{ij} непрерывны, поэтому по теореме Брауэра существует положение равновесия $x \in \Delta_K^{n-1}$, для него $F(x) = x$.

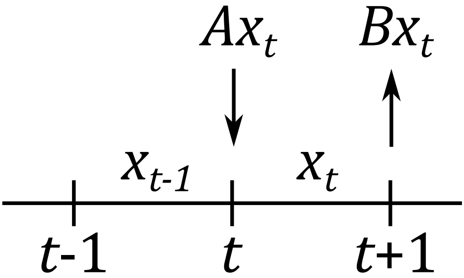
Модель Неймана

Модель Неймана:

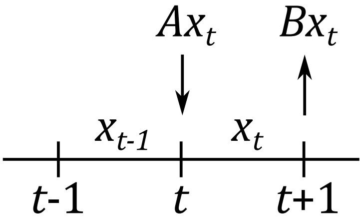
- n товаров, m производственных процессов
- базисные процессы (a^j, b^j), где a^j — вектор затрат, b^j — вектор выпуска.
- смешанный процесс, $x = (x^1, \dots, x^m)$ — вектор интенсивностей

$$x \to (Ax, Bx)$$

- A — матрица затрат, B — матрица выпуска (неотриц. $n \times m$-матрицы)
- t — дискретно



Модель Неймана. Правила игры



При этом

1. Условия замкнутости $Ax_t \leq Bx_{t-1}$
   Последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_t$, удовлетворяющая условию замкнутости, называется планом. x_0 — вектор запасов.
2. Условие нулевого дохода $p_{t-1}A \geq p_t B$ (базисные процессы не приносят прибыли).
   Здесь $\{p_t\}$ — траектория цен.
3. Сохранение денежной массы $p_t A x_t = p_{t+1} B x_t$
4. Отсутствие потребления $p_t B x_{t-1} = p_t A x_t$.

Состояния равновесия модели Неймана

- Стационарная траектория

$$x_t = \nu^t x_0, \qquad p_t = \mu^{-t} p_0.$$

- *Замечание.*
  Стационарный план: $\nu A x_0 \leq B x_0$, стационарная траектория цен $\mu p_0 A \geq p_0 B$.

- Состояние динамического равновесия

$$(\nu, \mu, p, x): \quad \nu A x \leq B x, \qquad \mu p A \geq p B, \qquad \mu p A x = p B x,$$

$$\nu p A x = p B x, \qquad \nu, \mu > 0, \quad p, x > 0.$$

- *Замечание.* $pAx \neq 0 \Rightarrow \nu = \mu$.

- Невырожденное положение равновесия

$$(\alpha, x, p): \alpha > 0, x, p > 0$$

$$\alpha A x \leq B x, \qquad \alpha p A \geq p B, \qquad pAx > 0.$$

Модель Гейла

Обозначим $z = (x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Определение

Модель Гейла — подмножество $Z \subset \mathbb{R}^{2n}_{+}$ такое, что

1. Z — выпуклый замкнутый конус.
2. Если $(0, y) \in Z$, то $y = 0$.
3. $\forall i \quad \exists (x, y) \in Z$ такое, что $y_i > 0$.

Замечание. Т.к. конус выпуклый, условие $3 \Leftrightarrow 3'$: $\exists (x, y) \in Z : y >> 0$.

Определения:

- $z = (x, y) \in Z$ — производственный процесс,
- x — вектор затрат,
- y — вектор выпуска

Модель Неймана порождает модель Гейла

Утверждение

(A, B) — модель Неймана, в A нет нулевых столбцов (нет “рога изобилия”), в B нет нулевых строк (все товары производятся). Тогда

$$Z = \{(Au, Bu)| \quad u \geq 0\}$$

является моделью Гейла.

1. Очевидно, что Z — выпуклый конус. Покажем, что Z замкнуто, т.е. содержит все свои предельные точки. Рассмотрим симплекс $\Delta = \left\{ u \;\middle|\; \sum_i u_i = 1 \right\}$.

   Пусть у последовательности

   $$(A(\lambda_i u_i), B(\lambda_i u_i)) \qquad \lambda_i \geq 0, \quad u_i \in \Delta$$

   есть предел. Достаточно показать, что из $\lambda_i u_i$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

   - В $u_i \in \Delta$ есть сход. подпосл. u_{i_k} т.к. Δ — компакт.
   - В B нет нулевых строк, поэтому $\|Bu_i\| \geq c > 0$. Следовательно, λ_i ограничены и $\exists$ сход. подпосл. λ_{i_l}.

Модель Неймана порождает модель Гейла - 2

Продолжение доказательства:

1. Поскольку в A нет нулевых столбцов и $A \geq 0, u \geq 0$,

$$Au = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0 \quad \Rightarrow \quad Bu = 0.$$

2. Поскольку в B нет нулевых строк

$$u >> 0 \quad \Rightarrow \quad Bu >> 0.$$

Утверждение доказано.

Состояния равновесия модели Гейла

- Траектория (план) модели Гейла Z с началом y_0 — последовательность $z_t = (x_{t-1}, y_t) \in Z$, где $t \in \mathbb{N}$ и $x_t \leq y_t$.
- Траектория цен — последовательность $p_t \in \mathbb{R}^n_+$, $t \in \mathbb{N}_0$ такая, что $\forall (x, y) \in Z$ выполнено $p_{t-1}x \geq p_t y$.
- Обозначим $\pi_t(\xi) = p_t y_t$, где $\xi = \{z_t\}$
- *Замечание.* Последовательность π_t монотонно убывает.

Определение

Тройка $(\alpha, \bar{z}, \bar{p})$, где $\alpha > 0, \bar{z} \in Z, \bar{p} > 0$ называется состоянием равновесия, если

1. $\alpha \bar{x} \leq \bar{y}$
2. $\forall (x, y) \in Z$ выполнено $\alpha \bar{p} x \geq \bar{p} y$.

- Если $\langle \bar{p}, \bar{y} \rangle > 0$, то положение равновесия невырожденное.
- α — темп роста.

У любой модели Гейла существует состояние равновесия.

Теорема

У любой модели Гейла Z существует состояние равновесия.

Для любого $z \in Z$ определим технологический темп роста процесса $z = (x, y)$:

$$\alpha(z) = \max_{\alpha} \{\alpha \mid \quad \alpha x \leq y\}$$

Тогда

$$\alpha(z) \geq 0, \qquad \alpha(\lambda z) = \alpha(z), \quad \forall \lambda > 0$$

Определим число Неймана модели Гейла как

$$\alpha_N = \sup_{z \in Z \setminus \{0\}} \alpha(z)$$

Вначале покажем, что $\alpha_N < \infty$.

Модель Гейла

Пусть $\alpha_N = \infty$, где

$$\alpha_N = \sup_{z \in Z \setminus \{0\}} \alpha(z), \qquad \alpha(z) = \max_{\alpha} \{\alpha \quad | \quad \alpha x \le y\}$$

- Тогда

$$\exists \quad z_n = (x_n, y_n) \in Z : \qquad \alpha(z_n) > n, \qquad \text{и} \qquad \|y_n\| = 1$$

- Тогда

$$\|x_n\| \le \frac{\|y_n\|}{\alpha(z_n)} \quad \Rightarrow \quad \|x_n\| \to_{n\to\infty} 0$$

- С другой стороны, последовательность $\{y_n\}$ ограничена, поэтому существует сходящаяся подпоследовательность $y_{n_k} \to y, \qquad \|y\| = 1.$
- Множество Z замкнуто, поэтому

$$z_{n_k} \to_{k\to\infty} (0, y) \in Z$$

- Получили противоречие (с пунктом 2 определения множества Гейла). Следовательно, $\alpha_N < \infty$.

Модель Гейла

Аналогично тому, что $\alpha_N < \infty$ доказывается, что

$$\exists z_n \to \bar{z} \in Z: \qquad \alpha(z_n) \to \alpha_N \quad \Rightarrow \quad \alpha(\bar{z}) = \alpha_N$$

Рассмотрим

$$U = \{y - \alpha_N x \mid \quad (x,y) \in Z\}, \qquad \text{и} \qquad \mathbb{R}^n_{++} = \{x >> 0\}$$

Тогда $U \cap \mathbb{R}^n_{++} = \varnothing$, иначе

$$\exists (x,y) \in Z: \quad y - \alpha_N x >> 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha(z) > \alpha_N$$

Множества $U, \mathbb{R}^n_{++}$ — выпуклые, поэтому по теореме отделимости

$$\exists p \neq 0 \ : \quad \forall u \in U \quad \forall v \in \mathbb{R}^n_{++} \qquad pu \le pv$$

Так как $0 \in U \quad \Rightarrow \quad pv \ge 0 \quad \Rightarrow p > 0.$

$$\exists v_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad pu \le 0 \quad \forall u \quad \Rightarrow \quad \alpha_N px \ge py \quad \forall (x,y) \in Z$$

Следовательно $(\alpha_N, \bar{z}, p)$ — состояние равновесия.

Теорема доказана.

Модель Гейла

Замечание

Состояние равновесия $(\alpha_N, \bar{z}, p)$ может быть вырожденным.

Задача

Привести пример модели Гейла без невырожденных состояний равновесия.

Ответ:

$$y_1 \leq x_1 + \sqrt{x_1 x_2}$$

$$y_2 \leq x_2 - \frac{x_2^2}{x_1 + x_2}$$

Конечность числа темпов роста модели Гейла

Утверждение

В модели Гейла может быть не более n темпов роста.

$\forall \alpha > 0$ обозначим

$$Z(\alpha) = \{z = (x, y) \in Z \mid \quad \alpha(z) \geq \alpha\}, \qquad I(z) = \{i \mid \quad y_i > 0\},$$

$\bar{z}(\alpha)$ — вектор из $Z(\alpha)$, имеющий наибольший набор ненулевых компонент, а $n(\alpha) = \#I(\bar{z}(\alpha))$

Тогда $n(\alpha)$ корректно определено, так как $Z(\alpha)$ — выпуклый конус.
Пусть $\alpha_1 < \alpha_2$. Тогда $Z(\alpha_1) \subset Z(\alpha_2)$ и $n(\alpha_1) \geq n(\alpha_2)$.

Пусть α_1, α_2 — темпы роста и $(\alpha_1, z_1, p_1), (\alpha_2, z_2, p_2)$ — состояния равновесия.
Можно считать, что z_i имеет наибольшее число ненулевых компонент.

Пусть $n(\alpha_1) = n(\alpha_2)$. Тогда $I(z_1) = I(z_2)$ и

$$\exists \gamma > 0: \quad y_1 \leq \gamma y_2 \quad \Rightarrow \quad \gamma p_1 y_2 \geq p_1 y_1 > 0 \quad \Rightarrow \quad p_1 y_2 > 0$$

Тогда $\alpha_1 p_1 x_2 \geq p_1 y_2$ (по определению p), откуда

$$\alpha_2 x_2 \leq y_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 p_1 x_2 \leq p_1 y_2 \leq \alpha_1 p_1 x_2 \quad \text{но} \quad p_1 y_2 > 0 \quad \Rightarrow \quad p_1 x_2 > 0.$$

Тогда $\alpha_2 \leq \alpha_1$, противоречие. Это доказывает утверждение.

Число Фробениуса модели Гейла.

Обозначим

$$\alpha'(p) = \inf\{\alpha \mid \quad \alpha px \geq py \quad \forall (x, y) \in Z\}$$

Тогда $\alpha_F = \inf_{p>0} \alpha'(p)$ — число Фробениуса модели Гейла.
Отметим, что

$$\exists \bar{p} > 0 : \alpha'(\bar{p}) = \alpha_F$$

Число Фробениуса не больше числа Неймана модели Гейла.

Утверждение

1. $\alpha_F \leq \alpha_N$
2. $\forall \alpha \in [\alpha_F, \alpha_N]$ существует состояние равновесия (α, z, p) такое, что $\alpha'(p) \leq \alpha \leq \alpha(z)$.
3. Если (α, z, p) — невырождено, то $\alpha = \alpha(z) = \alpha'(p)$.

1. Было доказано, что $\exists$ состояние равновесия $(\alpha_N, \bar{z}, p)$. Поэтому
$$\alpha_N px \geq py \qquad \forall (x, y) \in Z \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_F \leq \alpha'(p) \leq \alpha_N$$
2. Действительно,
   - Если $\alpha \leq \alpha_N$, то $\exists z \in Z$ т.,ч.
   $$\alpha x \leq y$$
   - Если $\alpha \geq \alpha_F$, то $\exists p$ т.,ч.
   $$\alpha px \geq py, \qquad \forall (x, y) \in Z$$
3. С одной стороны,
$$\alpha_F \leq \alpha'(p) \leq \alpha \leq \alpha(z) \leq \alpha_N$$
С другой стороны, для любого состояния равновесия (α, z, p)
$$\alpha(z) px \leq py \leq \alpha'(p) px$$
Если состояние невырождено, т.е. $py \neq 0$, то $\alpha(z) \leq \alpha'(p)$, и числа равны.

От модели Гейла к модели Неймана

Пусть (A, B) — модель Неймана, в A нет нулевых столбцов, в B нет нулевых строк. Обозначим

$$\lambda_N = \inf\{\lambda| \quad \exists u > 0 : \quad (A - \lambda B)u \leq 0\}$$

$$\lambda_F = \sup\{\lambda| \quad \exists p > 0 : \quad p(A - \lambda B) \geq 0\}$$

Определение

λ_F, λ_N — числа Неймана и Фробениуса модели (A, B).

Замечание

$Z = \{(Au, Bu)|u \geq 0\}$ — модель Гейла.

1. $\lambda_N = \alpha_N^{-1}, \lambda_F = \alpha_F^{-1}$, где α_F, α_N — числа Неймана и Фробениуса модели Гейла.
2. Как следствие, $\lambda_N \leq \lambda_F$.

$\lambda_N = \alpha_N^{-1}$ по определению этих чисел, для чисел Фробениуса аналогично:

$$\lambda_N = \inf\left\{\lambda\middle| \quad Au \leq \lambda Bu\right\}, \qquad \alpha_N = \sup\left\{\alpha\middle| \quad \alpha x \leq y\right\}$$

Замечание. Следующие 2 теоремы позволят доказать, что в модели Неймана существует невырожденное положение равновесия.

Альтернатива для систем линейных уравнений

Теорема (Альтернатива для систем линейных неравенств)

Для любой матрицы A и вектора b:

1. *либо* $\exists x \geq 0 : \quad Ax \leq b,$
2. *либо, в противном случае,* $\exists\ p \geq 0 : \quad pA \geq 0 \quad$ *и* $\quad \langle p, b \rangle < 0.$

(не $1 \Leftarrow 2$) Пусть одновременно $\exists p \geq 0$ и $\exists x \geq 0$ с указанными свойствами. Тогда

$$0 > pb \geq pAx \geq 0,$$

так как $p \geq 0, \quad pA \geq 0$ и $x \geq 0$. Получаем противоречие.

(не $1 \Rightarrow 2$) Пусть $\forall x \geq 0$ выполнено $Ax > b$. Тогда

$$b \notin \mathrm{Conv.\ cone}\left\{a_1, \ldots, a_n, e_1, \ldots, e_m\right\},$$

где $A = (a_1, \ldots, a_n)$, иначе

$$b = \sum x^i a_i + \lambda_i e_i \geq Ax.$$

По теореме отделимости

$$\exists p > 0 : \langle p, b \rangle < 0, \qquad \langle p, z \rangle \geq 0, \qquad \forall z \in \mathrm{Conv.\ cone}$$

Поэтому

$$\begin{cases} \langle p, e_i \rangle \geq 0 \Rightarrow p \geq 0 \\ \langle p, a_i \rangle \geq 0 \Rightarrow pA \geq 0 \end{cases}$$

Теорема о системах линейных неравенств

Теорема (Теорема о системах линейных неравенств)

Пусть $X = \{x \geq 0 | Ax \leq b\} \neq \varnothing$ *и* $\forall x \in X, \quad \langle c, x \rangle \leq d.$
$\Rightarrow \exists p \geq 0 : \quad pA \geq c$ *и* $\langle p, b \rangle \leq d.$

Пусть не так. Тогда $\forall q = p^T \geq 0$ система линейных неравенств

$$\begin{cases} -A^T q \leq -c^T \\ b^T q \leq d \end{cases}$$

не имеет решения. Тогда по альтернативе $\exists \tilde{x} = (x^T, s) : \tilde{x} \begin{pmatrix} -A^T \\ b^T \end{pmatrix} \geq 0, \quad \tilde{x} \begin{pmatrix} -c^T \\ d \end{pmatrix} < 0.$

Т.е. $-Ax + sb \geq 0, \quad -\langle c, x \rangle + sd < 0$ или

$$\begin{cases} Ax \leq sb \\ \langle c, x \rangle > sd \end{cases}$$

1) $s = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists x_0 \geq 0 \quad Ax_0 \leq 0, \quad \langle c, x_0 \rangle > 0.$
Тогда $\forall x \in X \quad \exists \lambda > 0 : \quad A(x + \lambda x_0) \leq Ax < b, \quad \langle c, x + \lambda x_0 \rangle > d \quad \Rightarrow \quad x + \lambda y \in X.$
Противоречие.
2) $s > 0$. Тогда можно считать $s = 1$. Тогда $\exists x \geq 0 : Ax \leq b, \quad \langle c, x \rangle > d$. Противоречие.

Невырожденные положения равновесия модели Неймана.

Теорема

Пусть в модели Неймана $A \geq 0, B \geq 0$, в матрице A нет нулевых столбцов, в матрице B — нулевых строк. Тогда существует невырожденное положение равновесия.

Доказательство теоремы. Докажем существование невырожденных положений равновесия для $\alpha = \lambda_F$ (для λ_N аналог. на след. слайде). Рассмотрим $p_* > 0$ т., ч.

$$p_*(A - \lambda_F B) \geq 0.$$

Можно считать, что $p_* A$ имеет наибольшее число ненулевых компонент. Нужно показать, что $\exists u \geq 0$ такое, что $(A - \lambda_F B)u \leq 0$ и $p_* Au > 0$. Пусть

$$(A - \lambda_F B)u \leq 0, \quad u \geq 0 \quad \Rightarrow \quad p_* Au \leq 0.$$

Тогда по теореме о системах линейных неравенств

$$\exists q \geq 0 : \quad q(A - \lambda_F B) \geq p_* A \geq 0.$$

Т.к. у $p_* A$ наибольшее число ненулевых компонент

$$\begin{cases} (qA)_j > \lambda_F (qB)_j, & (p_* A)_j \neq 0 \\ (qA)_j = (qB)_j = 0, & (p_* A)_j = 0 \end{cases}$$

Тогда $\exists \Delta > 0 : qA > (\lambda_F + \Delta)qB$. Противоречие с опред. λ_F. Теорема доказана.

Невырожденные положения равновесия модели Неймана.

Замечание. Аналогично для λ_N рассмотрим u_* : $(A-\lambda_N B)u_* \leq 0$ и Bu_* имеет наибольшее число ненулевых компонент. Пусть

$$p \geq 0, \quad p(A-\lambda_N B) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad pBu_* \leq 0.$$

Тогда

$$(A-\lambda_N B)v \leq -Bu_* \leq 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} (Av)_j < \lambda_N (Bv)_j, & (Bu_*)_j > 0 \\ (Av)_j = (Bv)_j = 0, & (Bu_*)_j = 0 \end{cases}$$

Где опять $(Bv)_j = 0$ при $(Bu_*)_j = 0$, т.к. у Bu_* наибольшее число нулевых компонент.

Значит, $\exists \Delta > 0 : (A-(\lambda_N - \Delta)B)v \leq 0$. Противоречие с определением λ_N.

Это будет невырожд. полож. равнов. для $\alpha = \lambda_N$, т.к.

$$pAu_* \geq \lambda_N pBu_* > 0$$

Продуктивность модели Неймана

Определение

(A, B) — продуктивна, если $\forall c \geq 0, \quad \exists x \geq 0 : \quad Bx - Ax \geq c.$

Теорема

Модель продуктивна $\Leftrightarrow \lambda_F < 1$.

Доказательство

($\Leftarrow$) Пусть

$$\exists c \geq 0 : \quad \forall x \geq 0 \qquad Bx - Ax < c.$$

Тогда система $(A - B)x \leq -c, \qquad x \geq 0$ не имеет решения. По альтернативе для систем линейных неравенств $\exists p \geq 0 : p(A - B) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_F \geq 1$.

($\Rightarrow$) Пусть (A, B) продуктивна. Рассмотрим $c >> 0$ и $x \geq 0, \quad (B - A)x \geq c$. Пусть $p > 0 : \quad p(A - \lambda_F B) \geq 0$. Тогда

$$\frac{1}{\lambda_F} pAx \geq pBx > pAx \quad \Rightarrow \quad pAx > 0 \quad \text{и} \quad \frac{1}{\lambda_F} > 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_F < 1.$$

Изолированная пара множеств. Подэкономика

Определение

Подмножества $S \subset \{1, \ldots, m\}$, $\quad T \subset \{1, \ldots, n\}$ образуют изолированную пару (S, T), если $\forall j \in S, i \notin T$ выполнено $a_{ij} = b_{ij} = 0$.

Замечание. Отрасли из S потребляются и производят только продукты из T. (S, T) — подэкономика.

Определение

Модель (A, B) — разложимая, если существует (нетривиальная) изолированная пара $(S, T) \neq (\{1, \ldots, m\}, \{1, \ldots, n\}), S \neq \varnothing, T \neq \varnothing$.

Теорема

Если $\lambda_F \neq \lambda_N$, то модель разложима.

Разложимость модели Неймана

Теорема

Если $\lambda_F \neq \lambda_N$, то модель разложима.

Доказательство. Пусть $\lambda_F \neq \lambda_N$ и (u_F, p_F) (u_N, p_N) — невырожденные состояния равновесия. Тогда Bu_N имеет нулевые компоненты, так как

$$p_F \lambda_F B u_N \leq p_F A u_N \leq p_F \lambda_N B u_N \qquad \text{и} \qquad \lambda_N \leq \lambda_F .$$

Поэтому

$$A u_N \leq \lambda_N B u_N$$

имеет нулевые координаты.
Но в A нет нулевых столбцов $\Rightarrow$ в u_N есть нулевая координаты. Положим

$$S = \{j \mid \quad u(\alpha)_j > 0\}, \qquad T = \{i | \quad (Bu_N)_i > 0\}.$$

Тогда $S \neq \varnothing, \{1, \ldots, m\}, T \neq \{1, \ldots, n\}$. Получаем, что

$$i \notin T \qquad \Rightarrow \quad 0 = (Bu_N)_i = \sum_j b_{ij}(u_N)_j \quad \Rightarrow \quad b_{ij} = 0, \quad \text{если} \quad j \in S$$

Аналогично для Au_N.

Следствие

Если (A, B) неразложима, то существует ровно один темп роста. (Состояний равновесия при этом может быть несколько. Упражнение — придумать пример.)