Решение общей проблемы Борсука в терминах расстояния Громова–Хаусдорфа до симплексов

А. О. Иванов, А. А. Тужилин

Аннотация

В данной работе изучается обобщенная проблема Борсука: можно ли данное ограниченное метрическое пространство X разбить на заданное число m (возможно, бесконечное) частей меньшего диаметра. Ответ на этот вопрос дается в терминах расстояния Громова–Хаусдорфа от X до симплекса мощности m и меньшего чем X диаметра. Здесь под симплексом мы понимаем метрическое пространство, все ненулевые расстояния в котором одинаковы.

Библиография: 13 названий.

Введение

В настоящей статье речь идет об известной задаче, которой еще занимался Борсук: на сколько частей нужно разбить произвольное неодноточечное подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, чтобы диаметры элементов разбиения были меньше диаметра исходного множества. Борсук в 1933 году высказал знаменитую гипотезу, согласно которой любое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$ может быть разбито на $n+1$ подмножество меньшего диаметра. Эта гипотеза была доказана Хадвигером [8] и [9] для выпуклых подмножеств с гладкой границей, и неожиданно опровергнута в общем случае в 1993 году [10]. Современное состояние дел описано, например, в [11].

С другой стороны, Люстерником и Шнирельманом [6], и чуть позже независимо Борсуком [4] и [5], см. подробности, например, в [7], было показано, что как сферу, так и шар в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, нельзя разбить на $m \leq n$ частей меньшего диаметра.

В настоящей работе мы рассматриваем обобщенную задачу Борсука, переходя к произвольному ограниченному метрическому пространству X и разбиению произвольной мощности m (не обязательно конечной). Мы приводим критерий, решающий проблему Борсука в терминах знаменитого расстояния Громова–Хаусдорфа. Оказывается, для выяснения разрешимости проблемы Борсука достаточно вычислить расстояние от пространства X до симплекса мощности m и диаметра меньшего, чем диаметр X. Здесь под симплексом мы понимаем метрическое пространство, все ненулевые расстояния в котором равны между собой.

Отметим, что вычислению и оценке таких расстояний посвящены работа [3] и ее обобщение [12]. Связь расстояний этого типа с другими геометрическими задачами была также продемонстрирована в работе [13], где в терминах расстояний от конечного метрического пространства X до конечных симплексов были вычислены длины ребер минимального остовного дерева, построенного на X.

Работа частично подержана Программой Президента РФ поддержки ведущих научных школ России (Проект НШ–6399.2018.1, Соглашение 075–02–2018–867), РФФИ, Проект 19-01-00775-а, а также Программой поддержки научных школ МГУ.

1 Основные определения и предварительные результаты

Пусть X — произвольное множество. Через $\#X$ будем обозначать *мощность* множества X.

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Расстояние между его точками x и y будем обозначать через $|xy|$. Если $A, B \subset X$ — непустые подмножества, то положим $|AB| = \inf\bigl\{|ab| : a \in A,\, b \in B\bigr\}$. Если $A = \{a\}$, то вместо $|\{a\}B| = |B\{a\}|$ будем писать $|aB| = |Ba|$.

Для каждой точки $x \in X$ и числа $r > 0$ через $U_r(x)$ и $S_r(x)$ будем обозначать соответственно открытый шар и сферу с центром в точке x и радиусом r; для каждого непустого $A \subset X$ и числа $r > 0$ положим $U_r(A) = \cup_{a\in A} U_r(a)$.

1.1 Расстояния Хаусдорфа и Громова–Хаусдорфа

Для непустых A, $B \subset X$ положим

$$d_H(A,B) = \inf\bigl\{r > 0 : A \subset U_r(B) \text{ и } B \subset U_r(A)\bigr\} = \max\{\sup_{a\in A} |aB|,\ \sup_{b\in B} |Ab|\}.$$

Полученная величина называется *расстоянием Хаусдорфа между A и B*. Хорошо известно [1], [2], что расстояние Хаусдорфа, рассматриваемое на множество всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств из X, является метрикой.

Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X', Y', Z), состоящую из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y', изометричных соответственно X и Y, назовем *реализацией пары* (X, Y). *Расстоянием $d_{GH}(X, Y)$ по Громову–Хаусдорфу между X и Y* назовем точную нижнюю грань чисел r, для которых существует реализация (X', Y', Z) пары (X, Y) такая, что $d_H(X', Y') \le r$. Хорошо известно [1], [2], что на множестве $\mathcal{M}$ всех компактных метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии, функция d_{GH} является метрикой.

Для произвольного метрического пространства X и числа $\lambda > 0$ через λX обозначим метрическое пространство, которое отличается от X умножением всех расстояний на λ. Метрическое пространство мощности m, в котором все ненулевые расстояния равны 1, назовем *единичным симплексом* и обозначим через Δ_m. *Симплексом* будем называть каждое пространство $\lambda\Delta_m$, $\lambda > 0$. Отметим, что Δ_1 — одноточечное метрическое пространства.

Для произвольного метрического пространства X через $\operatorname{diam} X$ будем обозначать его *диаметр*, определяемся стандартно:

$$\operatorname{diam} X = \sup\bigl\{|xy| : x, y \in X\bigr\}.$$

Отметим, что пространство X ограничено, если и только если $\operatorname{diam} X < \infty$.

Предложение 1.1 ([1], [2])**.** *Для произвольного метрического пространства X имеем*

$$2d_{GH}(\Delta_1, X) = \operatorname{diam} X.$$

Приведем две теоремы из [12], на которых базируются основные результаты настоящей статьи.

Теорема 1.2 ([12])**.** *Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство и $\#X < \#\lambda\Delta$, тогда*
$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \max\{\lambda, \operatorname{diam} X - \lambda\}.$$

Пусть X — произвольное множество и m — кардинальное число, не превосходящее $\#X$. Через $\mathcal{D}_m(X)$ обозначим семейство всевозможных разбиений множества X на m частей.

Пусть теперь X — метрическое пространство. Тогда для каждого $D = \{X_i\}_{i\in I} \in \mathcal{D}_m(X)$ положим
$$\operatorname{diam} D = \sup_{i\in I} \operatorname{diam} X_i.$$
Далее, для любых непустых $A, B \subset X$ и каждого $D = \{X_i\}_{i\in I} \in \mathcal{D}_m(X)$ положим
$$|AB| = \inf\big\{|ab| : (a,b) \in A\times B\big\} \quad \text{и} \quad \alpha(D) = \inf\big\{|X_iX_j| : i \neq j\big\}.$$

Теорема 1.3 ([12])**.** *Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство и m — кардинальное число, $m \le \#X$. Тогда*
$$2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) = \inf_{D\in\mathcal{D}_m(X)} \max\{\operatorname{diam} D,\, \lambda - \alpha(D),\, \operatorname{diam} X - \lambda\}.$$

2 Обобщенная проблема Борсука

В классической проблеме Борсука требовалось выяснить, на сколько частей нужно разбить подмножество евклидова пространства, чтобы все эти части были меньшего диаметра. Про историю этого вопроса мы вкратце поговорили во введении.

Обобщим теперь проблему Борсука на произвольные ограниченные метрические пространства и произвольные мощности разбиения. Пусть X — ограниченное метрическое пространство, m — кардинальное число, $m \le \#X$, и $D = \{X_i\}_{i\in I} \in \mathcal{D}_m(X)$. Будем говорить, что D — разбиение на части *строго меньшего диаметра*, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\operatorname{diam} X_i \le \operatorname{diam} X - \varepsilon$ при всех $i \in I$.

Обобщенной проблемой Борсука назовем следующую задачу: выяснить, можно ли данное ограниченное метрическое пространство разбить на заданное число частей строго меньшего диаметра.

Приведем решение обобщенной проблемы Борсука в терминах расстояния Громова–Хаусдорфа.

Теорема 2.1. *Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство и m — кардинальное число, $m \le \#X$. Выберем произвольное число $0 < \lambda < \operatorname{diam} X$, тогда X можно разбить на m частей строго меньшего диаметра, если и только если $2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) < \operatorname{diam} X$.*

Доказательство. При выбранных λ, по теореме 1.3, имеем $2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) \le \operatorname{diam} X$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда для каждого $D \in \mathcal{D}_m(X)$ выполняется $\operatorname{diam} D = \operatorname{diam} X$, а это и означает, что не существует разбиения пространства X на m частей строго меньшего диаметра. □

Следствие 2.2. *Пусть $d > 0$ — вещественное число, а $m \le n$ — кардинальные числа. Обозначим через $\mathcal{M}_n$ множество классов изометрии ограниченных метрических пространств мощности не больше n, наделенное расстоянием Громова–Хаусдорфа (возникающие ниже геометрические объекты относятся именно к пространству $\mathcal{M}_n$). Выберем произвольное $0 < \lambda < d$, тогда пересечение сфер*

$$S_{d/2}(\Delta_1) \cap S_{d/2}(\lambda\Delta_m)$$

не содержит пространств мощности меньшей m и состоит в точности из всех лежащих в $\mathcal{M}_n$ метрических пространств диаметра d, которые нельзя разбить на m частей строго меньшего диаметра.

Доказательство. Пусть X принадлежит пересечению сфер, тогда $\operatorname{diam} X = d$ по предложению 1.1. Если $m > \#X$, то, по теореме 1.2, имеем

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \max\{\lambda, \operatorname{diam} X - \lambda\} < d,$$

поэтому $X \notin S_{d/2}(\lambda\Delta_m)$, что и доказывает первое утверждение следствия.

Пусть теперь $m \le \#X$. Воспользуемся тем, что $\operatorname{diam} X = d$ и $2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) = d$, поэтому, в силу теоремы 2.1, пространство X не разбивается на m частей строго меньшего диаметра.

Обратно, каждый X диаметра d, для которого $m \le \#X$ и который не разбивается на m частей строго меньшего диаметра, по теореме 2.1 лежит в пересечении сфер. □

Список литературы

[1] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. *Курс метрической геометрии.* Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

[2] Иванов А.О., Тужилин А.А. *Геометрия расстояний Хаусдорфа и Громова-Хаусдорфа: случай компактов.* Изд-во Попечительского совета мех-мат ф-та МГУ, Москва, 2017.

[3] Ivanov A.O., Iliadis S., Tuzhilin A.A. *Geometry of Compact Metric Space in Terms of Gromov-Hausdorff Distances to Regular Simplexes.* ArXiv e-prints, arXiv:1607.06655, 2016.

[4] K. Borsuk, *Über die Zerlegung einer n-dimensionalen Vollkugel in n-Mengen.* Verh. International Math. Kongress Z"urich, 1932, p. 192.

[5] K. Borsuk, *Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre.* Fundamenta Math., v. 20, pp 177–190 (1933).

[6] Люстерник Л.А., Шнирельман Л.Г. *Топологические методы в вариационных задачах.* М.: Исследовательский институт математики и механики при I МГУ, 1930.

[7] G. M. Ziegler, *Colouring Hamming Graphs, Optimal Binary Codes, and the* 0/1-*Borsuk Problem in Low Dimensions.* In: Computational Discrete Mathematics, ed. by Helmut Alt (Springer–Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2001), pp. 159–172.

[8] H. Hadwiger, *Überdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers.* Commentarii Mathematici Helvetici, v. 18 (1): 73–75, (1945).

[9] H. Hadwiger, *Mitteilung betreffend meine Note: Überdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers.* Commentarii Mathematici Helvetici, v. 19, (1946).

[10] J. Kahn, G. Kalai, *A counterexample to Borsuk's conjecture.* Bull. Amer. Math. Soc., v. 29 (1), 60–62 (1993).

[11] Райгородский А.М. *Вокруг гипотезы Борсука.* Геометрия и механика, СМФН, 23, РУДН, М., 2007, 147–164; Journal of Mathematical Sciences, 154:4 (2008), 604–623.

[12] Григорьев Д.С., Иванов А.О., Тужилин А.А. *Расстояния Громова-Хаусдорфа до симплексов.* В печати.

[13] Tuzhilin A.A. *Calculation of Minimum Spanning Tree Edges Lengths using Gromov–Hausdorff Distance.* ArXiv e-prints, arXiv:1605.01566, 2016.