Класс Громова–Хаусдорфа: его полнота и геометрия облаков

С. А. Богатый, А. А. Тужилин

13 октября 2021 г.

Аннотация

Работа посвящена изучению собственного класса Громова–Хаусдорфа, состоящего из всех метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии. На этом классе вводится обобщенная псевдометрика Громова–Хаусдорфа и исследуется геометрия полученного пространства. Первым основным результатом является доказательством полноты пространства, т.е. что в нем все фундаментальные последовательности сходятся. Затем мы разбиваем пространство на максимальные собственные подклассы, состоящие из пространств на конечном расстоянии. Такие подклассы мы называем облаками. На облаках действует мультипликативная группа подобия, умножающая все расстояния каждого метрического пространства на некоторое положительное число. Мы приводим примеры того, что отображение подобия может не оставлять облако на месте. Также мы показываем, что если облако содержит пространство, остающееся от себя на нулевом расстоянии при всех подобиях, то такое облако стягивается на это пространство. В заключительной части мы исследуем подмножества вещественной прямой относительно их поведения при сжатиях/растяжениях.

Введение

Работа посвящена изучению геометрии собственного класса [1] Громова–Хаусдорфа, состоящего из всех непустых метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии. На этом собственном классе естественным образом определяется знаменитое расстояние Громова–Хаусдорфа [2, 3, 4], превращающее класс в обобщенное псевдометрическое пространство (слово "обобщенный" означает, что допускаются бесконечные расстояния, а приставка "псевдо-", — что между неизометричными пространствами могут быть нулевые расстояния). Традиционно это расстояние изучается на пространстве Громова–Хаусдорфа, в котором все метрические пространства компактны [5]. Для некомпактных пространств обычно вводят модифицированное расстояние — пунктированное расстояние Громова–Хаусдорфа [6], выбирая в этих пространствах некоторые точки и следя за тем, чтобы во время сравнения пространств друг с другом при определении расстояния выбранные точки оказывались "недалеко" друг от друга. Впрочем, более традиционным для некомпактных пространств является рассмотрение соответствующей сходимости, без предварительного задания функции расстояния [5].

Решение "нарушить традицию" было реализовано в [7], где немодифицированное расстояние Громова–Хаусдорфа изучается без ограничения на компактность. В настоящей работе мы продолжаем это исследование. В работе [7] было отмечено, что хотя на собственном классе стандартным образом определяется псевдометрика, тем не менее, топологию непосредственно определить не удается. Действительно, напомним, что в теории множеств фон Неймана–Бернайса–Гёделя все объекты называются классами, которые относятся к одному из двух типов: множествам и собственным классам. Класс называется множеством, если он является элементом некоторого другого класса. Если же класс не является элементом никакого другого класса, то он называется собственным. Тем самым, на собственном классе определить топологию не удастся, ведь иначе весь класс будет элементом топологии и, значит, должен быть множеством. Тем не менее, для классов, в которых фильтрация по мощностям состоит из множеств, "топологию" можно ввести, сопоставив каждому элементу фильтрации некоторую топологию и потребовав естественное согласование этих топологий. Именно таким образом в [7] было введено в рассмотрение понятие топологического класса. Также в [7] было показано, что класс Громова–Хаусдорфа фильтруется множествами и, значит, расстояние Громова–Хаусдорфа позволяет превратить этот класс в топологический.

Наличие такой "топологии" позволяет определить непрерывное отображения из топологического пространства в топологический класс[1], а вместе с ними и непрерывные кривые, их длины, а также понятие внутренней и

[1]Наличие псевдометрики дает возможность определить непрерывность отображения из топологического пространства стандартным образом, с помощью шаровых окрестностей, которые порождает псевдометрика. При этом окрестности могут оказаться собственными подклассами, так что из них будет невозможно составить класс. Определенный в работе [7] топологический класс позволяет работать в более привычных терминах.

строго внутренней обобщенной псевдометрики. В [7] доказывается, что расстояние Громова–Хаусдорфа является внутренним, т.е. для метрических пространств на конечном расстоянии оно равно точной нижней грани длин кривых, соединяющих эти пространства. Вопрос о том, является ли это расстояние строго внутренним, остается открытым. Напомним, что в пространстве Громова–Хаусдорфа расстояние является метрикой (не принимает значение ∞ и положительно определено) и, как было показано в [9], эта метрика — строго внутренняя. Также хорошо известно [5], что пространство Громова–Хаусдорфа — полное и сепарабельное.

А что можно сказать про свойства класса Громова–Хаусдорфа? В настоящей работе мы покажем, что класс Громова–Хаусдорфа — полный. Затем мы разобьем весь класс Громова–Хаусдорфа на "облака" — максимальные собственные подклассы, каждый из которых состоит из пространств на конечном расстоянии друг от друга. Облако, содержащее одноточечное метрическое пространство, включает в точности все ограниченные метрические пространства. Все остальные облака состоят из неограниченных пространств.

Чтобы сформулировать следующий результат, введем некоторые обозначения. Если X — метрическое пространство, то для вещественного $\lambda > 0$ через λX обозначим метрическое пространство, получающееся из X умножением всех расстояний на λ. Хорошо известно, что для ограниченных метрических пространств X и Y расстояние Громова–Хаусдорфа между λX и λY получается из расстояния между X и Y умножением на λ. Кроме того, расстояние от одноточечного пространства Δ_1 до пространства X равно половине диаметра X. Таким образом, при $\lambda \to 0+$ все ограниченные пространства стягиваются в Δ_1. Ясно также, что умножение на λ переводит подкласс ограниченных пространств в себя. А что можно сказать про эту операцию для других облаков?

Оказывается, тут все намного интересней. Мы показываем, построив конкретный пример, что для элементов некоторых облаков умножение на λ может приводить к перескоку в другие облака. Иными словами, для положительного λ расстояние между метрическим пространством X и λX может оказаться бесконечным. Более того, если для некоторого λ пространство λX выскочило из облака, содержащего X, то при умножении на другое λ пространство λX может вернуться в исходное облако. Также существуют и такие X, которые никогда не возвращаются: при умножении на любое положительно $\lambda \neq 1$ пространство λX находится на бесконечном расстоянии от пространства X. Естественно, возникает задача разобраться, когда пространство выскакивает, когда — остается, когда возвращается, да и вообще, как устроены семейства тех или иных λ. В заключительной части работы мы приведем ряд результатов на эту тему на примере метрических пространств, являющихся подмножествами вещественной прямой.

Еще одним интересным объектом исследования в рамках рассматриваемой тематики являются пространства, которые остаются изометричными себе при умножении на любое положительное λ. Мы назвали такие пространства dil-инвариантными. Примером dil-инвариантного пространства может служить нормированное пространство $\mathbb{R}^n$, положительный ортант, букет dil-инвариантных пространств и т.д. Интересной задачей является описание dil-инвариантных пространств, а также тех, которые находятся от таких пространств на нулевом расстоянии.

Оказывается, если облако содержит dil-инвариантное пространство, то все облако стягивается к этому пространству (в случае $\mathbb{R}^n$ это было обнаружено Ильей Белаловым). Для облака, содержащего пространства, выскакивающие из облака при умножении на некоторое $\lambda > 0$, мы показываем, что и все остальные пространства из этого облака ведут себя таким же образом. Более точно, множество всех $\lambda > 0$, умножение на которые оставляют пространство в его облаке, одинаково для всех пространств этого облака.

Таким образом, в настоящей работе доказывается фундаментальный факт о полноте класса Громова–Хаусдорфа и ставится задача исследования облаков на предмет их "устойчивости" к умножению на положительные λ. Имеется много интересных вопросов: какими могут быть множества тех λ, которые сохраняют облако. Легко проверить, что эти множества являются мультипликативными группами. А любая ли мультипликативная группа может быть так реализована. Другой вопрос: какие облака устойчивы, а какие — нет? Например, как описать последовательности вещественных чисел, которые остаются в облаке? Ясно, что все арифметические прогрессии такие. А что можно сказать про возрастающие геометрические прогрессии? Мы приведем ряд результатов, описывающих нетривиальное поведение этих прогрессий.

Авторы благодарят коллектив семинара А.О.Иванова и А.А.Тужилина "Теория экстремальных сетей", а особенно соруководителя семинара Александра Иванова и участника Илью Белалова, за плодотворные обсуждения. Исследование выполнено в МГУ имени М.В.Ломоносова, при этом А.А.Тужилин был поддержан Российским научным фондом, проект 21-11-00355.

1 Основные определения и предварительные результаты

Как было отмечено во введении, мы будем изучать расстояние Громова–Хаусдорфа на собственном классе всех метрических пространств. Напомним соответствующие определения.

В теории множеств фон Неймана–Бернайса–Гёделя (NGB) все объекты называются *классами*. Классы бывают двух типов: множества, которые определяются как классы, являющиеся элементами других классов, и *собственные классы*, которые не являются элементами никаких других классов. На классах определены многие стандартные операции, скажем, декартово произведение, отображение и т.д. В частности, на каждом классе можно задать функцию расстояния. Мы будем пользоваться следующей терминологией:

- *функцией расстояния* или, короче, *расстоянием* на классе $\mathcal{A}$ будем называть произвольное отображение $\rho\colon \mathcal{A}\times\mathcal{A}\to[0,\infty]$, для которого всегда $\rho(x,x)=0$ и $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ (симметричность);

- если расстояние удовлетворяет неравенству треугольника, т.е. если всегда выполняется $\rho(x,z)\le\rho(x,y)+\rho(y,z)$, то ρ назовем *обобщенной псевдометрикой* (слово “обобщенный” отвечает возможности принимать значение ∞);

- если для обобщенной псевдометрики дополнительно выполняется условие положительной определенности, т.е. если всегда $\rho(x,y)=0$ влечет $x=y$, то такое ρ назовем *обобщенной метрикой*;

- наконец, если ρ не принимает значение ∞, то в приведенных выше определениях слово “обобщенный” будем опускать, а иногда, чтобы подчеркнуть отсутствие ∞, будем называть это расстояние *конечным*.

Как принято в метрической геометрии, вместо $\rho(x,y)$ будем почти всегда писать $|xy|$.

Как мы уже отмечали во введении, на собственном классе топологию определить нельзя, так как иначе собственный класс будет элементом этой топологии и, значит, множеством. Тем не менее, мы предложили модифицированную конструкцию, которую также назвали топологией, но уже определяемой и на собственных классах.

Пусть $\mathcal{A}$ — произвольный класс. Так как все его элементы — множества, для каждого из них определена мощность. Для каждого кардинального числа n рассмотрим подкласс $\mathcal{A}_n$, состоящий из всех элементов, чьи мощности не превосходят n. Тогда возникает естественная фильтрация: $\mathcal{A}_m\subset\mathcal{A}_n$ при $m\le n$. Эту фильтрацию будем называть *фильтрацией множествами*, если все $\mathcal{A}_n$ — множества. Для класса, который фильтруется множествами, определим *топологию* как отображение $\tau\colon n\mapsto\tau_n$, сопоставляющее каждому кардинальному числу топологию на $\mathcal{A}_n$ так, чтобы эти топологии были *согласованы*, т.е. если $m<n$, то топология τ_m является индуцированной из топологии τ_n. Фильтрующийся множествами класс с заданной на нем топологией будем называть *топологическим классом*.

Отметим, что если в качестве класса $\mathcal{A}$ взять множество мощности n и определить топологию $\tau\colon m\to\mathcal{A}_m$ как было описано выше, то топология τ_n на $\mathcal{A}_n=\mathcal{A}$ индуцирует топологию на всех $\mathcal{A}_m$, $m<n$, а на всех $\mathcal{A}_m$, $m>n$, совпадающих в этом случае с $\mathcal{A}$, топология τ_m будет совпадать с τ_n. Таким образом, в этом случае мы фактически имеем стандартную топологию на множестве $\mathcal{A}$ (все остальные топологии получаются стандартным образом из нее), так что наша конструкция может рассматриваться как обобщение понятия топологии на собственные классы.

Далее, если на классе, фильтрующемся множествами, задана обобщенная псевдометрика (или метрика), то она стандартным образом превращает этот класс в топологический. Соответствующую топологию будем называть *псевдометрической* (*метрической*).

Из аксиом NGB вытекает, что если X — множество, $\mathcal{A}$ — класс, а $f\colon X\to\mathcal{A}$ — отображение, то образ $f(\mathcal{A})$ является множеством, которое содержится в некотором подклассе $\mathcal{A}_n$. Таким образом, если в качестве X взять топологическое пространство, а в качестве $\mathcal{A}$ — топологический класс, то естественным образом определяется *непрерывность* отображения f, а именно, непрерывность означает, что непрерывно отображение $f\colon X\to\mathcal{A}_n$ для некоторого и, значит, для любого кардинала n, удовлетворяющего условию $f(X)\subset\mathcal{A}_n$.

Последнее позволяет ввести стандартным образом определение непрерывной кривой γ, а вместе с ним, в случае, когда топология порождается обобщенной псевдометрикой, понятие длины $|\gamma|$ кривой γ, внутренней псевдометрики, а также строго внутренней псевдометрики и геодезического класса. А именно, обобщенную псевдометрику на фильтрующемся множествами классе $\mathcal{A}$ будем называть *внутренней*, если для каждых $X,Y\in\mathcal{A}$, $|XY|<\infty$, и любого $\varepsilon>0$ существует непрерывная кривая γ, соединяющая X и Y, такая, что $|\gamma|<|XY|+\varepsilon$.

Напомним теперь необходимые нам определения из метрической геометрии, а именно, расстояния Хаусдорфа и Громова–Хаусдорфа.

1.1 Расстояние Хаусдорфа

Пусть X — произвольное метрическое пространство, $x \in X$, а $r > 0$ и $s \ge 0$ — вещественные числа. Через $U_r(x)$ и $B_s(x)$ будем обозначать соответственно *открытый* и *замкнутый шары* с центром в точке x и радиусами r и s. Если A и B — непустые подмножество X, то положим $|xA| = |Ax| = \inf\big\{|xa| : a \in A\big\}$ и $|AB| = |BA| = \inf\big\{|ab| : a \in A,\, b \in B\big\}$. Далее, определим *открытую r-окрестность множества* A, положив $U_r(A) = \big\{x \in X : |xA| < r\big\}$. Наконец, *расстоянием Хаусдорфа* между A и B называется величина

$$d_H(A,B) = \inf\big\{r : A \subset U_r(B) \ \&\ U_r(A) \supset B\big\}.$$

Расстояние Хаусдорфа является обобщенной псевдометрикой: оно может быть бесконечным, как в случае прямой $\mathbb{R}$ и любой ее точки, а также равняться нулю между разными подмножествами, например, между отрезком $[0,1]$ и интервалом $(0,1)$. Тем не менее, имеет место следующий классический результат.

Теорема 1.1 ([5])**.** *На множестве $\mathcal{H}(X)$, состоящем из всех непустых ограниченных замкнутых подмножеств метрического пространства X расстояние Хаусдорфа является метрикой. Причем X и $\mathcal{H}(X)$ одновременно обладают или нет следующими свойствами: полнотой, полной ограниченностью, компактностью, ограниченной компактностью.*

1.2 Расстояние Громова–Хаусдорфа

Обозначим $\mathcal{VGH}$ собственный класс, состоящий из всех непустых метрических пространств. На этом классе зададим функцию расстояния, которая называется *расстоянием Громова–Хаусдорфа*:

$$d_{GH}(X,Y) = \inf\big\{d_H(X',Y') : X',Y' \subset Z \in \mathcal{VGH},\ X' \approx X,\ Y' \approx Y\big\},$$

где для метрических пространств U и V выражение $U \approx V$ обозначает, что эти пространства изометричны.

Следующая теорема хорошо известна.

Теорема 1.2 ([5])**.** *Расстояние Громова–Хаусдорфа является обобщенной псевдометрикой, равной нулю на каждой паре изометричных пространств.*

Эта теорема позволяет исследовать расстояние Громова–Хаусдорфа на "менее диком" собственном классе $\mathcal{GH}$, состоящем из представителей классов изометрии всех метрических пространств, по одному из каждого класса изометрии. Это похоже на рассмотрение всех множеств с точностью до биекции, то есть рассмотрение собственного класса всех кардинальных чисел.

Теорема 1.3 ([7])**.** *Собственный класс $\mathcal{GH}$ фильтруется множествами, так что расстояние Громова–Хаусдорфа превращает его в топологический класс. Более того, расстояние Громова–Хаусдорфа является внутренней обобщенной псевдометрикой на $\mathcal{GH}$.*

Описанный в теореме 1.3 топологический класс $\mathcal{GH}$ будем называть *классом Громова–Хаусдорфа*. Важным подклассом в $\mathcal{GH}$ является собственный класс, состоящий из всех ограниченных метрических пространств, т.е. пространств X, у которых диаметр $\operatorname{diam} X$ конечен. Этот класс будем обозначать $\mathcal{B}$.

Приведем ряд простейших свойств класса $\mathcal{GH}$. Через $\Delta_1 \in \mathcal{GH}$ мы обозначим одноточечное метрическое пространство. Также для пространства $X \in \mathcal{GH}$ и вещественного числа $\lambda > 0$ через λX обозначим метрическое пространство, которое получается из X умножением всех его расстояний на λ. Если же $\lambda = 0$ и $\operatorname{diam} X < \infty$, то положим $\lambda X = \Delta_1$. Преобразование $H_\lambda\colon \mathcal{GH} \to \mathcal{GH}$, $H_\lambda\colon X \mapsto \lambda X$ при $\lambda > 0$ будем называть *подобием с коэффициентом λ*.

Теорема 1.4 ([5])**.** *Для любых $X, Y \in \mathcal{GH}$ выполняется*

(1) $2d_{GH}(\Delta_1, X) = \operatorname{diam} X$;

(2) $2d_{GH}(X,Y) \le \max\{\operatorname{diam} X, \operatorname{diam} Y\}$;

(3) *если диаметр X или Y конечен, то* $\big|\operatorname{diam} X - \operatorname{diam} Y\big| \le 2d_{GH}(X,Y)$.

(4) *если диаметр X конечен, то для любых $\lambda \ge 0$, $\mu \ge 0$ имеем $d_{GH}(\lambda X, \mu X) = \frac{1}{2}|\lambda - \mu| \operatorname{diam} X$, откуда мгновенно вытекает, что кривая $\gamma(t) := t\,X$ является кратчайшей между любыми своими точками, причем длина такого отрезка кривой равна расстоянию между его концами*;

(5) *для любого $\lambda \ge 0$ имеем $d_{GH}(\lambda X, \lambda Y) = \lambda\, d_{GH}(X, Y)$. Заметим, что единственным пространством $X \in \mathcal{B}$, для которого λX изометрично X при всех $\lambda > 0$, является одноточечное пространство Δ_1. Таким образом, преобразование подобия H_λ является гомотетией пространства $\mathcal{B}$ с центром в одноточечном метрическом пространстве.*

На рис. 1 изображена схема класса Громова–Хаусдорфа.

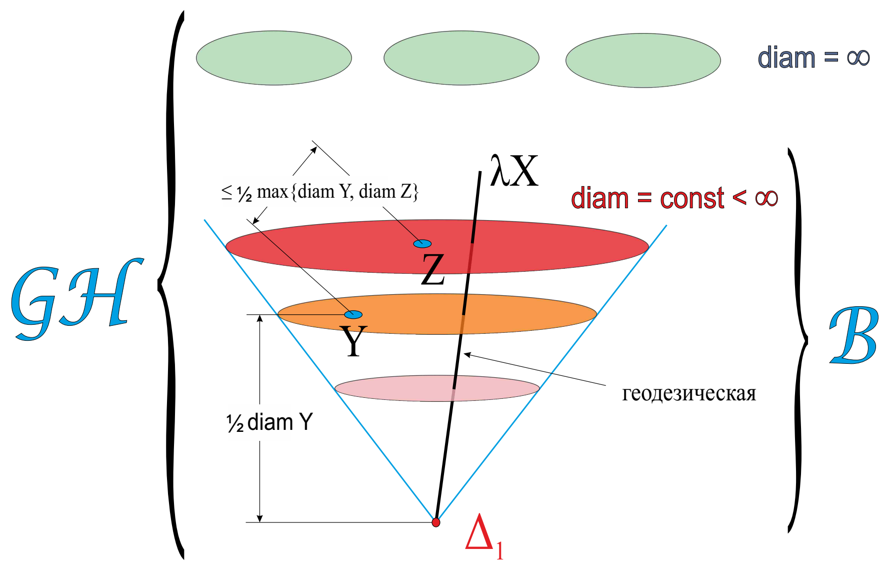

Рис. 1: Класс Громова–Хаусдорфа, общий вид.

Рассмотрим на $\mathcal{GH}$ отношение $\sim_1$: скажем, что $X, Y \in \mathcal{GH}$ находятся в этом отношении, если и только если $d_{GH}(X, Y) < \infty$. Легко видеть, что $\sim_1$ является эквивалентностью. Классы эквивалентности этого отношения назовем *облаками*. Ясно, что расстояние Громова–Хаусдорфа между точками одного облака конечно, а между точками разных облаков — бесконечно. Тем самым, ограничение расстояния Громова–Хаусдорфа на облако является (конечной) псевдометрикой.

2 Полнота класса Громова–Хаусдорфа

Цель этого подраздела — доказать одно фундаментальное свойство класса Громова–Хаусдорфа.

Теорема 2.1. *Класс Громова–Хаусдорфа является полным. В частности, полными являются все облака.*

Доказательство. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — фундаментальная последовательность. Без ограничения общности, будем считать, что $2d_{GH}(X_n, X_{n+1}) \le 1/2^n$. Для каждого n выберем соответствие $R_n \in \mathcal{R}(X_n, X_{n=1})$ такое, что $\operatorname{dis} R_n < 1/2^n$. Положим $\bar{X} = \sqcup_{n=1}^{\infty}$ и для каждого $x_1 \in X_1$ последовательность $x_1, x_2 \in \bar{X}$ назовем ***нитью с началом в*** x_1, если для каждого $n \ge 1$ выполняется $x_{n+1} \in R_n(x_n)$. Множество всех таких нитей обозначим $N(\bar{X})$. Для нитей $\nu = (x_1, x_2, \ldots)$ и $\nu' = (x_1', x_2', \ldots)$ рассмотрим последовательность чисел $|x_1x_1'|, |x_2x_2'|, \ldots$. Так как $\operatorname{dis} R_n < 1/2^n$, то $\big||x_nx_n'| - |x_{n+1}x_{n+1}'|\big| < 1/2^n$, откуда для любого $m \ge 1$ имеем

$$\big||x_nx_n'| - |x_{n+m}x_{n+m}'|\big| = \big||x_nx_n'| - |x_{n+1}x_{n+1}'| + |x_{n+1}x_{n+1}'| - \cdots - |x_{n+m}x_{n+m}'|\big|$$
$$\le \sum_{k=1}^{m} \big||x_{n+k-1}x_{n+k-1}'| - |x_{n+k}x_{n+k}'|\big| < \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^{n+k-1}} < \frac{1}{2^{n-1}},$$

поэтому последовательность чисел $|x_1x_1'|, |x_2x_2'|, \ldots$ фундаментальна и, значит, существует предел, который мы обозначим $|\nu\nu'|$. Ясно, что эти пределы задают на $N(\bar{X})$ функцию расстояния. Так как для любых трех нитей $\nu = (x_1, x_2, \ldots)$, $\nu' = (x_1', x_2', \ldots)$ и $\nu'' = (x_1'', x_2'', \ldots)$ при каждом n на расстояние между точками x_n, x_n', x_n'' выполняются неравенства треугольника, то же самое верно и для введенного расстояния на ν, ν' и ν''. Таким образом, мы определили на $N(\bar{X})$ псевдометрику. Профакторизовав полученное псевдометрическое пространство по отношению эквивалентности, заданному нулевыми расстояниями, мы получим метрическое пространство, которое обозначим X. Для нити $\nu \in N(\bar{X})$ класс этой эквивалентности, содержащий ν, обозначим $[\nu]$.

Для каждого n рассмотрим отношение $R_n' \subset X \times X_n$, заданное так: для каждого x рассмотрим все нити $\nu = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in x$ и отнесем к R_n' все (x, x_n). Так как каждый x_n входит в некоторую нить, то $R' \in \mathcal{R}(X, X_n)$. Оценим искажение соответствия R'. Выбираем произвольные $x, x' \in X$, нити $\nu = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in x$ и $\nu' = (x_1', x_2', \ldots, x_n', \ldots) \in x'$, тогда $|\nu\nu'| = \lim_{k\to\infty} |x_k x_k'|$, и как было показано выше, $\big||x_n x_n'| - |x_{n+m} x_{n+m}'|\big| < 1/2^{n-1}$, откуда $\big||x_n x_n'| - |\nu\nu'|\big| \le 1/2^{n-1}$. Таким образом, $\operatorname{dis} R' \le 1/2^{n-1}$, так что $X_n \xrightarrow{\mathcal{GH}} X$. □

3 Облака: стягиваемые и дождевые

Начиная с этого раздела, мы будем изучать, как преобразование подобия меняет расстояние Громова–Хаусдорфа, в частности, остается ли метрическое пространство в облаке, или перескакивает в другое.

Следствие 3.1. *Предположим, что в облаке $\mathcal{C}$ существует $X \in \mathcal{C}$ такой, что при некотором $0 < \lambda < 1$ выполняется $\lambda X \in \mathcal{C}$. Тогда отображение $H_\lambda\colon \mathcal{GH} \to \mathcal{GH}$, $H_\lambda\colon Y \mapsto \lambda Y$, переводит облако $\mathcal{C}$ в себя, и его ограничение на $\mathcal{C}$ — сжимающее отображение. Таким образом, для любых $X, Y \in \mathcal{C}$ существуют пределы $X' = \lim_{n\to\infty} H_\lambda^n(X)$, $Y' = \lim_{n\to\infty} H_\lambda^n(Y)$, причем $d_{GH}(X', Y') = 0$.*

Доказательство. Для любого $Y \in \mathcal{C}$ выполняется $d_{GH}(\lambda X, \lambda Y) = \lambda d_{GH}(X, Y) < \infty$, поэтому $\lambda Y \in \mathcal{C}$, и отображение H_λ — сжимающее. Так как класс $\mathcal{GH}$ — полный в силу теоремы 2.1, то все последовательности $H_\lambda^n(Z)$ сходятся при $n \to \infty$, причем все их пределы находятся на нулевом расстоянии друг относительно друга (теорема о единственности предела сжимающего отображения в случае псевдометрического пространства). □

Для X из облака $\mathcal{C}$ обозначим Λ_X множество всех $\lambda > 0$, для которых $\lambda X \in \mathcal{C}$. Из равенства $d_{GH}(\lambda X, \lambda Y) = \lambda d_{GH}(X, Y)$ мгновенно вытекает следующий результат.

Предложение 3.2. *Множество Λ_X не зависит от выбора $X \in \mathcal{C}$.*

Предложение 3.2 позволяет дать следующее определение: для облака $\mathcal{C}$ положим $\Lambda_{\mathcal{C}} = \Lambda_X$ для произвольного $X \in \mathcal{C}$ и назовем его *стабилизатором облака $\mathcal{C}$*.

Замечание 3.3. Легко видеть, что стабилизатор $\Lambda_{\mathcal{C}}$ облака $\mathcal{C}$ является подгруппой в мультипликативной группе положительных вещественных чисел. Кроме того, пример 4.3 (см. ниже) показывает, что $\Lambda_{\mathcal{C}}$ не уважает аддитивную структуру: сумма элементов из $\Lambda_{\mathcal{C}}$ может не лежать в $\Lambda_{\mathcal{C}}$.

Пример 3.4. Пусть $\mathcal{C}$ — облако, содержащее $\mathbb{R}^n$. Тогда для любого $\lambda > 0$ пространства $\lambda\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^n$ изометричны. Отсюда вытекает, что для любого $X \in \mathcal{C}$ и каждого $\lambda > 0$ выполняется $d_{GH}(\lambda X, \mathbb{R}^n) = \lambda\, d_{GH}(X, \mathbb{R}^n)$, поэтому $\lambda X \xrightarrow{\mathcal{GH}} \mathbb{R}^n$ при $\lambda \to 0+$. В частности, $\Lambda_{\mathcal{C}} = (0, \infty)$.

Этот пример был впервые рассмотрен Ильей Белаловым.

Определение 3.5. Метрическое пространство X назовем dil-*инвариантным*, если при всех $\lambda > 0$ пространства X и λX изометричны. Иными словами, dil-инвариантность означает, что все подобия метрического пространства содержатся в группе изометрий $\operatorname{Iso}(X)$ этого пространства.

Задача 3.6. Описать все dil-инвариантные метрические пространства.

Определение 3.7. Если в облаке $\mathcal{C}$ существует Z такой, что для всех $X \in \mathcal{C}$ выполняется $\lambda X \xrightarrow{\mathcal{GH}} Z$ при $\lambda \to 0+$, то такое облако назовем *стягиваемым*.

Аналогично примеру 3.4 доказывается следующий результат.

Следствие 3.8. *Каждое облако $\mathcal{C}$, содержащее* dil-*инвариантное пространство, стягиваемо. В частности, для него выполняется $\Lambda_{\mathcal{C}} = (0, \infty)$.*

Определение dil-инвариантного пространства можно обобщить.

Определение 3.9. Будем говорить, что метрическое пространство X — *обобщенное* dil-*инвариантное*, если для любого $\lambda>0$ выполняется $\partial_{GH}(X,\lambda X)=0$.

Следствие 3.10. *Каждое облако $\mathcal{C}$, содержащее обобщенное* dil-*инвариантное пространство, стягиваемо. В частности, для него выполняется $\Lambda_{\mathcal{C}}=(0,\infty)$.*

Задача 3.11. Верно ли, что если для облака $\mathcal{C}$ выполняется $\Lambda_{\mathcal{C}}=(0,\infty)$, то оно — стягиваемо?

Определение 3.12. Для $A\subset(0,\infty)$ будем говорить, что назовем метрическое пространство X является A-*инвариантным*, если для всех $\lambda\in A$ выполняется $d_{GH}(X,\lambda X)=0$.

Следствие 3.13. *Пусть $\lambda\in(0,1)$ и $A=\{\lambda^r: r\ge 0,\ r\in\mathbb{Q}\}$. Предположим, что для некоторого облака $\mathcal{C}$ и $X\in\mathcal{C}$ при всех $\lambda^r\in A$ пространства $\lambda^r X$ содержатся в $\mathcal{C}$. Пусть Z — предельное пространство для фундаментальной последовательности $X_n=H^n_\lambda(X)$. Тогда и при всех $\lambda^r\in A$ пространство Z является предельным для фундаментальной последовательности $Y_n=H^n_{\lambda^r}(X)=H_{\lambda^{rn}}(X)$. Более того, Z является A-инвариантным.*

Доказательство. Последовательность чисел λ^{rn} содержит подпоследовательность λ^{n_i}, $n_i\in\mathbb{N}$. Действительно, если $r=p/q$, $p,q\in\mathbb{Z}$, $p\ge 0$, $q>0$, то при $n=qi$ получаем $\lambda^{rn}=\lambda_{pi}$. Остается положить $n_i=pi$. Таким образом, $d_{GH}(Y_{n_i},Z)\to 0$ при $i\to\infty$, откуда, в силу фундаментальности последовательности Y_n, имеем $Y_n\xrightarrow{\mathcal{GH}}Z$.

С другой стороны, для каждого $r\in A$ последовательность λ^{rn} содержит подпоследовательность $\lambda^{n_i}\lambda^r$, $n_i\in\mathbb{N}$. Действительно, снова положив $r=p/q$ и выбрав n вида $1+qi$, получим $\lambda^{rn}=\lambda^{r+pi}=\lambda^{pi}\lambda^r$. Осталось положить $n_i=pi$. Таким образом, Z является пределом последовательности $H^{n_i}_\lambda(\lambda^r X)$. Но пределом этой же последовательности является также $\lambda^r Z$. Из “единственности предела” вытекает, что $d_{GH}(Z,\lambda^r Z)=0$. Доказательство закончено. $\square$

Определение 3.14. Если $\Lambda_{\mathcal{C}}\ne(0,\infty)$, то назовем облако *дождевым*, а каждый его элемент — *каплей*.

4 Дождевые облака

Покажем, что дождевые облака существуют, построив серию примеров монотонно возрастающих последовательностей вещественных чисел, которые, с индуцированной метрикой из вещественной прямой, являются каплями в соответствующих им облаках. Начнем с нескольких общих результатов.

Лемма 4.1. *Пусть $X,Y\in\mathcal{GH}$ — неограниченные пространства, для которых существует $R\in\mathcal{R}(X,Y)$, $\operatorname{dis}R<\infty$. Тогда для каждого $x_0\in X$, $y_0\in Y$ и $r>0$ существует $(x,y)\in R$ такое, что $x\in X\setminus U_r(x_0)$ и $y\in Y\setminus U_r(y_0)$.*

Доказательство. Предположим противное, тогда для некоторых $x_0\in X$ и $y_0\in Y$ существует $r>0$ такое, что если $(x,y)\in R$, то $\min\bigl\{|x_0x|,|y_0y|\bigr\}<r$. Так как пространство Y неограниченное, то существует последовательность $y_k\in Y$ такая, что $|y_0y_k|\to\infty$ при $k\to\infty$. Так как R — соответствие, то для каждого k существует x_k такое, что $(x_k,y_k)\in R$. Но тогда, при всех достаточно больших k, имеем $|x_0x_k|<r$. Следовательно, выбрав такое k, получим

$$\operatorname{dis}R\ge\sup_l\bigl||x_kx_l|-|y_ky_l|\bigr|=\infty,$$

противоречие. $\square$

Теорема 4.2. *Предположим, что для неограниченных пространств $X,Y\in\mathcal{GH}$ выполняется следующее условие: существуют $x_0\in X$ и $y_0\in Y$, для которых*

$$\Delta(r)=\inf\Bigl\{\bigl||xx'|-|yy'|\bigr|: x,x'\in X\setminus U_r(x_0),\ y,y'\in Y\setminus U_r(y_0),\ x\ne x',y\ne y'\Bigr\}\to\infty$$

при $r\to\infty$. Тогда для каждого соответствия $R\in\mathcal{R}$ выполняется $\operatorname{dis}R=\infty$, т.е. $d_{GH}(X,Y)=\infty$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. $\operatorname{dis}R<\infty$. Тогда, по лемме 4.1, для каждого $r>0$ существует $(x,y)\in R$ такое, что $|x_0x|\ge r$ и $|y_0y|\ge r$. Пусть $r'>r$ таково, что $r'>\max\bigl\{|x_0x|,|y_0y|\bigr\}$, тогда соответствующая r' пара $(x',y')\in R$ удовлетворяет $x\ne x'$ и $y\ne y'$. Но тогда

$$\operatorname{dis}R\ge\bigl||xx'|-|yy'|\bigr|\ge\Delta(r),$$

и так как r можно выбрать сколь угодно большим, получаем $\operatorname{dis}R=\infty$, противоречие. $\square$

Пример 4.3. Пусть p — простое число большее 2 и $X = \{x_1 = p,\, x_2 = p^2,\, x_3 = p^3, \ldots\}$. Положим $Y = 2X$ и реализуем его как последовательность $y_i = 2x_i$. Покажем, что $d_{GH}(X, Y) = \infty$, так что X является каплей в содержащем его дождевом облаке $\mathcal{C}$. Для этого мы воспользуемся теоремой 4.2, показав, что $\Delta(r) \to \infty$ при $r \to \infty$.

Выберем произвольные $x, x' \in X$, $x \neq x'$, и $y, y' \in Y$, $y \neq y'$, так, чтобы выполнялось

$$\min\bigl\{|x_1x|,\, |x_1x'|,\, |y_1y|,\, |y_1y'|\bigr\} \geq r.$$

Тогда для некоторых натуральных m, l, n, k имеем $|xx'| = p^m - p^l$, $|yy'| = 2(p^n - p^k)$. Так как $x \neq x'$ и $y \neq y'$, то $m > l$ и $n > k$.

Положим $s = \min\{m, l, n, k\}$, тогда условие $r \to \infty$ равносильно $s \to \infty$. Далее, пусть

$$\delta = p^m - p^l - 2p^n + 2p^k = p^s z.$$

Покажем, что $z \neq 0$, откуда и будет вытекать требуемое, так как s можно выбрать сколь угодно большим, а $|z| \geq 1$, значит $|\delta| \to \infty$ при $s \to \infty$ и, соответственно, $\Delta(r) \to \infty$ при $r \to \infty$ в силу произвольности выбора x, x', y, y'.

Пусть $z = 0$, тогда $\Delta = 0$, т.е. $p^l(p^{m-l} - 1) = 2p^k(p^{n-k} - 1)$. Так как $m - l > 0$ и $n - k > 0$, имеем $l = k$, откуда вытекает равенство $2p^{n-k} - p^{m-l} = 1$. Так как $n - k > 0$ и $m - l > 0$, левая часть этого равенства кратна p, противоречие.

Замечание 4.4. Отметим, что если в конструкции из примера 4.3 умножить пространство X на p, то пространство останется в облаке, так как $d_{GH}(X, pX) < \infty$. Тем самым, неверно, что из существования метрического пространства, “выпрыгивающего” из облака при некотором λ, вытекает, что и при всех $\lambda > 0$, отличных от 1, пространство λX также не лежит в облаке.

5 Пример изучения структуры стабилизатора облака

Пусть $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ — это такая монотонно возрастающая функция натурального аргумента, что $\varphi(n) \geq n$. Для действительного числа $q > 1$ рассмотрим на числовой прямой $\mathbb{R}$ подмножество

$$X_\varphi = \{x_n = q^{\varphi(n)} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R} \tag{1}$$

с естественной метрикой, индуцированной из $\mathbb{R}$. Облако, в которое входит пространство X_φ, мы будем обозначать этим же символом.

В случае функции $\varphi(n) = n$ пространство X_φ будем обозначать через X_q. Напомним, что через $H_\lambda\colon \mathcal{GH} \to \mathcal{GH}$, $\lambda > 0$, мы обозначили отображение подобия $H_\lambda\colon X \mapsto \lambda X$. Иногда под пространством X_q мы будем понимать пространство $\{x_n = q^n : n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$, которое определяет то же самое облако, но инвариантно при гомотетии H_q.

Следствие 5.1. *Если $q \in \mathbb{N}$ и $\lambda \in \Lambda_{X_\varphi} \cap \mathbb{Q}$, то для любого M существуют такие $n > k > M$ и $m > l > M$, что*

$$\lambda = \frac{q^{\varphi(n)} - q^{\varphi(k)}}{q^{\varphi(m)} - q^{\varphi(l)}}. \tag{2}$$

Доказательство. Покажем, что в противном случае $d_{GH}(X, \lambda X) = \infty$. Для этого мы воспользуемся теоремой 4.2, показав, что $\Delta(r) \to \infty$ при $r \to \infty$.

Пусть $\lambda = a_2/a_1$ для некоторых взаимно простых натуральных чисел a_1 и a_2. Выберем произвольные $x, x' \in X$, $x \neq x'$, и $y, y' \in Y$, $y \neq y'$, так, чтобы выполнялось

$$\min\bigl\{|x_1x|,\, |x_1x'|,\, |y_1y|,\, |y_1y'|\bigr\} \geq r.$$

Тогда для некоторых натуральных n, k, m, l имеем $|xx'| = q^{\varphi(n)} - q^{\varphi(k)}$, $|yy'| = \lambda(q^{\varphi(m)} - q^{\varphi(l)})$. Так как $x \neq x'$ и $y \neq y'$, то $n > k$ и $m > l$.

Положим $s = \min\{n, k, m, l\}$, тогда условие $r \to \infty$ равносильно $s \to \infty$. Далее, пусть

$$\delta = q^{\varphi(n)} - q^{\varphi(k)} - \lambda(q^{\varphi(m)} - q^{\varphi(l)}) = q^{\varphi(s)} z.$$

Предположим, что $z \neq 0$. Так как $s > M$ можно выбрать сколь угодно большим, а число $a_1 z$ — целое, то $|a_1 z| \geq 1$. Тогда $|\delta| \to \infty$ при $s \to \infty$ (так как число a_1 фиксировано) и, соответственно, $\Delta(r) \to \infty$ при $r \to \infty$ в силу произвольности выбора $x, x'y, y'$.

Значит $z = 0$, т.е. число λ имеет требуемый вид. □

Теорема 5.2. *Для рационального $\lambda > 0$ и целого $q \geq 2$, отображение H_λ оставляет пространство $X_q = \{q^n : n \in \mathbb{Z}\}$ в том же облаке, т.е. $\lambda \in \Lambda_{X_q} \cap \mathbb{Q}$, если и только если $\lambda = q^\alpha$ для некоторого целого α.*

Доказательство разобьем на несколько элементарных шагов, некоторые из которых несомненно хорошо известны и обсуждаются здесь для полноты и связности изложения.

Для заданных натуральных n, m и целого $q \geq 2$ опишем все решения уравнения

$$a_1(q^n - 1) = a_2(q^m - 1) \tag{3}$$

в целых положительных взаимно простых числах a_1, a_2.

Предложение 5.3. *Для всякого натурального $q \geq 2$ имеет место равенство*

$$\gcd(q^n - 1, q^m - 1) = q^{\gcd(n,m)} - 1. \tag{4}$$

Доказательство. Проведем индукцию по числу $\max(n, m)$. Если $n = m$, то равенство (4) очевидно. Если же $n > m$, то индуктивный переход дает цепочка равенств

$$\begin{aligned} \gcd(q^n - 1, q^m - 1) &= \gcd(q^n - 1 - q^{n-m}(q^m - 1), q^m - 1) = \\ &= \gcd(q^{n-m} - 1, q^m - 1) = q^{\gcd(n-m,m)} - 1 = q^{\gcd(n,m)} - 1. \end{aligned} \tag{5}$$

□

Следствие 5.4. *Если натуральные числа n и m взаимно просты, то для всякого натурального $q \geq 2$ числа*

$$q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q + 1 \text{ и } q^{m-1} + q^{m-2} + \ldots + q + 1 \tag{6}$$

также взаимно просты.

Теорема 5.5. *Для заданных натуральных n, m и целого $q \geq 2$ натуральные взаимно простые числа a_1, a_2 являются решением уравнения* (3) *тогда и только тогда, когда*

$$\begin{cases} a_1 = q^{(r_m-1)d} + q^{(r_m-2)d} + \ldots + q^d + 1, \\ a_2 = q^{(r_n-1)d} + q^{(r_n-2)d} + \ldots + q^d + 1, \end{cases} \tag{7}$$

где $d = \gcd(n, m)$, $r_n = n/d$ и $r_m = m/d$.

Доказательство. В известное равенство

$$x^r - 1 = (x - 1)(x^{r-1} + \ldots + x + 1)$$

при $r = n/d$ и $r = m/d$ подставим $x = q^d$. Таким образом, согласно (4), уравнение (3) переписывается в виде

$$a_1(q^{(r_n-1)d} + q^{(r_n-2)d} + \ldots + q^d + 1) = a_2(q^{(r_m-1)d} + q^{(r_m-2)d} + \ldots + q^d + 1). \tag{8}$$

Из следствия 5.4 и условия $\gcd(a_1, a_2) = 1$ вытекают требуемые равенства. □

Предложение 5.6. *Для рационального числа $\lambda > 0$ и целого $q \geq 2$, если преобразование подобия H_λ оставляет пространство $X_q = \{q^n : n \in \mathbb{Z}\}$ в том же облаке, т.е. если $\lambda \in \Lambda_{X_q} \cap \mathbb{Q}$, то*

$$\lambda = q^\alpha \frac{1 + q^d + \ldots + q^{(r_2-2)d} + q^{(r_2-1)d}}{1 + q^d + \ldots + q^{(r_1-2)d} + q^{(r_1-1)d}} = q^\alpha \frac{q^{r_2 d} - 1}{q^{r_1 d} - 1} \tag{9}$$

для некоторого целого α, натурального d и взаимно простых натуральных чисел r_1 и r_2.

Доказательство. Согласно следствию 5.1 существуют такие $n > k$ и $m > l$, что $\lambda = \frac{q^n - q^k}{q^m - q^l} = q^{k-l} \frac{q^{n-k}-1}{q^{m-l}-1}$. □

Предложение 5.7. *Если квадрат числа* $\lambda = \frac{q^n-1}{q^m-1}$ *выглядит как правая часть уравнения* (9), *то* $\lambda = 1$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $n > m$. Предположим, что существуют такие натуральные k и l (тогда $k > l$), что

$$\lambda^2 = \frac{(q^n-1)^2}{(q^m-1)^2} = \frac{q^k-1}{q^l-1}.$$

Тогда

$$(q^n-1)^2(q^l-1) = (q^m-1)^2(q^k-1),$$

т.е.

$$q^{2n+l} - 2q^{n+l} + q^l - q^{2n} + 2q^n - 1 = q^{2m+k} - 2q^{m+k} + q^k - q^{2m} + 2q^m - 1.$$

Из соображений делимости на число q следует, что $m = l$. После сокращения получается условие

$$q^{2n} - 2q^n + 1 - q^{2n-m} + 2q^{n-m} = q^{m+k} - 2q^k + q^{k-l} - q^m + 2$$

В предположениях $n > m$ и $k > l$ получается, что 1 должна делиться q. □

Доказательство теоремы 5.2. Согласно предложению 5.6 все рациональные числа в стабилизаторе имеют вид (9). Так как стабилизатор является мультипликативной группой, то квадрат всякого числа из стабилизатора имеет вид (9). Из предложения 5.7 вытекает, что λ имеет требуемый вид. □

Теорема 5.8. *Если функция* $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *такова, что* $\varphi(n+1) - \varphi(n) \to \infty$ *при* $n \to \infty$, *то для любых вещественных чисел* $q > 1$ *и* $\lambda > 0$, *преобразование подобия* H_λ *оставляет пространство* $X_\varphi = \{q^{\varphi(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ *в том же облаке, если и только если* $\lambda = 1$.

Доказательство. Пусть $\lambda \neq 1$. Предположим пока, что число q целое, а число λ рациональное. Согласно следствию 5.1 существуют такие $n > k > M$ и $m > l > M$, что $\lambda = \frac{q^{\varphi(n)} - q^{\varphi(k)}}{q^{\varphi(m)} - q^{\varphi(l)}}$.

Если $n = m$, то

$$\lambda = \frac{1 - q^{\varphi(k)-\varphi(n)}}{1 - q^{\varphi(l)-\varphi(m)}} \xrightarrow{M\to\infty} 1.$$

При достаточно большом M возникает противоречие с предположением $\lambda \neq 1$.

Если $n < m$, то

$$\lambda = \frac{1 - q^{\varphi(k)-\varphi(n)}}{q^{\varphi(m)-\varphi(n)} - q^{\varphi(l)-\varphi(n)}} \xrightarrow{M\to\infty} 0.$$

При достаточно большом M возникает противоречие с предположением $\lambda > 0$.

Если $n > m$, то

$$\lambda = \frac{q^{\varphi(n)-\varphi(m)} - q^{\varphi(k)-\varphi(m)}}{1 - q^{\varphi(l)-\varphi(m)}} \xrightarrow{M\to\infty} \infty.$$

При достаточно большом M возникает противоречие с предположением $\lambda < \infty$.

В случае произвольных чисел $q > 1$ и $\lambda > 0$ необходимо вернуться в доказательство следствия 5.1. Итак, покажем, что при $n > k > M$, $m > l > M$ и $\lambda \neq 1$ искажение стремится к бесконечности. Здесь опять надо рассмотреть три случая. Если $n = m$, то

$$\delta = q^{\varphi(n)} - q^{\varphi(k)} - \lambda(q^{\varphi(m)} - q^{\varphi(l)}) = (1-\lambda)q^{\varphi(n)}\big(1 - \frac{1}{1-\lambda}q^{\varphi(k)-\varphi(n)} + \frac{\lambda}{1-\lambda}q^{\varphi(l)-\varphi(n)}\big) \to \pm\infty.$$

Случаи $n < m$ и $n > m$ разбираются аналогично. □

Следствие 5.9. *Если* $\varphi(n) = n^2$, *то для любых вещественных чисел* $q > 1$ *и* $\lambda > 0$, *преобразование подобия* H_λ *оставляет пространство* $X_\varphi = \{q^{n^2} : n \in \mathbb{N}\}$ *в том же облаке, если и только если* $\lambda = 1$.

Список литературы

[1] Мендельсон Э. *Введение в математическую логику.* М., Наука, 1984.

[2] Edwards D. *The Structure of Superspace. In: Studies in Topology*, ed. by Stavrakas N.M. and Allen K.R., New York, London, San Francisco, Academic Press, Inc., 1975.

[3] Gromov M. *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, edited by Lafontaine and Pierre Pansu, 1981.

[4] Gromov M. *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Birkhдuser (1999). ISBN 0-8176-3898-9 (translation with additional content).

[5] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. *Курс метрической геометрии.* Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

[6] Herron D.A. *Gromov–Hausdorff Distance for Pointed Metric Spaces*, J. Anal., 2016, v. 24, N 1, pp 1–38.

[7] Borzov S.I., Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Extendability of Metric Segments in Gromov-Hausdorff Distance.* 2020, ArXiv e-prints, arXiv:2009.00458.

[8] `http://dfgm.math.msu.su/files/0students/2021-dip-Borisova.pdf`

[9] Ivanov A.O., Nikolaeva N.K., Tuzhilin A.A. *The Gromov-Hausdorff Metric on the Space of Compact Metric Spaces is Strictly Intrinsic.* ArXiv e-prints, arXiv:1504.03830, 2015.

[10] Chowdhury S., Memoli F. *Constructing Geodesics on the Space of Compact Metric Spaces.* ArXiv e-prints, arXiv:1603.02385, 2016.

[11] Ivanov A.O., Iliadis S., Tuzhilin A.A. *Realizations of Gromov-Hausdorff Distance.* ArXiv e-prints, arXiv:1603.08850, 2016.