

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТОПОЛОГИЯ С ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ

спецкурс проф. А. Б. Скопенкова для 2-4 курсов

(полугодовой с возможным продолжением)

по вторникам с 14.02.2012, 16.45-18.20

сбор у кафедры дифф. геометрии 16-19

Аннотация.

Будут изучаться важнейшие наглядные объекты математики: графы, двумерные полиэдры, маломерные многообразия и векторные поля на них. Основное содержание курса — демонстрация алгебраических идей теории препятствий на примере решения проблем о существовании и классификации утолщений и векторных полей. Эти идеи развивают идею инварианта из "школьной" математики. Венец спецкурса — простое доказательство знаменитой теоремы Штифеля о параллелизуемости любого ориентируемого трехмерного многообразия.

Для изучения спецкурса необходимы начальные сведения о двумерных многообразиях и векторных полях (в объеме соответствующих разделов одной из книг 'Наглядная топология' В. В. Прасолова, <http://www.mccme.ru/prasolov>, или В. Г. Болтянского и В. А. Ефремовича, <http://www.mccme.ru/free-books/djvu/geometry/boltiansky-nagl-topo.htm>). Определение двумерных полиэдров и трехмерных многообразий будет дано. Определение групп гомологий естественно появится при решении указанных интересных задач и потому его не обязательно знать заранее. В то же время для тех, кто уже изучал алгебраическую топологию, ее применение к конкретным задачам обычно оказывается нетривиальным и интересным.

Основная часть материала будет изучаться в виде решения задач участниками (с подробными указаниями и последующим разбором на занятии). Будут предложены красивые задачи для исследования.

Примерная ПРОГРАММА

1. Ориентируемость двумерных многообразий: гомологии и первый класс Штифеля-Уитни.
2. Форма пересечений. Алгоритм распознавания рода графа (использующий пересечения кривых на поверхности).
3. Утолщения графов. Планарность и род двумерных утолщений.
4. Классификация утолщений графов и первый класс Штифеля-Уитни.
5. Определение двумерных полиэдров и трехмерных многообразий. Утолщения двумерных полиэдров. Ложные поверхности. Критерии трехмерной утолщаемости ложных поверхностей. Классификация утолщений двумерных полиэдров.
6. Классификация ненулевых касательных векторных полей на подмножествах плоскости и двумерных многообразий.
7. Критерий Эйлера-Пуанкаре существования ненулевого касательного векторного поля на двумерном многообразии.
- 8.* Нормальные векторные поля. Класс Эйлера. Существование ненулевого нормального векторного поля на гладкой сфере с ручками в \mathbb{R}^4 .
9. Теорема Хопфа о существовании ненулевого касательного векторного поля на любом 3-многообразии. Критерий Хопфа существования ненулевого касательного векторного поля для многомерных многообразий.
- 10.* Нормальные векторные поля для многообразий размерности 3 и выше.
11. Существование ортонормированных систем векторных полей. Характеристические классы для трехмерных многообразий.
12. Простое доказательство теоремы Штифеля о параллелизуемости любого ориентируемого трехмерного многообразия.

Литература: главы 2 и 3 из книги А. Скопенков, Алгебраическая топология с элементарной точки зрения, Москва, МЦНМО, в печати, <http://www.mccme.ru/circles/oim/obstruct.pdf>.