АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТОПОЛОГИЯ С ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ

Спецкурс д.ф.м.н. А. Б. Скопенкова для для 3–5 курсов

Проходит по средам, 16.20-17.55 с 15.02.2006

15 февраля сбор у ауд. 16-19.

Аннотация. Изучаются основные методы алгебраической топологии (гомологии, векторные расслоения и характеристические классы, гомотопические группы). Эти методы вводятся на примере применений к геометрической топологии (теории векторных полей, погружений и вложений многообразий). Программу и литературу см. на доске кафедры дифф. геометрии (16 этаж) и на http://dfgm.math.msu.su/materials.php.

Для изучения спецкурса достаточно знакомства с основами топологии. *Материал весеннего семестра 2006 будет практически независим от предыдущих лекций* (необходимые сведения с некоторыми дополнительными усилиями можно получить и на самом спецкурсе).

'Рекламная' лекция для студентов НМУ будет прочитана в НМУ 16 февраля 2006, 19.10-20.40. Этот спецкурс зачитывается учебной частью НМУ.

Программа весеннего семестра 2006.

Du côté de chez Pontryagin [FF89, §§8–11], [P04, §14, §18.12345], [P, 3.1.12356], [S05, глава 4].

1. Гомотопическая классификация отображений графа в окружность. Маломерные обобщения.
2. Степень отображения. Теоремы Хопфа о гомотопической классификации отображений n-многообразия в n-мерную сферу и n-полиэдра в n-мерную сферу.
3. Отображение Хопфа (трехмерная дыра в двумерной сфере). Инвариант Хопфа. Гомотопические группы.
4. Конструкция Понтрягина. Гомотопическая классификация отображений трехмерной сферы в двумерную (1). Теорема Понтрягина о гомотопической классификации векторных полей на ориентируемых 3-многообразиях.
5. Расслоения и накрывающие гомотопии. Точная последовательность расслоения. Гомотопическая классификация отображений трехмерной сферы в двумерную (2).
6. Теорема Фрейденталя о надстройке (трудная часть без доказательства). Гомотопическая классификация отображений трехмерной сферы в двумерную (3).
7. Теорема Понтрягина о гомотопической классификации отображений $(n+1)$-мерной сферы в n-мерную при $n \geq 3$. Теорема Понтрягина-Стинрода о гомотопической классификации отображений $(n+1)$-мерного комплекса в n-мерную сферу (без доказательства).
8. Гомотопическая классификация отображений в пространства Эйленберга-Маклейна.
9. Теорема Уайтхеда о гомотопической эквивалентности.

Du côté de chez Whitney [FF89, §19.12356], [P, 3.2.1345], [S05, глава 3].

1. Инволюции, двулистные накрытия и расслоения со слоем отрезок и окружность.
2. Нормальные векторные поля и нормальное число Эйлера 2-многообразий в $\mathbf{R^4}$.
3. Классы Штифеля-Уитни как препятствия к существованию системы векторных полей.
4. Нормальные классы Уитни как препятствия к погружаемости и вложимости.
5. Формула Ву (без доказательства). Вычисление классов Штифеля-Уитни проективных пространств. Невложимость и непогружаемость проективных пространств.

Du côté de chez Haefliger [RS99, §§1–3, 8], [S05, второй пункт главы 1], [S06, §§1–3].

1. Классификация n-мерных зацеплений в $\mathbf{R^{2n+1}}$. Коэффициент зацепления в гомотопических группах. Теорема Хефлигера-Зимана о классификации n-мерных зацеплений в $\mathbf{R^m}$ при $2m \geq 3n+4$. Многомерные кольца Борромео, зацепление Уайтхеда и трилистник Хефлигера.
2. Изотопность вложений связных n-многообразий в $\mathbf{R^{2n+1}}$. Примеры неизотопных вложений n-мерного тора в $\mathbf{R^{2n}}$. Инвариант Уитни.
3. Классификация почти-вложений сфер с ручками в $\mathbf{R^4}$ с точностью до почти-изотопии (без доказательства). Классификация вложений ориентируемых 3-многообразий в $\mathbf{R^6}$.
4. Классификация Хефлигера-Хирша вложений высокосвязных многообразий.
5. Применения теоремы Борсука-Улама. Инвариант Хефлигера-Ву. Теоремы его полноты (без доказательства).

Литература к весеннему семестру 2006.

[FF89] А. Т. Фоменко и Д. Б. Фукс, Курс гомотопической топологии, Москва, Наука, 1989.

[P04] В. В. Прасолов, Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии, Москва, МЦНМО, 2004. http://www.mccme.ru, Материалы курсов НМУ.

[P] В. В. Прасолов, Элементы теории гомологий, http://www.mccme.ru, Материалы курсов НМУ.

[RS99] Д. Реповш и А. Скопенков, "Новые результаты о вложениях полиэдров и многообразий в евклидовы пространства", УМН 54:6 (1999), 61–109, §§1–3, 8.

[S05] А. Б. Скопенков, Алгебраическая топология с элементарной точки зрения, http://dfgm.math.msu.su/materials.php, http://www.mccme.ru/ium/s05.

[S06] A. Skopenkov, Embedding and knotting of manifolds in Euclidean spaces, London Math. Soc. Lect. Notes, to appear, http://dfgm.math.msu.su/materials.php.

Программа осеннего семестра 2005.

1. Одномерные, двумерные и трехмерные полиэдры и многообразия.
2. Препятствие к ориентируемости 2- и 3- многообразий.
3. Основная теорема топологии о гомотопической классификации отображений $S^n \to S^n$.
4. Теорема Эйлера-Пуанкаре о векторных полях на 2-многообразиях. Теорема Хопфа о векторных полях на n-многообразиях. Существование ненулевых векторных полей на нечетномерных многообразиях.
5. Классификация векторных полей на 2- и 3-многообразиях.
6. Препятствие Штифеля к существованию пары векторных полей на 3-многообразии.
7. Простое доказательство теоремы Штифеля о параллелизуемости ориентируемых 3-многообразий.
8. Препятствие ван Кампена к планарности графов.
9. Изотопия. Препятствие Ву к изотопности вложений графов в плоскость.
10. Общее положение. Вложимость n-многообразий в $\mathbf{R^{2n}}$.
11. Конкордантность и изотопия. Изотопность вложений связных n-многообразий в $\mathbf{R^{2n+1}}$ при $n \geq 2$.
12. Зацепление Хопфа. Коэффициент зацепления. Его полнота для зацеплений n-мерных сфер в $\mathbf{R^{2n+1}}$ при $n \geq 2$.
13. Препятствие Уитни. Невложимость бутылки Кляйна в $\mathbf{R^3}$.
14. Определение групп гомологий. Относительные и абсолютные гомологии.
15. Изоморфизм вырезания. Точные последовательности пары и Майера-Виеториса.
16. Форма пересечений. Двойственность Пуанкаре.
17. Двойственность Александера и невложимость $SO_3 = RP^3$ в $\mathbf{R^4}$.
18. Фундаментальная группа. Методы вычисления: накрытия, клеточные комплексы и теорема ван Кампена.
19. Теорема Пуанкаре о связи гомологий с фундаментальной группой. Гомологическая сфера Пуанкаре.
20. Связь гомологий с коэффициентами в $\mathbf{Z}$ и в $\mathbf{Z_2}$.

Домашняя часть экзамена за осенний семестр 2005.

Решить 33 задачи из предлагавшихся на лекциях. По желанию студента часть домашних задач может быть заменена на подготовку кратких конспектов отдельных лекций.