Хроматические числа и проблема Борсука

А.М. Райгородский

1 Хроматические числа

Назовем *хроматическим числом* евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ минимальное количество цветов, в которые можно так покрасить все точки $\mathbb{R}^n$, чтобы между одноцветными точками не было расстояния 1. Формально, хроматическое число – это величина

$$\chi(\mathbb{R}^n) = \min\left\{\chi:\ \mathbb{R}^n = V_1 \bigsqcup \ldots \bigsqcup V_\chi,\ \forall\, i\ \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_i \quad |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \neq 1\right\},$$

где $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ – евклидово расстояние между векторами $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Задача отыскания хроматического числа пространства была поставлена Э. Нелсоном в 1950 году; однако похожие вопросы предлагались и раньше. Во всяком случае усилиями Г. Хадвигера, П. Эрдеша и др. задача превратилась в классическую проблему комбинаторной геометрии, и теперь любое продвижение в ней вызывает огромный резонанс.

Об истории проблемы и о различных результатах, полученных в связи с ней, можно прочесть, например, в [1], [2]. Мы не станем здесь вдаваться в детали, но приведем лишь самые яркие и, одновременно, важные для дальнейшего факты.

Точное значение хроматического числа известно только в случае прямой: $\chi(\mathbb{R}^1) = 2$. Подлинной трагедией (или, если угодно, позором) является отсутствие окончательного ответа на вопрос Нелсона в размерности 2. Известно лишь, что $4 \le \chi(\mathbb{R}^2) \le 7$. В $\mathbb{R}^3$ зазор в оценках еще ужаснее: $6 \le \chi(\mathbb{R}^3) \le 15$. Наконец, доказано, что

$$7 \le \chi(\mathbb{R}^4) \le 49, \quad \chi(\mathbb{R}^5) \ge 9.$$

Список подобных утверждений можно продолжать, но мы скажем, что при $n \to \infty$ имеют место неравенства

$$(1.239... + o(1))^n \le \chi(\mathbb{R}^n) \le (3 + o(1))^n,$$

и других оценок приводить не станем.

Перейдем к формулировкам упражнений и задач. Упражения, как правило, элементарны. Они нужны, скорее, для того, чтобы читатель мог привыкнуть к проблеме. Гораздо интереснее задачи.

Упражнение 1. Докажите оценки **a**) $\chi(\mathbb{R}^2) \le 7$; **b**) $\chi(\mathbb{R}^2) \ge 4$; **c**) $\chi(\mathbb{R}^3) \ge 5$; **d**) $\chi(\mathbb{R}^n) \ge n + 2$ при $n \ge 2$; **e**) $\chi(\mathbb{R}^3) \le 27$; **f**) $\chi(\mathbb{R}^n) < \infty$.

Задача 1. Докажите неравенство **a**) $\chi(\mathbb{R}^4) \ge 8$; **b**) $\chi(\mathbb{R}^5) \ge 10$. **Указание.** Полезно прочесть статьи [3], [4], [5].

Задача отыскания хроматического числа тесно связана с теорией графов. Назовем граф $G = (V, E)$ *n-мерным дистанционным* (или *n-мерным графом расстояний*), если

$$V \subset \mathbb{R}^n, \quad E \subseteq \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V \times V:\ |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = a\},$$

где a – произвольное фиксированное положительное число.

Назовем *хроматическим числом* графа $G = (V, E)$ минимальное количество цветов (обозначим его $\chi(G)$), в которые можно так покрасить все вершины графа, чтобы между одноцветными точками не было ребра. Иными словами,

$$\chi(G) = \min\left\{\chi:\ V = V_1 \bigsqcup \ldots \bigsqcup V_\chi,\ \forall\, i\ \forall\, x, y \in V_i\ \ (x, y) \notin E\right\}.$$

Скажем, что $W \subseteq V$ – *независимое множество* вершин некоторого графа $G = (V, E)$, если никакие две вершины из W не соединены ребром. Обозначим через $\alpha(G)$ количество элементов в самом жирном независимом множестве вершин графа G. Это так называемое *число независимости* графа:

$$\alpha(G) = \max\{|W| : W \subseteq V, \ \forall x, y \in W \ \ (x, y) \notin E\}.$$

Упражнение 2. Докажите, что если G – n-мерный дистанционный граф, то $\chi(\mathbb{R}^n) \geq \chi(G)$.

Упражнение 3. Докажите неравенство $\chi(G) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)}$, коль скоро $G = (V, E)$.

Упражнение 4. Как устроены графы расстояний, с помощью которых получаются оценки **a**) $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 4$; **b**) $\chi(\mathbb{R}^3) \geq 5$; **c**) $\chi(\mathbb{R}^3) \geq 6$; **d**) $\chi(\mathbb{R}^4) \geq 7$; **e**) $\chi(\mathbb{R}^n) \geq n + 2$?

Упражнение 5. Положим

$$V = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \{0, 1\}, x_1 + \ldots + x_n = 3\}, \ \ E = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V \times V : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = 2\}, \ \ G = (V, E).$$

a) Найдите $\alpha(G)$; **b**) докажите оценку $\chi(G) \geq cn^2$ с каким-нибудь $c > 0$; **c**) вычислите константу c из предыдущего пункта как можно аккуратнее.

Назовем *обхватом* графа G величину $g(G)$, равную длине кратчайшего цикла в G.

Упражнение 6. Докажите, что для любого k существует граф с $\chi(G) \geq k$ и $g(G) > 3$ (граф с большим хроматическим числом без треугольников).

В [6], [7] Н. Уормалд, П. О'Доннелл и Р. Хохберг построили двумерные дистанционные графы G, имеющие довольно мало вершин и в то же время такие, что $\chi(G) \geq 4$, но $g(G) > 3$ (и даже > 4). В свою очередь О. Рубанов в [8] описал конструкцию трехмерного дистанционного графа с $\chi(G) \geq 5$ и без тетраэдров.

Задача 2. Попытайтесь еще уменьшить количество вершин в конструкциях, подобных конструкциям Уормалда и О'Доннелла – Хохберга.

Задача 3. Найдите как можно лучшую *нижнюю* оценку числа вершин в конструкциях, подобных конструкциям Уормалда и О'Доннелла – Хохберга.

Задача 4. Постройте трехмерный граф расстояний, у которого $\chi(G) \geq 5$ и который не содержит треугольников.

Задача 7. Постройте трехмерный граф расстояний, у которого $\chi(G) \geq 6$ и который не содержит тетраэдров.

Задача 8. Постройте трехмерный граф расстояний, у которого $\chi(G) \geq 6$ и который не содержит треугольников.

Задача 9. Найдите конструкцию, подобную рубановской, с меньшим числом вершин или докажите, что таких конструкций не существует.

Назовем последовательность положительных вещественных чисел a_n *лакунарной* с *коэффициентом лакунарности* $d \in \mathbb{N}$, если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 + \frac{1}{d}$. Иными словами, последовательность лакунарна, если она растет не медленнее некоторой геометрической прогрессии. Положим

$$\chi(\mathbb{R}^n; \{a_i\}) = \min\left\{\chi : \mathbb{R}^n = V_1 \bigsqcup \ldots \bigsqcup V_\chi, \ \forall i \, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_i \ \ \ |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \notin \{a_i\}\right\}.$$

Таким образом, на сей раз мы запрещаем точкам одного цвета отстоять на любое расстояние из множества $\{a_i\}$.

Упражнение 7. Докажите, что для любого d существует такая лакунарная последовательность с коэффициентом d, что $\chi(\mathbb{R}^1; \{a_i\}) \geq d+1$.

Задача 10. Верно ли, что найдется такая функция $\omega(d) \to \infty$, $d \to \infty$, с которой

$$\max_{\{a_i\}} \chi(\mathbb{R}^1; \{a_i\}) \geq d\omega(d)?$$

Здесь максимум берется по всем лакунарным последовательностям с коэффициентом d.

2 Проблема Борсука

Эта задача также является классической в области комбинаторной геометрии. Она была поставлена К. Борсуком в 1933 году, и про нее можно прочесть, например, в [2], [9], [10].

Сформулируем проблему. Для ограниченного множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ положим

$$\operatorname{diam} \Omega = \sup_{\mathbf{x},\mathbf{y} \in \Omega} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

Введенная величина называется *диаметром* множества Ω. Определим $f(\Omega)$ как минимальное количество частей меньшего диаметра, на которые можно разбить данное Ω. Пусть, наконец, $f(n) = \max_{\Omega} f(\Omega)$, где максимум берется по всем ограниченным множествам в пространстве. Таким образом,

$$f(n) = \max_{\Omega} \min \left\{ f : \Omega = \Omega_1 \bigsqcup \ldots \bigsqcup \Omega_f, \ \forall\, i \ \operatorname{diam} \Omega_i < \operatorname{diam} \Omega \right\}.$$

Иными словами, $f(n)$ – это минимальное число частей меньшего диаметра, на которые можно разбить произвольное множество в $\mathbb{R}^n$. Назовем его *числом Борсука*.

Упражнение 8. Докажите, что $f(n) \geq n+1$.

Упражнение 9. Докажите, что для сферы $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ выполнено $f(S^{n-1}) \leq n+1$.

Упражнения 8 и 9 являются той самой мотивировкой, за счет которой Борсук высказал гипотезу: $f(n) = n+1$. Как ни странно, гипотеза неверна! О контрпримерах можно прочесть в [2], [9]. Все эти контрпримеры основаны на построении некоторых множеств "(0,1)-векторов", подобных тому, которое рассматривалось в упражнении 5. К сожалению, в настоящее время гипотеза опровергнута лишь в размерностях $n > 297$. При этом в размерностях $n \leq 3$ гипотеза справедлива. Случай $n = 1$ тривиален (убедитесь в этом!), случаи же $n = 2, 3$ подробно изучены в [10]. Что происходит при $n \in [4, 297]$, никто до сих пор не знает.

В связи с известной технологией построения контрпримеров, возникает следующая комбинаторная задача.

Задача 11. Пусть $n = 2k$,

$$V = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) : \, x_i \in \{-1, 0, 1\}, \ |\{i : \, x_i = \pm 1\}| = k\}.$$

Рассмотрим произвольное множество

$$W = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_s\} \subset V,$$

предполагая, что скалярное произведение

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

любых двух его элементов не равно нулю. Иными словами, W – это произвольное подмножество V, состоящее из попарно неортогональных векторов. Насколько большим может быть $s = |W|$? **Указание.** Поработайте сперва с $n = 4, 6, 8, 10, 12$.

Подобно тому, как при изучении хроматических чисел были полезны графы расстояний, при работе с числом Борсука нужны графы диаметров. Пусть дано множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\operatorname{diam}\Omega < \infty$. Назовем граф $G_\Omega = (\Omega, E)$ *графом диаметров* этого множества, если

$$E = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Omega \times \Omega : \ |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \operatorname{diam}\Omega\}.$$

Упражнение 10. Убедитесь в том, что для конечных множеств Ω выполнено $f(\Omega) = \chi(G_\Omega)$.

Упражнение 11. Приведите пример (замкнутого) множества Ω, для которого $f(\Omega) \neq \chi(G_\Omega)$.

Упражнение 12. Покажите, что если $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и $|\Omega| = n$, то в G_Ω не более n ребер.

Проблема Борсука нетривиальна даже в случае так называемых двухдистанционных множеств. Назовем множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *двухдистанционным*, если расстояния между его точками принимают всего два различных значения, большее из которых, естественно, является диаметром.

Задача 12. Какова максимальная мощность двухдистанционного множества в $\mathbb{R}^n$? Ответ следует искать в виде функции от n. Однако интересны и частные результаты при конкретных значениях n.

Задача 13. Какова максимальная мощность двухдистанционного множества в $\mathbb{R}^n$, коль скоро отношение большего из двух расстояний к меньшему полагается равным некоторому a? Ответ следует искать в виде функции от n и a. Однако интересны и частные результаты при конкретных значениях n и a.

Задача 14. Верна ли гипотеза Борсука для двухдистанционных множеств при каком-нибудь $n > 3$?

Задача 15. Верна ли гипотеза Борсука для двухдистанционных множеств при каком-нибудь $n > 3$ и каких-нибудь a (см. задачу 13)?

В работе [11] гипотеза Борсука доказана для произвольных наборов (0,1)-векторов при всех $n \leq 9$.

Задача 16. Докажите гипотезу Борсука для произвольных наборов (-1,0,1)-векторов при всех достаточно малых n. Здесь, в идеале, $n \leq 9$.

Задача 17. Докажите гипотезу Борсука для произвольных двухдистанционных множеств (0,1)-векторов при всех достаточно малых n. Разумеется, в данном случае интересны только $n > 9$.

Задача 18. Докажите гипотезу Борсука для произвольных двухдистанционных множеств (-1,0,1)-векторов при всех достаточно малых n. Тут уже любопытны и $n \leq 9$.

Замечание 1. На конкурс принимаются решения любых задач (даже одной может быть достаточно!), а также упражнений 4 c), d), 5, 6, 9, 11, 12 (они сравнительно нетривиальны).

Замечание 2. Я всегда готов помочь с отысканием цитированной литературы!

Список литературы

[1] А.М. Райгородский, *Хроматические числа*, Москва, МЦНМО, 2003.

[2] А.М. Райгородский, *Линейно-алгебраический метод в комбинаторике*, Москва, МЦНМО, 2007.

[3] O. Nechushtan, *On the space chromatic number*, Discrete Mathematics, 256 (2002), 499 - 507.

[4] Л.Л. Иванов, *Оценка хроматического числа пространства* $\mathbb{R}^4$, Успехи матем. наук, 61 (2006), N5, 371 - 372.

[5] D.G. Larman, C.A. Rogers, *The realization of distances within sets in Euclidean space*, Mathematika, 19 (1972), 1 - 24.

[6] N. Wormald, *A 4-chromatic graph with a special plane drawing*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A, 28 (1979), N1, 1 - 8.

[7] R. Hochberg, P. O'Donnell, *Some 4-chromatic unit-distance graphs without small cycles*, Geombinatorics, 5 (1996), N4, 137 - 141.

[8] О. Рубанов, *Хроматические числа трехмерных графов расстояний, не содержащих тетраэдров*, Матем. заметки, 82 (2007), N5, 797 - 800.

[9] А.М. Райгородский, *Проблема Борсука*, Москва, МЦНМО, 2006.

[10] В.Г. Болтянский и И.Ц. Гохберг, *Теоремы и задачи комбинаторной геометрии*, Москва, "Наука", 1965.

[11] G.M. Ziegler, *Coloring Hamming graphs, optimal binary codes, and the 0/1 - Borsuk problem in low dimensions*, Lect. Notes Comput. Sci., 2122 (2001), 159 - 171.