СТУДЕНЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ МЕХМАТА МГУ

И. В. Аржанцев, [1] **В. И. Богачев,** [2] **А. А. Заславский,** [3]
В. Ю. Протасов, [4] **А. М. Райгородский,** [5] **А. Б. Скопенков** [6]

Мы приводим задачи всемехматовских олимпиад 2001 (второй тур), 2008 и 2009 годов, а также указания, решения и комментарии. [7] См. введение в [BRST].

Благодарим Д. Янга за полезное замечание.

2001-1. Пусть $\varphi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ - монотонно убывающая функция, для которой $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi(n) < \infty$. Докажите, что существует последовательность α_n положительных чисел, монотонно убывающая к нулю, для которой $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi(\alpha_n n) < \infty$.

2001-2. Докажите, что для любого целого положительного n матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^n$$

имеет два равных элемента на главной диагонали.

2001-3. Пусть P_n и Q_n — правильные n-угольники, причем P_n вписан в круг диаметра 1, а Q_n описан около этого круга. Обозначим через p_n и q_n их периметры. В какой трети интервала (p_n, q_n) лежит число π?

2001-4. Для любых целых p и λ обозначим через $J(\lambda, p)$ число целочисленных решений $(x_1, \dots, x_6)$ уравнения $x_1^3+x_2^3+x_3^3 = x_4^3+x_5^3+x_6^3+\lambda$, для которых $1 \le x_1, \dots, x_6 \le p$. Докажите, что $J(\lambda, p) \le J(0, p)$ для любого p.

2001-5. Пусть P — полином третьей степени, для которого множество $L = \{z \in \mathbf{C}\colon\ |P(z)| = 1\}$ не совпадает с окружностью $S = \{z \in \mathbf{C}\colon\ |z| = 1\}$. Каково наибольшее возможное количество точек в пересечении $L \cap S$ (для различных полиномов P???)?

2001-6. Можно ли покрыть пространство $\mathbf{R}^n$ семейством замкнутых шаров с положительными радиусами и попарно непересекающимися внутренностями?

2001-7. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(2^n x)$ сходится только в точках $x = \pi 2^{-k}$, $k \in \mathbb{Z}$.

---

[1] arjantse@mccme.ru; механико-математический факультет Московского Государственного Университета.

[2] vibogach@mail.ru; механико-математический факультет Московского Государственного Университета.

[3] zaslavsky@mccme.ru; Центральный Экономико-Математический Институт

[4] v-protassov@yandex.ru; механико-математический факультет Московского Государственного Университета.

[5] mraigor@yandex.ru; механико-математический факультет Московского Государственного Университета, факультет инноваций и высоких технологий Московского Физико-технического Института.

[6] skopenko@mccme.ru; http://dfgm.math.msu.su/people/skopenkov/papersc.ps. механико-математический факультет Московского Государственного Университета, Независимый Московский Университет и Московский Институт Открытого Образования.

[7] Вот победители этих олимпиад: А. Авилов (2009), В. Арутюнов (2008), В. Астахов (2008, 2009), А. Буфетов (2009), А. Гаврилюк (2009), Е. Горинов (2009), Р. Гимадеев (МФТИ, 2009), Р. Девятов (2008, 2009), А. Ефимов (2008), М. Илюхина (2008), А. Киселев (МФТИ, 2009), П. Козлов (2009), И. Митрофанов (2008), П. Мищенко (МФТИ, 2009), А. Перепечко (2009), С. Смирнов (2008), А. Трепалин (2008), В. Шмаров (2009). А вот кто предложили задачи на олимпиады: И. В. Аржанцев (2008-3), В. И. Богачев (2008-1, 2008-2, 2009-5), А. А. Заславский (2008-4, 2009-3), В. Ю. Протасов (2009-1), А. М. Райгородский (2008-5, 2009-2), А. Б. Скопенков (2008-3, 2009-4). В [BRST] приведены задачи первого тура олимпиады 2001 года, а задачи второго тура ошибочно названы утраченными. Большинство задач второго тура олимпиады 2001 — фольклорные. Фамилии авторов остальных задач утрачены, за что мы приносим свои извинения. Все варианты составлены В. И. Богачевым.

2001-8. Пусть $\{\alpha_n\}$ — последовательность вещественных чисел, для которой последовательность функций $\sin(\alpha_n x)$ сходится на множестве, имеющем положительную меру Лебега. Докажите, что последовательность $\{\alpha_n\}$ имеет конечный предел.

2001-9. Найдите все выпуклые равноугольные многоугольники с вершинами в узлах целочисленной решетки на плоскости.

2008-1. Докажите, что для всякого n найдется число $c_n > 0$ со следующим свойством: каждое открытое выпуклое множество объема v в единичном шаре из $\mathbb{R}^n$ содержит шар радиуса $c_n v$.

2008-2. Для возрастающих функций $f, g : [0, \pi/2] \to \mathbf{R}$ докажите неравенство [8]

$$\int_0^{\pi/2} f(x)g(x)\sin x\,dx \geq \int_0^{\pi/2} f(x)\sin x\,dx \int_0^{\pi/2} g(x)\sin x\,dx.$$

2008-3. Обозначим через A подгруппу $\mathbf{Z}^2 \oplus 0 \oplus 0$ группы $\mathbf{Z}^4$. Для каких элементов $(b_1, b_2, c_1, c_2) \in \mathbf{Z}^4$ существует такая подгруппа D группы $\mathbf{Z}^4$, что $(b_1, b_2, c_1, c_2) \in D$ и $\mathbf{Z}^4 = A \oplus D$? Дайте ответ в терминах делимости чисел b_1, b_2, c_1, c_2 и наибольших общих делителей подмножеств этого множества. [9]

2008-4. Докажите, что существует выпуклая ограниченная фигура на плоскости, не имеющая центра симметрии, но обладающая следующим свойством: всякая прямая, делящая пополам ее периметр, делит пополам и ее площадь.

2008-5. Пусть W — 11^n-элементное подмножество пространства $\mathbf{R}^n$, любое 10^n-элементное подмножество которого содержит две точки x, y на расстоянии 1: $|x-y| = 1$. Докажите, что для достаточно большого n количество единичных расстояний между точками множества W больше, чем $0,99 \cdot 12.1^n$:

$$\frac{1}{2}\#\{(x,y) \in W_n \times W_n \colon\ |x-y| = 1\} > 0,99 \cdot 12.1^n,$$

где через $\#A$ обозначено число элементов в множестве A. [10]

2009-1. Для каких размерностей n существует гиперплоскость в $\mathbf{R}^n$, пересекающая все $(n-1)$-мерные замкнутые грани n-мерного куба, но не имеющая общих точек со вписанным в этот куб замкнутым шаром? [11]

2009-2. Обозначим через $m(k)$ максимальное число попарно не ортогональных векторов из $\{-1, 0, 1\}^{2k}$, ровно k координат каждого из которых нулевые.

(а) Докажите, что $m(k) \geq 2^{2k-1}$ при нечетном k.

(б) Докажите, что $80 \leq m(4) \leq 140$.

2009-3. Пусть n нечетно. [12] На сторонах произвольного ('первого') n-угольника как на основаниях построены во внешнюю сторону равнобедренные треугольники с углом при вершине $2\pi/n$. Их вершины образуют второй n-угольник. На его сторонах как на основаниях построены во внешнюю сторону равнобедренные треугольники треугольники с углами при вершине $4\pi/n$. Их вершины образуют третий n-угольник. Аналогично из k-го n-угольника

---

[8] Здесь можно заменить $\sin x$ на любую интегрируемую функцию $\varrho : [0, \pi/2] \to [0, +\infty)$ с интегралом 1. Общий результат принадлежит П.Л. Чебышёву. Неравество Чебышёва из 'элементарной' математики — дискретный аналог этого неравенства.

[9] Аналогично решается следующая более общая задача. Пусть A есть прямая сумма свободных абелевых конечно порожденных подгрупп B и C. Для каких элементов $(b, c) \in A$ найдется такая подгруппа $D \subset A$, что $(b, c) \in D$ и $A = B \oplus D$?

[10] На олимпиаде задача предлагалась в несколько другой формулировке. Хотя это и не обязательно для формулировки или решения задачи, заметим, что для достаточно большого n такое подмножество W действительно существует. Это доказывается аналогично [R, стр. 16, §2.3, первые две выключные формулы].

[11] Эта задача интересна как еще один пример того, что в высоких размерностях вписанный в куб шар 'маленький'.

[12] Имеется естественный аналог этой задачи для четного n.

при помощи угла $2\pi k/n$ строится $(k+1)$-й n-угольник; равнобедренные треугольники строятся вовне k-го n-угольника при $2\pi k/n < \pi$ и внутрь при $2\pi k/n > \pi$. Докажите, что $(n-1)$-й n-угольник правильный.

2009-4. Докажите, что всякое линейное отображение в себя пространства матриц $n \times n$ с комплексными коэффициентами, сохраняющее определитель, является обратимым.

2009-5. Для непрерывной функции $f : \mathbf{R}^2 \to [0, +\infty)$, некоторого $C > 0$, любого квадрата K с единичным ребром и любого $x \in K$ выполнено неравенство $f(x) \le C + C\int_K f(x)\,dx$. Докажите, что $f(x) \le Me^{C\|x\|}$ при некотором $M \ge 0$. [13]

Решения и указания к задачам 2008 года.

1. Применим индукцию по n. При $n = 1$ все очевидно. Пусть наше утверждение верно в размерности $n-1$. Можно считать, что данное тело K компактно (взяв выпуклое компактное подмножество исходного тела объема более $v/2$). Пусть

$$a = \min\{x_n\colon\ (x_1, \dots, x_n) \in K\}, \quad b = \max\{x_n\colon\ (x_1, \dots, x_n) \in K\}, \quad l = b - a.$$

Среди сечений

$$K_t := \{(x_1, \dots, x_{n-1})\colon\ (x_1, \dots, x_{n-1}, t) \in K\}$$

возьмем сечение максимального $(n-1)$-мерного объема. Пусть это сечение K_c, где $a \le c \le b$, а соответствующий $(n-1)$-мерный объем равен v_0. Можно считать, что $b - c \ge l/2$. По предположению индукции в K_c есть $(n-1)$-мерный шар B с центром в $Z = (z_1, \dots, z_{n-1}, c)$ радиуса $r = c_{n-1}v_0$. По построению в K есть точка $X = (x_1, \dots, x_{n-1}, b)$. Положим $Y = (x_1, \dots, x_{n-1}, c)$. Ввиду выпуклости тела K конус Q с вершиной в X и основанием B входит в K. Проверим, что он содержит нужный шар. Заметим, что $|Z - Y| \le 2$.

Пусть $|Z - Y| \ge l$. Тогда указанный конус Q содержит шар радиуса $\varrho = \dfrac{1}{4}\dfrac{rl}{|Z-Y|} \ge \dfrac{1}{8}rl$. Это видно из прямоугольного треугольника в вершинами в точках X, Y, Z, имеющего катеты l и $|Z-Y|$. В самом деле, на катете YZ возьмем такую точку W, что $|W-Z| = r$. Обозначим через U точку пересечения перпендикуляра в W с гипотенузой. Из подобия треугольников $|U - W| = \dfrac{lr}{|Z-Y|}$. Кроме того, $|U - W| \le r$. Остается заметить, что радиус вписанной окружности в прямоугольный треугольник с меньшим катетом $|U - W|$ больше $|U - W|/4$. Итак,

$$\varrho \ge \frac{1}{8}rl = \frac{1}{8}c_{n-1}v_0 l \ge \frac{1}{8}c_{n-1}v,$$

ибо $v \le lv_0$, что очевидно из принципа Кавальери.

Пусть $|Z - Y| \le l$. Тогда при $r \le l$ конус Q содержит шар радиуса

$$\frac{1}{4}r = \frac{1}{4}c_{n-1}v_0 \ge \frac{1}{4}c_{n-1}\frac{v}{l} \ge \frac{1}{8}c_{n-1}v.$$

Наконец, при $r \ge l$ конус Q содержит шар радиуса $l/4$. Ясно, что l не меньше v/s_{n-1}, где s_{n-1} — $(n-1)$-мерный объем единичного шара в $\mathbf{R}^{n-1}$.

2. Положим $\varrho(x) := \sin x$ (см. сноску к условию). Заменяя g на $g - c$, где c — интеграл от $g\varrho$, переходим к случаю $\int g\varrho\,dx = 0$. В этом случае надо доказать, что интеграл от $fg\varrho$ неотрицателен. Так как интегралы от $(f - f(0))g\varrho$ и $fg\varrho$ равны, то приходим к случаю, когда $f \ge 0$. Пусть $x_0 := \inf\{x\colon\ g(x) \ge 0\}$. Ясно, что $x_0 > 0$. Тогда $g(x) < 0$ при $x < x_0$, $g(x) \ge 0$ при $x > x_0$. Ввиду оценок $0 \le f(x) \le f(x_0)$ при $x < x_0$ и $f(x) \ge f(x_0)$ при $x > x_0$ получаем

$$\int_0^{x_0} f(x)g(x)\varrho(x)\,dx \ge f(x_0)\int_0^{x_0} g(x)\varrho(x)\,dx,$$

$$\int_{x_0}^{\pi/2} f(x)g(x)\varrho(x)\,dx \ge f(x_0)\int_{x_0}^{\pi/2} g(x)\varrho(x)\,dx,$$

[13] На олимпиаде задача предлагалась для $C = 1$ с оценкой $f(x) \le M(1 + \|x\|)$.

откуда
$$\int_0^{\pi/2} f(x)g(x)\varrho(x)\,dx \ge f(x_0)\int_0^{\pi/2} g(x)\varrho(x)\,dx = 0.$$

Возможно другое *короткое решение*: с помощью приближений утверждение сводится к случаю непрерывно дифференцируемых функций. Функция $\Phi(x)=\int_0^x g(t)\varrho(t)\,dt$ в предположении, что $g\varrho$ имеет нулевой интеграл, удовлетворяет таким условиям: $\Phi(0)=\Phi(\pi/2)=0$, $\Phi(x)\le 0$ (если $\Phi'(x_0)=g(x_0)\varrho(x_0)=0$, то $\Phi'(x)\le 0$ при $x\le x_0$ и $\Phi'(x)\ge 0$ при $x\ge x_0$ из-за возрастания g). Интегрируя по частям, находим
$$\int_0^{\pi/2} f(x)g(x)\varrho(x)\,dx = -\int_0^{\pi/2} f'(x)\Phi(x)\,dx \ge 0.$$

Возможно третье *короткое решение* с помощью двойных интегралов (придуманное на олимпиаде А. Трепалиным).

3. *Ответ:* необходимое и достаточное условие —
- либо $b_1=b_2=c_1=c_2=0$,
- либо одно из чисел c_1, c_2 ненулевое и оба числа b_1 и b_2 делятся на $GCD(c_1,c_2)$.

4. *Ответ* [Z]. Например, подходит фигура, ограниченная кривой
$$x=12\cos\phi+\cos 2\phi+\frac{1}{2}\cos 4\phi,\quad y=12\sin\phi-\sin 2\phi+\frac{1}{2}\sin 4\phi.$$

Указание. Убедиться в этом, а также получить другие примеры искомых кривых, можно следующим образом. Заметим, что каждому направлению (задаваемому углом ϕ) соответствует ровно одна прямая, делящая площадь и периметр фигуры пополам. Обозначим длину соответствующего отрезка этой прямой через $2l(\phi)$, а координаты его середины через $(x(\phi),y(\phi))$. Напишем параметрическое уравнение границы фигуры. Теперь из условия задачи нетрудно вывести следующие свойства функций x, y, l:

1. l не зависит от ϕ.
2. Прямая, делящая фигуру пополам, касается кривой $(x(\phi),y(\phi))$.

Примеры функций x и y, удовлетворяющих условию 2, будем искать в виде $\sum\limits_{k=0}^{n}(a_k\cos k\phi+b_k\sin k\varphi)$. (Для знакомых с рядами Фурье поиск решения в таком виде естественен.) Получим уравнения на коэффициенты a_k, b_k (с параметром l), обеспечивающие выполнение условия 2. При этом для достаточно больших l полученная фигура будет выпуклой.

5. *Указание.* Take the graph whose set of vertices is W, and two vertices are joined by an edge if the distance between them is 1. Тогда более слабая оценка 2^{n-1} легко получается из следующего общеизвестного результата: *if for each k vertices of a graph with v vertices there is an edge joining two of the k vertices, then the number of edges is at least $(k-1)q(q-1)/2$, where* $q:=\left[\dfrac{v}{k-1}\right]$. Для доказательства оценки 2^n нужно уточнить рассуждения, применяемые при доказательстве сформулированного результата, используя несуществование $n+2$ точек в n-мерном пространстве $\mathbf{R}^n$ с попарными расстояниями 1.

Решения и указания к задачам 2009 года.

1. *Ответ:* $n=5$.

При каждом $n\ge 5$ гиперплоскость $x_1+\dots+x_n=n-2$ пересекает все замкнутые $(n-1)$-мерные грани n-мерного куба $I_n=\big\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbf{R}^n\ :\ |x_i|\le 1\big\}$. В самом деле: точки $\big(1,\dfrac{n-3}{n-1},\dots,\dfrac{n-3}{n-1}\big)$ и $\big(-1,1,\dots,1\big)$ этой гиперплоскости лежат на гранях $x_1=1$ и $x_1=-1$ куба I_n, соответственно. Аналогично с остальными гранями. Эта гиперплоскость не пересекает вписанного шара, поскольку расстояние от начала координат до неё равно $\dfrac{n-2}{\sqrt{n}}>1$.

Несуществование такой гиперплоскости при $n = 4$ доказывается так (доказательство предложено В. Шмаровым; случай $n \le 3$ аналогичен). Предположим, напротив, что нашлась такая плоскость $a_1x_1 + \dots + a_4x_4 = b$ для 4-мерного куба I_4. Без ограничения общности, считаем, что $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge a_4 \ge 0$ и $b \ge 0$. Поскольку данная гиперплоскость пересекает грань $x_1 = -1$, имеем $-a_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = b$ для некоторых $x_2, x_3, x_4 \in [-1, 1]$. Тогда

$$0 \le b \le -a_1+a_2+a_3+a_4 \le a_3+a_4, \quad \text{поэтому} \quad b^2 < (a_3+a_4)^2 = a_3^2+2a_3a_4+a_4^2 \le a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2.$$

Следовательно, гиперплоскость пересекает вписанный шар. Противоречие.

2a. *Указание.* Пусть $H_1, \dots, H_{2^{k-1}}$ — все подмножества множества $\{1, 2, \dots, k\}$, имеющие четное число элементов. Положим

$$M_s := \{(a_1, b_1, \dots, a_k, b_k) \in \{-1, 0, 1\}^{2k} : (a_i, b_i) = (\pm 1, 0) \text{ при } i \in H_s,\ (a_i, b_i) = (0, \pm 1) \text{ при } i \notin H_s\}.$$

Докажите, что $\cup_{s=1}^{2^{k-1}} M_s$ и есть искомое множество из 2^{2k-1} векторов.

2b. Доказательство неравенства $80 \le m(4)$. Возьмем векторы

• $e_1, \dots, e_5$, у которых первые три координаты равны $+1$, среди последних пяти координат ровно одна равна $+1$, а остальные координаты нулевые;

• $e_6, \dots, e_{10}$, у которых первые три координаты равны $+1$, среди последних пяти координат ровно одна равна -1, а остальные координаты нулевые;

• $f_1, \dots, f_{30}$, у которых среди первых трех координат ровно две равны $+1$ и одна нулю, а среди последних пяти координат ровно две равны $+1$ и ровно три нулю.

Ясно, что $e_i \cdot e_j \ge 2$, $f_k \cdot f_l \ge 1$ and $e_i \cdot f_k \ge 2 - 1 = 1$. Поэтому векторы

$$e_1, \dots, e_{10}, -e_1, \dots, -e_{10}, f_1, \dots, f_{30}, -f_1, \dots, -f_{30}$$

попарно неортогональны.

2b. Доказательство неравенства $m(4) \le 140$. (Это решение принадлежит В. Арутюнову; аналогичное решение предложил В. Вановский.) Для каждого вектора рассмотрим множество позиций, на которых стоят нули. Поскольку никакие два вектора не ортогональны, у любых двух векторов эти множества не "противоположны" (т.е. не дополняют друг друга). Существует $\binom{8}{4} = 70$ вариантов расположения нулевых позиций. Если, вопреки утверждению задачи, найдется 141 таких попарно неортогональных векторов, то некоторые 5 из этих векторов будут иметь общие нулевые позиции.

Мы можем считать, что указанные позиции суть 1,2,3,4 и что $(1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$ — один из пяти векторов. Ясно, что не более одного из оставшихся четырех векторов имеет ровно четыре координаты -1. Ни один из оставшихся четырех векторов не имеет ровно двух координат -1 (поскольку такой вектор ортогонален вектору $(1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$). Не более одного из оставшихся четырех векторов имеет ровно одну координату -1 (поскольку два различных вектора такого вида ортогональны). Аналогично, не более одного из оставшихся четырех векторов имеет ровно одну координату 1. Противоречие.

3. Обозначим через $z_1^k, \dots, z_n^k$ комплексные числа, соответствующие вершинам k-го n-угольника, и $\mathbf{z}^k := (z_1^k, \dots, z_n^k) \in \mathbf{C}^n$. Комплексные координаты на плоскости выберем так, чтобы выполнялось условие $z_1^k + \dots + z_n^k = 0$.

Вершины равнобедренных треугольников, построенных на сторонах первого многоугольника, являются линейными функциями вершин этого многоугольника. Поэтому $\mathbf{z}^2 = A_1\mathbf{z}^1$ для некоторой матрицы A_1. Аналогично, $\mathbf{z}^3 = A_2\mathbf{z}^2$, $\mathbf{z}^4 = A_3\mathbf{z}^3$ и т.д. для некоторых матриц $A_2, A_3, \dots$. Заметим, что

1. Векторы $v_i = (1, e^{2\pi i/n}, e^{4\pi i/n}, \dots, e^{2(n-1)\pi i/n})$ для $i = 0, \dots, n-1$ образуют набор собственных векторов матрицы A_k для любого k.

2. Одно из собственных чисел матрицы A_k равно нулю.

3. Ему соответствует ровно один собственный вектор v_{n-k}.

Условие 2 означает, что умножение на матрицу A_k задает проектирование пространства $\mathbf{C}^n$ на некоторую гиперплоскость. Из условия 3 получаем, что эти гиперплоскости различны для разных k. Следовательно, умножение на произведение матриц $A_{n-2}A_{n-3}\dots A_2A_1$ задает проекцию подпространства $z_1 + \dots + z_n = 0$ на одномерное подпространство, задающее правильные n-угольники. Утверждение задачи доказано.

4. Обозначим данное отображение через T. Пусть, напротив, существует $A \neq 0$, для которой $T(A) = 0$. Существует вырожденная матрица B, для которой $A + B$ невырождена (докажите!). Тогда следующая цепочка равенств дает противоречие.

$$0 = \det B = \det T(B) = \det(T(B) + T(A)) = \det T(A+B) \neq 0.$$

5. Пусть для непрерывной функции $f_1 : \mathbf{R} \to [0, +\infty)$, некоторого $C > 0$ и любых единичного отрезка K и точки $x \in K$ выполнено неравенство $f(x) \le C + C\int_K f(x)\,dx$. Тогда $f_1(x) \le C + C\int_{x-1}^{x} f_1(y)\,dy$. Напомним неравенство Гронуолла **нужна формулировка!!!**. При $x \ge 1/2$ оно дает оценку

$$f_1(x) \le \Big(C + C\int_{-1/2}^{0} f_1(y)\,dy\Big)e^{Cx} \le \Big(C + C\int_{-1/2}^{1/2} f_1(y)\,dy\Big)e^{Cx}.$$

Аналогичная оценка верна и при $x < -1/2$, что в итоге дает

$$f(x) \le \Big(C + C\int_{-1/2}^{1/2} f_1(y)\,dy\Big)e^{C|x|},$$

поскольку при $|x| \le 1/2$ это верно по условию.

Пусть $x \in \mathbf{R}^2$ и $|x| > 1/2$. Повернем систему координат так, что $x = (0, x_2)$, где точки $x \in \mathbf{R}^2$ записываются в виде $x = (z, x_2)$, $z \in \mathbf{R}$ **Бессмыслица. Как правильно?**. Можно считать, что $x_2 > 1/2$. Введем функцию $\eta(t) := \int_{-1/2}^{1/2} f(z,t)\,dz$. Интегрированием условия $\sup_K f(x)/C \le 1 + \int_K f(y)\,dy$ по $[-1/2, 1/2]$ **Бессмыслица. Как правильно?** находим

$$\eta(t)/C \le 1 + \int_{[-1/2,1/2]\times[t,t-1]} f(y)\,dy = 1 + \int_{t-1}^{t} \eta(u)\,du,$$

что по одномерному случаю дает

$$\eta(t)/C \le \Big(1 + \int_{-1/2}^{1/2} \eta(s)\,ds\Big)e^{C|t|} = \Big(1 + \int_{[-1/2,1/2]^2} f(x)\,dx\Big)e^{C|t|}.$$

Следовательно,

$$f(0,x_2)/C \le 1 + \int_{[-1/2,1/2]\times[x_2-1,x_2]} f(y)\,dy = 1 + \int_{x_2-1}^{x_2} \eta(t)\,dt \le 1 + C + Ce^{C|x_2|}\int_{[-1/2,1/2]^2} f(y)\,dy,$$

что завершает доказательство.

Другой способ изложить это решение, придуманный участниками олимпиады, основан на следующей лемме (приведем ее формулировку для $C = 1$): $f(x) \le 2 + \max\limits_{y \in K} f(y)$ для любого единичного квадрата K и любой точки x, лежащей прямоугольнике $1 \times \frac{1}{2}$, пересекающемся с K по общему ребру.

Справедливо следующее более общее утверждение.

Пусть $f : \mathbf{R}^d \to [0, +\infty)$ — локально ограниченная измеримая функция, причем для любых куба K с ребром единичной длины и $x \in K$ выполнено неравенство $f(x) \le C_1 + C_2\int_K f(y)\,dy$, где C_1 и C_2 не зависят от K. Тогда $f(x) \le M\exp(C_2|x|)$, где

$$M = C_1 + C_1C_2 + \max(C_2^2, 1)\sup_{A \in SO_d}\int_{A([-1/2,1/2]^d)} f(y)\,dy.$$

Литература

[BRST] В.И.Богачев, А.М.Райгородский, А.Б.Скопенков и Н.А.Толмачев, Студенческие олимпиады и межкафедральный семинар на мехмате московского государственного университета, Мат.Просвещение, 12(2008),205-222. http://dfgm.math.msu.su/files/skopenkov/stolymp.pdf

[R] А.М. Райгородский, Линейно-алгебраический метод в комбинаторике, Москва, МЦНМО.

[Z] А.А. Заславский, Свойства и признаки окружности, Квант, N6, 2001.