ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГРУПП И АЛГЕБР ЛИ В ИНТЕРЕСНЫХ ЗАДАЧАХ
(классификация компактных групп Ли) [1]

Р. Пальвелев и А. Скопенков

Введение.

В этом тексте приводится набросок доказательства красивой, важной и нетривиальной теоремы о классификации компактных подгрупп группы невырожденных линейных преобразований евклидова пространства (точнее, компактных групп Ли). (То, что во многих учебниках не приводится ее явной формулировки, ясной неспециалисту, делает эту теорему менее доступной, а курс групп и алгебр Ли менее мотивированным.) На примере изучения этого доказательства читатель (точнее, решатель) освоит основы теории групп и алгебр Ли, имеющие много других применений.

Особенность этого текста — возможность познакомиться с *мотивировками* и *идеями* теории групп и алгебр Ли при сведении к необходимому минимуму ее *языка.* Для этого в качестве формальной цели поставлен указанный красивый результат, а не набор понятий. Мы постарались изложить доказательство так, чтобы в каждый момент было ясно, в чем цель — в частности, зачем вводится то или иное понятие. См. подробнее 'философско-методическое отступление' в [ZPSSS] и 'зачем' в [Sk08].

Этот набросок может содержать опечатки. Пожалуйста, направляйте замечания по skopenko@mccme.ru.

Благодарим М. Берштейна и А. Жеглова за полезные обсуждения.

О задачах.

Материал преподносится в виде задач для самостоятельного размышления и обсуждения с преподавателем (это характерно не только для дзенских монастырей, но и для элитного математического обучения — по крайней мере, российского).

Для понимания условий и для решения большинства задач достаточно знания материала I курса мехмата МГУ и знакомства с настоящим текстом (точнее, его части, предшествующей формулировке задачи). Если используемые в условии термины не определены в этом тексте и вам незнакомы, то соответствующую задачу следует просто игнорировать. Отметим, что для решения задач достаточно понимания их формулировок и *не требуется* никаких дополнительных понятий и теорий (кроме, быть может, задач со звездочками). Иногда соседние задачи являются подсказками. Если условие задачи является формулировкой утверждения, то это утверждение и надо доказать. Заданные в условиях функции предполагаются бесконечно дифференцируемыми, если не оговорено противное.

Приводимые задачи являются примерами интересных и полезных фактов, и читателю будет полезно ознакомиться с самими фактами, даже если он не сможет их самостоятельно доказать. Например, в некоторых задачах изложен план доказательства теорем, который полезно понимать, даже если детали этого плана останутся недоступными. Поэтому приводимые формулировки задач могут быть путеводителем по другим учебникам, позволяя намечать интересные конечные цели и отбрасывать материал, не являющийся для этих целей необходимым. Впрочем, полезнее всего было бы обсуждать со специалистом как ваши решения задач, так и возникающие при решении трудности.

Оглавление.

[1] http://dfgm.math.msu.su/files/skopenkov/lie.pdf. Обновлено 31.03.09

Литература.

[Ad] J. F. Adams, Lectures on Lie groups, W. A. Benjamin Inc., New York, Amsterdam. 1969. Рус. перевод. Дж. Адамс, Лекции по группам Ли, М. Наука, 1979.

[DNF] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, Современная геометрия. Ч. I. М.: Наука. 1979.

[Fo] А. Т. Фоменко, Дифференциальная геометрия и топология: дополнительные главы. РХД: Ижевск, 1999.

[GG] М. Гото и Ф. Д. Гроссханс, Полупростые алгебры Ли.

[Pr] В. В. Прасолов, Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии, М.: МЦНМО, 2004. См. http://www.mccme.ru/prasolov/.

[Pr'] В. В. Прасолов. Элементы теории гомологий. М.: МЦНМО, 2006.

См. http://www.mccme.ru/prasolov/.

[Sk] А. Б. Скопенков, Основы дифференциальной геометрии в интересных задачах, М.: МЦНМО, 2008. http://arxiv.org/abs/0801.1568

[Sk'] A. Skopenkov, A characterization of submanifolds by a homogeneity condition, Topol. Appl., 154 (2007) 1894-1897. http://arxiv.org/abs/0606470.

[Tr] В. В. Трофимов, Ведение в теорию многообразий с симметриями. М: МГУ.

[VO] В. Э. Винберг и А. Л. Онищик, Семинар по группам Ли и алгебраическим группам.

[ZPSSS] Математика в задачах. Сборник материалов московских выездных математических школ. Под редакцией А. Заславского, Д. Пермякова, А. Скопенкова, М. Скопенкова и А. Шаповалова. М.: МЦНМО, 2009. www.mccme.ru/circles/oim/mat.htm

§1. Группы Ли. Изоморфизм Ли.

Понятие группы Ли мотивировано, в частности, теоремой Нетер: группе Ли, сохраняющей систему, соответствуют законы сохранения этой системы (см. формулировку в §6A).

Матричной группой Ли называется замкнутая подгруппа группы $GL_n(\mathbb{R})$ или $GL_n(\mathbb{C})$ или $GL_n(\mathbb{H})$ (о кватернионах см., например, [DNF, I.2.14.3]). Примеры (см. определения в [DNF, I.2.14]):

$$GL_n(\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}), \qquad SL_n(\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}), \qquad O_n, \qquad SO_n, \qquad O_{k,n-k}, \qquad U_n, \qquad SU_n, \qquad Sp_n.$$

1.* Найдите все замкнутые одномерные подгруппы в $SL_2(\mathbb{R})$.

Для подмножества $G \subset \mathbb{R}^k$ отображение $f : G \to \mathbb{R}^m$ называется **гладким** (точнее, дифференцируемым по Уитни), если для любой точки $g_0 \in G$ существуют такие линейный оператор $A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ и бесконечно малая функция $\alpha : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, что для любой точки $z \in G$ выполнено

$$f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + \alpha(z - z_0)|z, z_0|.$$

Функция $\alpha : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ называется *бесконечно малой*, если для любого числа $\epsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для любой точки $x \in \mathbb{R}^k$ если $|x| < \delta$, то $|\alpha(x)| < \epsilon$.

Для подмножеств $G \subset \mathbb{R}^k$ и $H \subset \mathbb{R}^m$ отображение $f : G \to H$ называется **диффеоморфизмом**, если оно гладкое, обратимое и обратное отображение гладкое.

Изоморфизм (Ли) групп Ли — их биективный гомоморфизм, являющийся также диффеоморфизмом. Знак изоморфизма — $\cong$.

Поскольку на

$$\mathbb{R}^m, \quad S^1 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\} \quad \text{и} \quad S^3 = \{z \in \mathbb{H} \ : \ |z| = 1\}$$

имеется структура группы (для S^1 и S^3 — унаследованная из $\mathbb{C}$ и $\mathbb{H}$), то аналогично можно определить изоморфизм между матричной группой Ли и $\mathbb{R}^n$, S^1, S^3, $S^1 \times S^1$, $(S^1)^n \times \mathbb{R}^m$, $S^3 \times SO_3$ и т.д.

2. (a) $SO_2 \cong U_1 \cong S^1$. (b) $SU_2 \cong Sp_1 \cong S^3$.

(c) $SO_3 \cong SU_2/\{\pm 1\} \cong S^3/\{\pm 1\}$. (d) $SO_4 \cong S^3 \times S^3/\{\pm(1,1)\}$.

(Придумайте сами, как придать смысл последним двум утверждениям.)

(e) SO_4 диффеоморфно $S^3 \times SO_3$.

(f)* Не существует изоморфизма Ли между SO_4 и $S^3 \times SO_3$.

(d) Приведите пример матричных групп Ли, которые изоморфны как группы, но не диффеоморфны.

3. (a) **Теорема.** Связная коммутативная матричная группа Ли изоморфна $(S^1)^n \times \mathbb{R}^m$ для некоторых m, n.

(b) Классифицируйте (с точностью до изоморфизма Ли) матричные группы Ли размерности 1.

(c)* Классифицируйте компактные матричные группы Ли размерности 2.

(d)* То же для некомпактных.

Читатель, не знакомый с понятиями гладких многообразий и их диффеоморфизмов [DNF], может опустить остаток этого параграфа, а далее всюду (кроме особо оговоренных случаев) считать, что под группой Ли подразумевается *матричная* группа Ли.

Группой Ли называется конечномерное гладкое многообразие с групповой структурой, задаваемой гладкими отображениями (умножения $\cdot \colon G \times G \to G$, $(a, b) \mapsto ab$ и взятия обратного $^{-1} \colon G \to G$, $a \mapsto a^{-1}$).

Изоморфизм Ли групп Ли определяется так же, как для матричных групп Ли (см. выше).

Даже если наша цель — классификация *матричных* групп Ли, удобно сначала классифицировать группы Ли и отдельно выяснять, какие из них изоморфны матричным.

4. (a) **Теорема Картана.** *Замкнутая подгруппа группы Ли является подмногообразием.*

(b) Матричная группа Ли является группой Ли.

(c) Существует подгруппа группы Ли, являющаяся гладким многообразием (в индуцированной топологии), но не являющаяся подмногообразием. (*Подгруппой Ли* называется подгруппа, являющаяся подмногообразием.)

(d) Если группа задается в $\mathbb{R}^n$ (или в $\mathbb{C}^n$) системой полиномиальных уравнений, причем произведение и взятие обратного элемента задаются полиномами, то это группа Ли.

Произведение задается полиномами, если $(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) = (f_1, \dots, f_n)$ для некоторых полиномов $f_1, \dots, f_n \in \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$.

Указания к 2. (c) Для кватерниона $q \in S^3$ определим $f_q : \{ai + bj + ck\} \to \{ai + bj + ck\}$ формулой $f_q(x) = qxq^{-1}$.

(d) Для кватернионов $p, q \in S^3$ определим $f_{p,q} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ формулой $f_{p,q}(x) = pxq^{-1}$. Возьмем соответствующее отображение $F : S^3 \times S^3 \to SO_4$. Тогда $\ker F = \{\pm(1,1)\}$. Поскольку $dF|_e$

невырожден, то образ отображения F содержит некоторую окрестность единицы. Значит, отображение F сюръективно.

(e) Автодиффеоморфизм $g(x,y) = (xy^{-1}, y)$ произведения $S^3 \times S^3$ переводит $(-1,-1)$ в $(1,-1)$.

(f) [VO-4.4.1, theorem 1].

(g) $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^2$.

Указания к 3. (a) [Pr', 24.1].

(b) Ответ: S^1, $\mathbb{R}$.

(c) Ответ: $S^1 \times S^1$.

Указания к 4. (a) Доказательство см. в [Pr', 24.2] или [Sk'].

(b) Вытекает из теоремы Картана.

(c) Иррациональная обмотка тора $S^1 \times S^1$.

(d) *Алгебраическим многообразием (вложенным аффинным вещественным)* называется подмножество $M \subset \mathbb{R}^n$, выделяемое конечной системой полиномиальных уравнений $f_i(x_1 \dots, x_n) = 0$, $i = 1, \dots, s$. Положим $J(P) := \dfrac{\partial(f_1, \dots, f_s)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}|_P$. Точка P алгебраического многообразия M над $\mathbb{C}$ называется *простой*, если $\operatorname{rk} J(P)$ максимален (среди всех $P \in M$). Точка P алгебраического многообразия M над $\mathbb{R}$ называется *простой*, если она является простой точкой его комплексификации $M(\mathbb{C})$. Тогда *простые точки всегда существуют.* Значит, теорема вытекает из того, что

при полиномиальном изоморфизме алгебраического многообразия (дайте определение!) *простые точки переходят в простые* (докажите для $s = 2$!), и

множество простых точек алгебраического многообразия является гладким многообразием (тоже докажите!).

Используйте *теорему Гильберта о базисе*: из бесконечной системы полиномиальных уравнений можно выбрать конечную подсистему с тем же множеством нулей.

§1A. Топологические свойства групп Ли.

Этот параграф не используется в дальнейшем, а сам использует только определение (матричной) группы Ли.

Какие подмножества (или подмногообразия) евклидовых пространств гомеоморфны (или диффеоморфны) некоторой группе Ли?

Эта проблема интересна как сама по себе, так и в связи с проблемой классификации групп Ли. Интересно, что для некоторых случаев эту проблему проще решать именно классифицировав некоторые группы Ли.

1. Может ли группа Ли быть гомеоморфна

(a) S^1; (b) $(S^1)^n$; (c) $\mathbb{R}$; (d) $\mathbb{Q}$; (e) $[0,1]$; (f) канторову множеству?

2. (a) На канторовом множестве существует структура группы, для которой групповые операции непрерывны.

(b) Существует компактная топологическая группа, не являющаяся группой Ли.

3. Может ли группа Ли быть диффеоморфна

(a) бутылке Клейна? (b) S^2? (c) S^3? (d) $\mathbb{R}P^3$?

(e)* Открытому диску с двумя выколотыми точками? (f)* $S^1 \times S^2$.

4. Каким компактным двумерным многообразиям может быть диффеоморфна группа Ли?

5. Однородные пространства. Пусть группа Ли G транзитивно действует (слева) на гладком многообразии M и H_x — стабилизатор точки $x \in M$. (Необходимые определения прочитайте в [DNF, II-5].)

(a) $H_x \cong H_y$.

(b)* Введите в множестве G/H_x (левых) смежных классов структуру метрического пространства (или гладкого многообразия) и докажите, что G/H_x гомеоморфно (или диффеоморфно) M.

Указания к 1. (a,b,c) Да.
(d,e,f) Нет.
(d) Докажите, что группа Ли локально-компактна.
(e) Докажите, что группа Ли однородна.
(f) Используйте доказательство теоремы Картана.

Указания к 2. (a) Группа A_p p-адических чисел.

Указания к 3. (a,b,e,f) Нет.
(a) Докажите, что группа Ли ориентируема.
(b) Докажите, что на группе Ли существует ненулевое касательное векторное поле.
(c,d) Да.
(e) Докажите, что $\pi_1(G)$ абелева.
(f) Докажите, что $\pi_2(G) = 0$.

Указание к 4. Ответ: только тору. Доказательство аналогично 3ab.

§2. Формулировка основной теоремы

Чтобы сформулировать основную теорему, нам понадобятся следующие определения.

Центр группы — это множество элементов группы, коммутирующих со всеми элементами группы.

1. (a) Центр группы является ее подгруппой.
(b) Найдите центры групп Ли, упомянутых в начале §1.

Мы приведем две формулировки основной теоремы.

Первая — более слабая, для матричных групп Ли. Она использует понятия гомотопии и односвязности, но не использует общего понятия группы Ли (и тем самым понятия гладкого многообразия). Читатель, не знакомый с понятием гладкого многообразия, может изучить доказательство слабой версии: для этого надо пропустить §4 и всюду считать, что рассматриваемые группы Ли матричные. На этом уже видны важнейшие идеи.

Вторая формулировка — более сильная, использующая понятие факторгруппы (по дискретной подгруппе), что принуждает нас работать с общими группами Ли (а не матричными группами Ли или подмногообразиями в $\mathbb{R}^m$). Вторая формулировка не использует понятий гомотопии и односвязности (которые, впрочем, все равно появятся при ее доказательстве).

Два непрерывных отображения $f_0, f_1 : X \to Y$ между метрическими пространствами называются **гомотопными** (обозначение: $f_0 \simeq f_1$), если существует семейство $f_t : X \to Y$ непрерывных отображений, непрерывно зависящее от параметра $t \in [0,1]$. (Последнее эквивалентно существованию такого непрерывного отображения $F : X \times [0,1] \to Y$, что $F(x,0) = f_0(x)$ и $F(x,1) = f_1(x)$.)

Пространство называется **односвязным**, если любые два пути с общими концами гомотопны неподвижно на этих концах.

2. Следующие пространства односвязны.
(a) $\mathbb{R}^n$. (b) S^n при $n \geq 2$. (c) $X \times Y$, где X и Y односвязны.

Теорема классификации компактных групп Ли (для односвязных групп Ли). *Любая односвязная компактная матричная группа Ли разлагается единственным образом (с точностью до порядка сомножителей) в прямое произведение следующих (*простых, *попарно неизоморфных):*

$$SU_n,\ n \geq 2, \quad Spin_n,\ n \geq 7, \quad Sp_n,\ n \geq 2, \quad G_2, \quad F_4, \quad E_n,\ n = 6, 7, 8.$$

Построение (т.е. матричное представление) групп $Spin_n, G_2, F_4$ и E_n см. в [Fo, VO].

3. Каким группам из этого списка изоморфна

(a) S^3? (b) Sp_1? (c) $Spin_n$, $n \le 6$?

4. (a) Пусть H — дискретная (т.е. с дискретной топологией) нормальная подгруппа группы Ли. Введите в множестве G/H смежных классов структуру группы Ли.

(b) Любая дискретная нормальная подгруппа связной группы Ли содержится в ее центре.

Теорема классификации компактных групп Ли. *Любая компактная группа Ли G изоморфна $((S^1)^n \times \widetilde{G})/H$, где*

• $\widetilde{G}$ *— прямое произведение некоторого количества групп из следующего списка:*

$$SU_n,\ n \ge 2, \quad Spin_n,\ n \ge 7, \quad Sp_n,\ n \ge 2, \quad G_2, \quad F_4, \quad E_n,\ n = 6, 7, 8;$$

$\widetilde{G}$ *определяется по G однозначно с точностью до изоморфизма; произведения группы Ли из списка изоморфны тогда и только тогда, когда отличаются порядком сомножителей (в частности, группы Ли из списка попарно не изоморфны);*

• H *— дискретная подгруппа центра группы $(S^1)^n \times \widetilde{G}$, единственная с точностью до автоморфизма этой группы.*

Группа Ли $Spin_n$ определяется как односвязная накрывающая группы SO_n (см. определение, а также теорему существования и единственности в §4), см. матричное представление в [VO]. Построение групп G_2, F_4 и E_n см. в [Fo, VO].

5.* На каких замкнутых 3-многообразиях существует структура группы Ли?

Указание к 4b. Пусть $\alpha : [0, 1] \to G$ — путь с началом в e_G и $p : G \to G/H$ — факторпроекция. Тогда для $x \in H$ имеем $p(\alpha(t)x\alpha^{-1}(t)) = e_{G/H}$, поэтому $\alpha(t)x\alpha^{-1}(t) = x$.

§3. План доказательства основной теоремы

I. Сведение к случаю односвязных групп Ли.

Пусть G_1, G_2 — группы Ли. Отображение $f : G_1 \to G_2$ называется **гомоморфизмом (Ли)**, если f — гомоморфизм групп и гладкое отображение. Изоморфизм группы Ли на себя называется *автоморфизмом (Ли)*.

Теорема о накрытиях. *Для любой связной группы Ли G существуют односвязная группа Ли $\widetilde{G}$ и дискретная подгруппа $C = C_G \subset \widetilde{G}$ центра группы $\widetilde{G}$, для которых $G \cong \widetilde{G}/C$.*

При этом $\widetilde{G}$ единственна с точностью до изоморфизма групп Ли, а C единственна с точностью до автоморфизма группы $\widetilde{G}$.

Схема доказательства приведена в §4.

Группа $\widetilde{G}$ называется *односвязной накрывающей* группы G. Теорема о накрытиях 'сводит' классификацию связных групп Ли к классификации односвязных групп Ли.

Замечание. $C \cong \pi_1(G)$. Определение и способы вычисления фундаментальной группы $\pi_1(G)$ см., например, в [Pr, Sk]. Заметим, что если G компактна и некоммутативна, то C_G конечна.

0. Выведите основную теорему из ее односвязного случая и теоремы о накрытиях (а также классификации накрытий и вычисления фундаментальных групп [Pr]).

II. Сведение к классификации алгебр Ли.

Алгеброй Ли матричной группы Ли G называется множество

$$L(G) := \{a'(0) \mid a(t) \text{ гладкая кривая в } G,\ a(0) = E\} \subset M_n(\mathbb{R}) \quad \text{с операциями}$$

$$(A, \lambda) \mapsto \lambda A, \quad (A, B) \mapsto A + B \quad \text{и} \quad (A, B) \mapsto [A, B] = \mathrm{ad}_A B := AB - BA.$$

1. (a) Это определение осмысленно, т.е. $L(G)$ действительно замкнуто относительно указанных операций.

(b) **Тождество Якоби.** $[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]=0$.

(c) Пусть $a(t)$ и $b(t)$ — гладкие кривые в $GL_n(\mathbb{R})$, причем $a(0)=b(0)=E$ и $a'(0)=A$, $b'(0)=B$. Можно ли выразить через A и B матрицы $(a(t)b(t))''_{tt}|_{t=0}$ или $(a(t)b(t)a(t)^{-1})''_{tt}|_{t=0}$?

2. Если $\sum_{i,j}(x_i^j)^2<1$, то матрица $E+(x_i^j)$ обратима.

3. (a–m) Найдите алгебры Ли для матричных групп Ли, приведенных в §1.

Алгеброй Ли группы Ли G называется касательное пространство $L(G)$ в единице с операциями

$$(\lambda a)(t):=a(\lambda t),\quad (a+b)(t):=a(t)b(t)\quad \text{и}\quad [a,b](t)=\operatorname{ad}_{a(t)}b(t):=a(\sqrt{t})b(\sqrt{t})a(\sqrt{t})^{-1}b(\sqrt{t})^{-1}.$$

Здесь $a,b:[-1,1]\to G$, $a(0)=b(0)=e$; кривые представляют их классы эквивалентности.

4. Определение коммутатора осмыслено, т.е. кривая $[a,b](t)$ действительно дифференцируема.

(a) $(L(G),\cdot,+)$ является векторным пространством.

(b) $a(t)b(t)=a+b+\frac{1}{2}[a,b]+o(t^2)$.

(c) Коммутатор $[\cdot,\cdot]$ кососимметричен.

(d) $a(t)b(t)a(t)^{-1}=b+[a,b]+o(t^2)$

(e) $a(t)b(t)a(t)^{-1}b(t)^{-1}=[a,b]+o(t^2)$.

(f) Коммутатор $[\cdot,\cdot]$ удовлетворяет тождеству Якоби.

Гомоморфизм (Ли) алгебр Ли — линейное отображение, переводящее коммутатор в коммутатор.

Изоморфизм (Ли) алгебр Ли — их изоморфизм как линейных пространств, переводящий коммутатор в коммутатор.

5. (a) Алгебра Ли прямого произведения двух групп Ли изоморфна прямой сумме алгебр Ли сомножителей: $L(G\times H)\cong L(G)\oplus L(H)$.

(b) **Утверждение.** Пусть $f\colon G\to H$ — гомоморфизм групп Ли. Тогда его дифференциал $d_ef\colon L(G)\to L(H)$ в единице — гомоморфизм алгебр Ли.

(c) Алгебры Ли изоморфных групп Ли изоморфны.

(d) Алгебры Ли группы Ли и ее односвязной накрывающей совпадают.

(e) Если $p:G\to H$ гомоморфизм на, имеющий дискретное ядро (т.е. накрывающий гомоморфизм), то $L(G)\cong L(H)$. Более того, $d_ep:L(G)\to L(H)$ — изоморфизм.

Теорема о восстановлении изоморфизма. *Для любого изоморфизма Ли $f:L(G)\to L(H)$ существует единственный изоморфизм Ли $F:G\to H$, для которого $d_eF=f$.*

Следствие. *Односвязные группы Ли с изоморфными алгебрами Ли изоморфны.*

Схема доказательства приведена в §6.

Теорема о восстановлении изоморфизма (вместе с теоремой реализуемости из §6) сводит классификацию односвязных групп Ли к классификации их алгебр Ли. При классификации компактных групп Ли можно обойтись без теоремы реализуемости (но при этом нужно будет проверить компактность алгебр Ли из теоремы их классификации, см. утверждение о реализуемости в конце §2).

Теорема классификации компактных вещественных алгебр Ли. *Любая алгебра Ли компактной группы Ли разлагается единственным образом (с точностью до порядка слагаемых) в прямую сумму алгебр Ли из следующего списка:*

$$su_n(\mathbb{R}),\ n\ge 2,\quad so_n(\mathbb{R}),\ n\ge 7,\quad sp_n(\mathbb{R}),\ n\ge 2,\quad g_2(\mathbb{R}),\quad f_4(\mathbb{R}),\quad e_n(\mathbb{R}),\ n=6,7,8.$$

Это алгебры Ли групп Ли, фигурирующих в основной теореме.

6. Используя сформулированную теорему, докажите следующее.

(a) Основную теорему для односвязного случая.

(b) Односвязная накрывающая любой компактной группы Ли единственным образом (с точностью до порядка сомножителей) разлагается в прямое произведение групп из списка в основной теореме и коммутативных групп $\mathbb{R}$.

Указание к 1a. Пусть $a(t)$ и $b(t)$ — гладкие кривые в $GL_n(\mathbb{R})$, причем $a(0) = b(0) = E$ и $a'(0) = A$, $b'(0) = B$. Тогда

$$a(\lambda t)'_t|_{t=0} = \lambda A, \quad [a(t)b(t)]'_t|_{t=0} = A + B \quad \text{и} \quad [a(\sqrt{t})b(\sqrt{t})a(\sqrt{t})^{-1}b(\sqrt{t})^{-1}]'_t|_{t=0} = AB - BA.$$

Указание к 4. См. добавление к русскому переводу в [Ad].

III. Сведение к классификации компактных простых алгебр Ли.

Матричной алгеброй Ли называется линейное подпространство пространства $M_n(\mathbb{R})$ (или $M_n(\mathbb{C})$ или $M_n(\mathbb{H})$), замкнутое относительно операции $[A, B] = AB - BA$.

Алгеброй Ли называется линейное пространство V с кососимметрическим билинейным отображением $[\cdot,\cdot] : V \times V \to V$, удовлетворяющей тождеству Якоби. Далее в тексте все алгебры Ли будут предполагаться конечномерными и вещественными (если не оговорено другое).

Алгебра Ли называется **компактной**, если существует компактная группа Ли с такой алгеброй Ли. (Заметим, что общепринятым является другое, эквивалентное, определение.)

6.5 Алгебра Ли с нулевым центром компактна тогда и только тогда, когда соответствующая односвязная группа Ли компактна (такая группа существует по теореме реализуемости из §6 и единственная по теореме о накрытиях).

Подмножество $a \subset g$ алгебры Ли g называется **идеалом**, если $[a, g] \subset a$, т.е. $[X, Y] \in a$ для всех $X \in a$ и $Y \in g$.

Алгебра Ли g называется

коммутативной, если $[g, g] \equiv 0$.

простой, если она не имеет собственных ненулевых идеалов, т.е. если все ее идеалы — это $\{0\}$ и сама эта алгебра.

6.7 (a) одномерная коммутативная алгебра Ли проста.

(b) простая коммутативная алгебра Ли одномерна.

Следующий результат сводит классификацию компактных алгебр Ли к классификации компактных *простых* алгебр Ли.

Теорема о разложении компактной вещественной алгебры Ли. *Любая компактная алгебра Ли изоморфна прямой сумме простых компактных алгебр Ли. Такое разложение однозначно с точностью до порядка слагаемых.*

Схема доказательства приведена в §7.

Такое разложение можно записать в виде $L = Z(L) \oplus L_1 \oplus \dots \oplus L_k$, где $Z(L)$ — центр алгебры L, а $L_1, \dots, L_k$ — неодномерные простые идеалы.

IV. Сведение к классификации комплексных простых алгебр Ли.

Комплексные алгебры Ли изучать проще, чем вещественные, потому что поле $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто. Это позволяет разлагать комплексные алгебры Ли в прямую сумму подпространств (теорема о корневом разложении в §10), что облегчает классификацию. Поэтому мы переходим от вещественных алгебр к комплексным.

Комплексификация вещественной алгебры Ли g — это алгебра Ли $g^{\mathbb{C}} := g + ig$, т.е. прямая сумма пространств $g \oplus g$, в которой умножение на комплексное число и скобка Ли определены формулами

$$(a + bi)(x, y) = (ax - by, bx + ay), \quad \text{и} \quad [(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = ([x_1, x_2] - [y_1, y_2], [x_1, y_2] + [x_2, y_1]).$$

Лемма о простоте комплексификации. *Если g — неодномерная простая вещественная компактная алгебра Ли, то ее комплексификация $g^{\mathbb{C}}$ тоже проста.*

Схема доказательства приведена в §7.

Теорема комплексификации. *Любая простая комплексная алгебра Ли изоморфна комплексификации некоторой своей простой компактной вещественной подалгебры (т.е. подмножества, замкнутого относительно операций сложения, коммутирования и умножения на вещественное число). Эта подалгебра единственна с точностью до изоморфизма.*

Схема доказательства *единственности* приведена в §8. При этом используется теорема о невырожденности, набросок доказательства которой дан в §10. Также в §10 приводятся определения понятий и схемы доказательств утверждений, нужные для доказательства следующего результата.

Существование можно доказать напрямую. Оно вытекает также из следующих двух результатов.

Теорема классификации простых комплексных алгебр Ли. *Комплексные простые некоммутативные алгебры Ли исчерпываются следующим списком попарно неизоморфных алгебр Ли:*

$$sl_n(\mathbb{C}),\ n \geqslant 2, \quad so_n(\mathbb{C}),\ n \geqslant 7, \quad sp_n(\mathbb{C}),\ n \geqslant 2, \quad g_2(\mathbb{C}), \quad f_4(\mathbb{C}), \quad e_n(\mathbb{C}),\ n = 6,7,8.$$

Схема доказательства приведена в §11 (и использует §10).

Утверждение о реализуемости. *Алгебры Ли из списка в предыдущей теореме изоморфны комплексификациям некоторых своих простых компактных вещественных подалгебр (в частности, для алгебр $sl_n(\mathbb{C})$, $so_n(\mathbb{C})$ и $sp_n(\mathbb{C})$ это соответственно $sl_n(\mathbb{R})$, $so_n(\mathbb{R})$ и $sp_n(\mathbb{R})$). Эти компактные алгебры являются соответственно алгебрами Ли компактных групп из списка в основной теореме.*

7. (a) Докажите утверждение о реализуемости.

(b) Выведите из утверждений этого пункта классификацию компактных вещественных простых алгебр Ли.

Замечание об использовании алгебр Ли.

В настоящем тексте алгебры Ли вводятся раньше того момента, в который их введение дейтсвительно неизбежно для классификации компактных групп Ли. Это сделано, поскольку понятие алгебры Ли мотивировано приложениями (см., например, §6A).

Построение системы корней компактной группы Ли (без использования алгебр Ли, формы Киллинга и комплексификации, но с использованием инвариантных форм и максимальных торов) см. в [Pr', 24.3 и 24.4] или [Ad, главы 4 и 5]. Завершение доказательства теоремы классификации компактных групп Ли приводится в добавлении к русскому переводу [Ad] (в теореме 1 группа Ли предполагается односвязной; для доказательства теоремы 2 нужны комплексификации и форма Киллинга) с использованием алгебр Ли.

§4. Сведение к случаю односвязных групп Ли

Эпиморфизм $p : G \to H$ групп Ли называется *накрывающим гомоморфизмом*, если p диффеоморфно отображает некоторую окрестность единицы в группе G на некоторую окрестность единицы в группе H.

Отображение $p : \widetilde{X} \to X$ между метрическими пространствами называется *накрытием*, если для любой точки $x \in X$ существуют ее окрестность Ox, дискретное множество F и гомеоморфизм $h : p^{-1}Ox \to Ox \times F$, для которых $\mathrm{pr}_F \circ h = p$.

1. Эпиморфизм $p : G \to H$ между группами Ли является накрывающим гомоморфизмом тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих равносильных условий:

(a) $\ker p$ дискретно;

(b) $d_e p : T_e G \to T_e H$ изоморфизм (линейных пространств);

(c) p накрытие.

2. Пусть $p : \widetilde{X} \to X$ — накрытие связного гладкого подмногообразия $X \subset \mathbb{R}^m$.

(a) Для любых пути $s : I \to X$ и точки $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ с условием $p(\widetilde{x}) = s(0)$ существует путь $\widetilde{s} : I \to \widetilde{X}$ (*поднятие* пути s) такой, что $\widetilde{s}(0) = \widetilde{x}$ и $p \circ \widetilde{s} = s$.

(b) Такое поднятие единственно, т.е. если $\widetilde{f_1}, \widetilde{f_2} : I \to \widetilde{X}$ — два поднятия одного и того же отображения $f : I \to X$, причем $\widetilde{f_1}(0) = \widetilde{f_2}(0)$, то $\widetilde{f_1}(t) = \widetilde{f_2}(t)$ для любого t.

(c) Докажите *основную теорему топологии*: существует взаимно-однозначное соответствие между гомотопическими классами отображений окружности в окружность (сохраняющих отмеченную точку) и множеством $\mathbb{Z}$.

(d) *Лемма о поднятии гомотопии.* Для любых гомотопии $\{f_t : I \to X\}_{t\in I}$ и поднятия $\widetilde{f_0} : I \to \widetilde{X}$ существует единственное поднятие $\{\widetilde{f_t} : I \to \widetilde{X}\}_{t\in I}$ гомотопии f_t.

(e) *Теорема о поднятии отображения.* Для любого гладкого отображения $f : X \to X'$, односвязных накрытий $p : \widetilde{X} \to X$, $p' : \widetilde{X}' \to X$ и таких точек $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{X}$, $\widetilde{x}'_0 \in \widetilde{X}'$, что $fp(\widetilde{x}_0) = p'(\widetilde{x}'_0)$ существует и единственно гладкое отображение $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to \widetilde{X}'$ (*поднятие* отображения f), для которого $p'\widetilde{f} = fp$ и $\widetilde{f}(\widetilde{x}_0) = \widetilde{x}'_0$.

3. (a) Для любого гладкого многообразия G существует односвязное гладкое многообразие $\widetilde{G}$ и накрытие $p : \widetilde{G} \to G$.

Это один из простейших примеров, в котором удобно рассматривать абстрактные гладкие многообразия вместо гладких подмногообразий в $\mathbb{R}^m$ — и, как следствие, группы Ли вместо матричных групп Ли.

(b) Такое односвязное гладкое многообразие $\widetilde{G}$ единственно с точностью до диффеоморфизма, а накрытие $p : \widetilde{G} \to G$ единственно с точностью до эквивалентности.

(c) Для любой группы Ли G существует односвязная группа Ли $\widetilde{G}$ и накрывающий гомоморфизм $p : \widetilde{G} \to G$. Такая группа Ли $\widetilde{G}$ единственна с точностью до изоморфизма Ли, а накрытие $p : \widetilde{G} \to G$ единственно с точностью до эквивалентности.

4. (a) Докажите существование в теореме о накрытиях.

(b) Докажите единственность в теореме о накрытиях: для дискретных подгрупп C_1 и C_2 центра группы Ли G имеем $G/C_1 \cong G/C_2$ тогда и только тогда, когда C_1 переводится в C_2 некоторым автоморфизмом группы G.

5. Пусть $p : \widetilde{G} \to G$ — накрывающий гомоморфизм.

(a) Для любой петли с началом в e ее поднятия, начинающиеся разных точках множества $p^{-1}(e)$, одновременно замкнуты или нет. (Такие накрытия называются *регулярными*.)

(b) Пусть $\widetilde{G}$ связна. Для точек $a, b \in p^{-1}(e)$ выберем пути $s_a, s_b : I \to \widetilde{G}$, соединяющие единицу $\widetilde{e} \in \widetilde{G}$ с a и b. Тогда ab равно концу того поднятия пути $(s_a \circ p)(s_b \circ p)$, которое начинается в $\widetilde{e}$.

(c) Если $\widetilde{G}$ односвязна, то $\pi_1(G) \cong p^{-1}(e)$.

Указание к 2 и 3. [Tr, §11].

Указания к 4 (a) [VO, 1.3.3]

(b) Поднятие $\varphi : \widetilde{G} \to \widetilde{G}'$ изоморфизма $\psi : \widetilde{G}/C \to \widetilde{G}'/C'$, переводящее единицу в единицу, является изоморфизмом Ли и переводит C в C'.

§6A. Теорема Нетер

Следующие задачи не используются при доказательстве основной теоремы, но показывают, как алгебры Ли возникают в приложениях.

1. (a) Пусть $L(p,q)$ и $p(t)$ — такие гладкие функции, что

$$(\frac{\partial L}{\partial q}|_{p=p(t),q=p'(t)})'_t = \frac{\partial L}{\partial p}|_{p=p(t),q=p'(t)}.$$

Пусть $\{h^s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ — однопараметрическая группа диффеоморфизмов прямой (т.е. действие группы $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}$ диффеоморфизмами), причем $L(p,q) = L(h^s(p), h^s(p)'_p q)$. Определим функцию

$$I(p,q) \quad \text{формулой} \quad I(p,q) := \frac{\partial L}{\partial q} h^s(p)'_s|_{s=0}.$$

Тогда величина $I(p(t),q(t))$ не зависит от t.

(b) **Теорема Нетер.** Пусть $L(p,q)$ и $p(t)$ — такие гладкие вектор-функции, что

$$(\frac{\partial L}{\partial q}|_{p=p(t),q=p'(t)})'_t = \frac{\partial L}{\partial p}|_{p=p(t),q=p'(t)}.$$

Пусть $h : \mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{R})$ — гладкий гомоморфизм, образ которого замкнут (т.е. однопараметрическая подгруппа). Обозначим $h^s := h(s)$. Пусть $L(p,q) = L(h^s(p), (h^s(p))'_p q)$ для любого $s \in \mathbb{R}$. Определим функцию

$$I_H(p,q) \quad \text{формулой} \quad I_H(p,q) := \frac{\partial L}{\partial q} h^s(p)'_s|_{s=0}.$$

Тогда величина $I_H(p(t),q(t))$ не зависит от t.

2. Если для двух гладких гомоморфизмов $H_1, H_2 : \mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{R})$ с замкнутыми образами выполнено $H'_1(0) = H'_2(0)$, то $H_1 = H_2$.

3. Пусть $F, G, H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$, $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ — гладкие функции, причем

$$p'_i(t) = -\frac{\partial H(p,q)}{\partial q_i}|_{p_i=p_i(t),q_i=q_i(t)},$$

$$q'_i(t) = \frac{\partial H(p,q)}{\partial p_i}|_{p_i=p_i(t),q_i=q_i(t)}.$$

(a) $H(p(t),q(t))$ не зависит от t.

(b) $F(p(t),q(t))$ не зависит от t тогда и только тогда, когда $\sum\limits_i (\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial F}{\partial q_i}) = 0$ для любого t.

(c) Если $F(p(t),q(t))$ и $G(p(t),q(t))$ не зависят от t, то для функции $\{F,G\}(p,q)$, определенной формулой

$$\{F,G\}(p,q) := \sum_{i=1}^n (\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i})$$

величина $\{F,G\}(p(t),q(t))$ не зависит от t.

См. также В. И. Арнольд, Мат. методы класс. механики, §20, §40, добавление 5. Как описать по группе Ли, сохраняющей гамильтонову систему, алгебру *первых интегралов* системы относительно скобки Пуассона?

4. Существует мономорфизм алгебры Ли группы Ли, сохраняющей систему, в алгебру *первых интегралов* гамильтоновой системы (относительно сложения, умножения на число и скобки Пуассона).

Указание. Используйте теорему Нетер.

§6. Сведение к классификации алгебр Ли

0. (a) Докажите единственность в теореме о восстановлении изоморфизма.

(b) Докажите существование в теореме о восстановлении изоморфизма.

(c) *Слабая теорема о представлениях.* Пусть G — односвязная группа Ли, M — гладкое многообразие и $f : L(G) \to V(M)$ гомоморфизм Ли в алгебру Ли полных гладких векторных полей на M. Тогда существует единственное действие G на M, касательный гомоморфизм которого совпадает с f. (Векторное поле *полно*, если каждая его траектория определена на всем $\mathbb{R}$.)

Указание к 0ab. Используйте теорему о единственности и о существовании решения дифференциального уравнения. [VO, 1.2.6, 1.2.8]

(c) Аналогично (a,b).

Содержание остатка этого пункта формально не используется для доказательства основной теоремы. Но изучение экспоненциального отображения подводит читателя к доказательству теоремы о восстановлении изоморфизма. Мы также приводим для сведения результаты, не используемые в дальнейшем.

Экспоненциальное отображение $\exp : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ определяется формулой

$$\exp X := E + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \dots .$$

1. (a) Этот ряд сходится.

(b) Отображение exp может быть не инъективным.

(c) Отображение exp может быть не сюръективным.

2. (a) Если $XY = YX$, то $\exp(X + Y) = \exp X \exp Y$.

(b) Матрица $\exp X$ обратима и $(\exp X)^{-1} = \exp(-X)$.

(c) $\exp(X^T) = (\exp X)^T$.

(d) $\det \exp X = e^{\operatorname{tr} X}$.

3. (a) $\exp L(G) \subset G$.

(b) **Теорема.** Экспоненциальное отображение является диффеоморфизмом некоторой окрестности нулевой матрицы в $L(G)$ на некоторую окрестность единичной матрицы в G.

(c)* **Теорема.** Для компактной связной группы Ли экспоненциальное отображение сюръективно.

(d) Образ при экспоненциальном отображении линейного подпространства g в пространстве матриц является подгруппой тогда и только тогда, когда g — алгебра Ли (т.е. замкнуто относительно коммутатора).

4. Векторные поля. $L(G)$ изоморфна алгебре правоинвариантных векторных полей на G. (Значит, правоинвариантный дифур на G достаточно писать только в единице группы). Необходимые определения прочитайте в [DNF, I-24.1,3].

Обозначим через

gl_n алгебру Ли всех матриц $n \times n$;

t_n алгебру Ли верхнетреугольных матриц $n \times n$;

ut_n алгебру Ли верхнетреугольных матриц $n \times n$ с нулями на диагонали;

sl_n алгебру Ли матриц $n \times n$ с нулевым следом;

so_n алгебру Ли кососимметричных матриц $n \times n$;

sp_n алгебру Ли матриц $2n \times 2n$ вида $\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & -X^T \end{pmatrix}$, где Y и Z симметричны.

1. Выберите такой базис A, B, C в

(a) so_3, что $[A, B] = C$, $[B, C] = A$ и $[C, A] = B$.

(b) su_2, что $[A, B] = 2C$, $[B, C] = 2A$ и $[C, A] = 2B$.

(c) $sl_2(\mathbb{R})$, что $[A,B]=-2C$, $[B,C]=2A$ и $[C,A]=-2B$.

2. (a) $su_2 \cong so_3$. (b) $so_4 \cong so_3 \oplus so_3$. (c) $sl_2(\mathbb{R}) \cong so_{1,2} \cong su_{1,1}$.

3. Классифицируйте с точностью до изоморфизма алгебры Ли (матричных групп Ли) размерностей

(a) 1 и 2; (c)* 3.

4. Изоморфны ли следующие алгебры Ли (одинаковых размерностей) над $\mathbb{C}$?

(a) t_3 и $so_3 \oplus so_3$; (b) ut_3 и t_2; (c) gl_6 и so_9; (d) gl_3 и $so_3 \oplus so_4$;

(e) sl_2, so_3 и sp_1; (f) sl_4 и so_6; (g)* so_5 и sp_2; (h)* so_{2n+1} и sp_n.

9. Любая матричная алгебра Ли изоморфна алгебре Ли некоторой матричной группы Ли.

Теорема реализуемости. *Для любой алгебры Ли существует группа Ли с такой алгеброй Ли* [GG, VO].

10. (a) Множество $\{\mathrm{ad}_X\}_{X\in G}$ является подалгеброй в $L(GL(g))$.

(b) Эта подалгебра не обязательно изоморфна g.

Алгебра Ли g называется *полупростой*, если она не имеет ненулевых коммутативных идеалов.

10. (c) Для полупростой g эта подалгебра изоморфна g.

(d) Полупростая алгебра Ли изоморфна матричной.

(e) Докажите теорему о реализуемости для полупростых алгебр Ли.

Теорема. *Любая конечномерная вещественная или комплексная алгебра Ли изоморфна матричной* [GG, 1.10.1].

Указание к 1. (b) $\exp(2\pi I)=E$.

(c) $\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ не лежит в образе.

Указание к 3a. Для $a=A'(0)\in L(G)$ напишем уравнение $F(0)=E$ и $F'(t)=(A(s)F(t))'_s|_{s=0}$ в $T_{F(t)}G$. По теореме о единственности его решение есть $F(t)=\exp at$. Значит, $\exp a = F(1)\in G$.

§7. Доказательство теоремы о разложении алгебры Ли

Для матричной группы Ли G и $x\in G$ определим отображение

$$\mathrm{Ad}_x : L(G)\to M_n(\mathbb{R}) \quad \text{формулой} \quad \mathrm{Ad}_x(H)=xHx^{-1}.$$

Для группы Ли G и $x\in G$ определим отображение

$$\mathrm{Ad}_x : L(G)\to L(G) \quad \text{формулой} \quad \mathrm{Ad}_x(H(t))=xH(t)x^{-1}.$$

6. (a) Если G коммутативна, то $\mathrm{Ad}_x=\mathrm{id}$.

(b) $\mathrm{Ad}_x L(G)\subset L(G)$ для матричной группы Ли.

(c) Эти определения согласованы.

(d) $\mathrm{Ad}_x=(xhx^{-1})'_h|_{h=e}$.

(e) Подмножество алгебры Ли является идеалом тогда и только тогда, когда оно Ad-инвариантно (т.е. инвариантно относительно Ad_x для любого $x\in G$).

(f) Идеал является простым тогда и только тогда, когда он Ad-неприводим.

Для разложения алгебры Ли в прямую сумму простых идеалов нужно поле инвариантных форм максимальной размерности на G.

7. Пусть G — компактная группа Ли.

(a) $L(G)$ разлагается (пока как линейное пространство, а не как алгебра Ли!) в прямую сумму Ad-инвариантных подпространств L_i, не содержащих собственных Ad-инвариантных подпространств (т.е. неприводимых).

Предостережение: разложимость в прямую сумму Ad_X-инвариантных Ad_X-неприводимых подпространств для *одного* X доказывается несложно (с использованием инвариантного скалярного произведения). Для *всех* X — сложнее, см. далее.

(b) Подпространства L_i являются простыми идеалами.

Нужно доказать, что полученные простые идеалы являются алгебрами Ли компактных групп Ли. Первый способ намечен в следующей задаче.

8. Пусть $L(G) = \oplus_{i=1}^n L_i$ — разложение, полученное в предыдущей задаче.

(a) $L(Z(G)) = Z(L(G))$

(b) $\mathrm{ad}_X |_{L_1 \oplus \dots \oplus \hat{L}_i \oplus \dots \oplus L_n} = \mathrm{id}$ для $X \in L_i$.

(c) Обозначим $G_i := \{x \in G \mid \mathrm{Ad}_x |_{L_1 \oplus \dots \oplus \hat{L}_i \oplus \dots \oplus L_n} = \mathrm{id}\}$. Тогда G_i подгруппа Ли, $L(G_i) = L_i$ и $G_i \cap G_j = \{e\}$.

(d) **Теорема о разложении групп Ли.** Компактная группа Ли разлагается в прямое произведение простых компактных групп Ли.

Указание: рассмотрите гомоморфизм 'произведения' $G_1 \times \dots \times G_n \to G$.

Второй способ: непосредственно доказать, что всякая простая алгебра Ли g, обладающая инвариантным скалярным произведением, является компактной, а именно, она является алгеброй Ли группы Ли $\overline{\mathrm{Int}\, g}$. (Из этого будет следовать, что любая, не обязательно простая, вещественная алгебра Ли, обладающая инвариантным скалярным произведением, тоже является компактной. В самом деле, согласно уже доказанному мы можем представить ее в виде прямой суммы коммутативной алгебры и нескольких простых. В качестве компактной группы Ли для исходной алгебры нужно взять прямое произведение групп для этих простых алгебр и тора $(S^1)^d$, где d —размерность центра исходной алгебры.)

Пусть g — компактная алгебра Ли. Определим подгруппу $\mathrm{Int}\, g$ в $GL(g)$ как порожденную операторами вида $\exp \mathrm{ad}_X$, $X \in g$. Ее замыкание $\overline{\mathrm{Int}\, g}$ есть замкнутая подгруппа в $GL(g)$.

Пусть в g задано инвариантное скалярное произведение. Обозначим через $O(g)$ группу ортогональных преобразований пространства g.

3. $\overline{\mathrm{Int}\, g} \subset O(g)$. (Значит, алгебра Ли компактной группы Ли имеет инвариантное скалярное произведение; без теоремы о матричности, см. детали в [Ad69, 138-139]. Доказательство обратного факта, не использующее классификации, см. в [Ad69, Добавление, §3].)

Из этого и теоремы Картана (для матричных групп Ли) вытекает, что $\overline{\mathrm{Int}\, g}$ — компактная группа Ли. В самом деле, группа $\overline{\mathrm{Int}\, g}$ — замкнутая подгруппа в группе Ли $GL(g)$, а кроме того, группа $O(g)$ компактна.

Третий способ. При классификации компактных групп Ли (пункт 4), набросок которой приведен далее, для компактных алгебр Ли используется только наличие Ad-инвариантного скалярного произведения. То есть будет доказано, что:

1) комплексификация простой вещественной алгебры Ли с этим свойством проста;

2) простая комплексная алгебра Ли может иметь не более одной (с точностью до изоморфизма) вещественной формы с этим свойством.

А из теоремы классификации простых комплексных алгебр Ли и утверждения о реализуемости следует, что всякая простая комплексная алгебра Ли имеет компактную вещественную форму.

Лемма об инвариантной форме. *На любой компактной группе Ли G размерности n существует невырожденная (би)инвариантная (т.е. инвариантная относительно левых и правых сдвигов) дифференциальная n-форма ω. Такая форма единственна с точностью до пропорциональности (и, например, однозначно задается условием $\int_G \omega = 1$).*

1. (*план доказательства*) (e) Ad_x обратимо.

(f) $\det(\mathrm{Ad}_x : T_eG \to T_eG) = 1$.

(g) $\mathrm{Ad} : G \to GL(T_eG)$ не обязательно инъективно.

(h) Докажите лемму.

Указание к 1. (f) [Pr, теорема 24.5].

(g) Возьмем произвольную n-форму ω_e в T_eG. Она однозначно определяет правоинвариантную n-форму и левоинвариантную n-форму на G. В любой точке $x \in G$ одна форма получается из другой умножением на определитель оператора Ad_x, который равен 1. Поэтому эти формы совпадают и биинвариантны. Ввиду компактности интеграл от них конечен. Умножая форму на константу, сделаем интеграл равным единице. [Pr, теорема 24.6].

Лемма об инвариантном скалярном произведении на группе Ли. *На любой компактной группе Ли G существует инвариантное поле скалярных произведений.*

2. (a) Если G компактная подгруппа в $GL(\mathbb{R}^n)$, то $\mathbb{R}^n$ имеет инвариантное скалярное произведение. (Значит, G изоморфна подгруппе в SO_n.)

(b) Докажите лемму об инвариантном скалярном произведении на группе Ли.

(c) Докажите лемму об инвариантном скалярном произведении на алгебре Ли.

Скалярным произведением на линейном пространстве называется положительно определенная симметричная билинейная форма на нем.

Лемма об инвариантном скалярном произведении на алгебре Ли. *На алгебре Ли компактной группы Ли G существует скалярное произведение, относительно которого все операторы* Ad_x, $x \in G$, *ортогональны, и все операторы* ad_X, $X \in L(G)$, *кососимметричны:*

$$(\mathrm{ad}_X Y, Z) = -(Y, \mathrm{ad}_X Z) \quad \text{или} \quad ([X,Y],Z) = -(Y,[X,Z]) \quad \text{для всех} \quad X, Y, Z \in L(G).$$

Такое скалярное произведение называется *инвариантным.*

Замечание. Верно и обратное: (вещественная) алгебра Ли, имеющая инвариантное скалярное произведением, является алгеброй Ли некоторой компактной группы Ли.

6.5. Алгебра Ли компактной группы Ли изоморфна подалгебре в so_n.

Указание к 2a. Если G конечна, то для любого скалярного произведения $(\cdot,\cdot)$ на $\mathbb{R}^n$ форма $(u,v)_G := \sum_{g\in G}(gu,gv)$ искомая. Для бесконечной G суммирование заменяется на интегрирование по инвариантной форме.

В оставшейся части этого пункта намечено доказательство теоремы о разложении (задача 7). Нужно взять $V = L(G)$ и G — образ группы Ли при присоединенном представлении.

Пусть V — линейное пространство, а G — подгруппа в группе $GL(V)$ обратимых линейных преобразований. Будем называть V **неприводимым относительно** G, если не существует ненулевого собственного подпространства $V_1 \subset V$, инвариантного относительно всех операторов $g \in G$. (Если это не так, то можно ограничить все эти операторы на V_1. Пространство V_1 называют *G-инвариантным.*)

Утверждение 2. *Пусть V — линейное пространство, а G — компактная подгруппа Ли в группе $GL(V)$. Тогда V разлагается в прямую сумму G-инвариантных неприводимых подпространств.*

Набросок доказательства. Индукция по $\dim V$. Для $\dim V = 1$ все очевидно. Пусть теперь для всех размерностей, меньших $\dim V$, утверждение доказано. Пусть само V приводимо, т.е. некоторое подпространство $V_1 \subset V$ G-инвариантно. Докажем, что тогда $V = V_1 \oplus V_2$, где V_2 тоже G-инвариантно. (Тогда по предположению индукции V_1 и V_2 разлагаются в прямую сумму неприводимых, и утверждение будет доказано.)

Очевидно, каждый оператор g группы G определяет оператор $\tilde{g}$ на V/V_1; полученная группа $\tilde{G}$ — компактная подгруппа Ли в $GL(V/V_1)$. Стандартная проекция $\pi\colon V \to V/V_1$ обладает тем свойством, что для всех $g \in G$ $\pi \circ g = \tilde{g} \circ \pi$. Мы хотим построить линейное отображение $f\colon V/V_1 \to V$ такое, что $\pi \circ f = id$ и $g \circ f = f \circ \tilde{g}$ для всех $g \in G$, и взять $V_2 = \operatorname{im} f$.

Для этого построим сначала какое-нибудь линейное отображение $\varphi\colon V/V_1 \to V$ со свойством $\pi \circ \varphi = id$ (это возможно, т.к. всякое подпространство линейного пространства выделяется прямым слагаемым), а затем проинтегрируем по группе G относительно инвариантной формы: $f = \int\limits_{g \in G} g\varphi\tilde{g}^{-1}\omega$. $\diamond$

Продолжим доказательство теоремы о разложении. Группа $G := \overline{\operatorname{Int} L}$ — компактная подгруппа в $GL(L)$. Согласно утверждению 2, $L = L_1 \oplus \dots \oplus L_s$, где $L_1, \dots, L_s$ — неприводимые инвариантные подпространства. Чтобы завершить доказательство теоремы, достаточно доказать следующие утверждения.

а) G-инвариантные подпространства — это в точности идеалы в L.

б) $[L_i, L_j] = 0$ при $i \neq j$.

в) Если M — идеал в L_i, то $[L_j, M] = 0$ при $j \neq i$, т.е. M — идеал в L. Тогда $M = L_i$ или $M = 0$ в силу неприводимости.

г) Пусть идеалы $L_1, \dots, L_m$ — абелевы (одномерные), а $L_{m+1}, \dots, L_s$ — нет. Тогда $L_i \cap Z(L) = 0$ при $i > m$, $L_1 \oplus \dots \oplus L_m \subset Z(L)$.

д) $Z(L) = L_1 \oplus \dots \oplus L_m$.

е) Если $i > m$, то $\exp \operatorname{ad} x$ для $x \in L_i$ нетривиально действует на L_i и тривиально — на L_j при $i \neq j$.

ж) *Лемма Шура.* Пусть G — группа, V_1 и V_2 — линейные пространства. Пусть имеются два гомоморфизма групп $\rho_1\colon G \to GL(V_1)$ и $\rho_2\colon G \to GL(V_2)$, причем V_1 неприводимо относительно группы $\operatorname{im}\rho_1$, а V_2 — относительно $\operatorname{im}\rho_2$. Пусть $f\colon V_1 \to V_2$ — такое линейное отображение, что $f \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ f$ для всех $g \in G$. Тогда f — либо нулевое, либо изоморфизм.

з) Любой неабелев простой идеал в L совпадает с одним из L_i при $i > m$. (В самом деле, только одна из проекций его на L_i может быть изоморфизмом.)

Следствие. Идеалы $L_{m+1}, \dots, L_s$ определены однозначно. $\diamond$

и) $L_{m+1}, \dots, L_s$ — компактные алгебры Ли.

Очевидно, эти алгебры Ли обладают инвариантным скалярным произведением (индуцированным из L). $\diamond$

§8. Доказательство леммы о простоте комплексификации

Лемма о простоте комплексификации вытекает из задач 2.b и 4.

1. Пусть σ обозначает сопряжение в $g^{\mathbb{C}}$ относительно g.

(a) Если $h \subset g^{\mathbb{C}}$ — такой идеал, что $\sigma h = h$, то либо $h = 0$, либо $h = g^{\mathbb{C}}$.

(b) Если h — собственный идеал в $g^{\mathbb{C}}$, то $g^{\mathbb{C}} = h \oplus \sigma h$.

2. *Комплексной структурой Ли* на вещественной алгебре Ли L называется линейное отображение $J\colon g \to g$ такое, что $J^2 = -id$ и $[Jx, y] = [x, Jy]$ для всех $x, y \in g$. (Полагая $(a + bi)x = ax + bJx$ для $a, b \in \mathbb{R}$ и $x \in g$, мы превращаем g в комплексную алгебру Ли.)

(a) Если h — собственный идеал в $g^{\mathbb{C}}$, то $J\colon x + y \mapsto ix - iy$, $x \in h$, $y \in \sigma h$, — корректно определенная комплексная структура Ли в g.

(b) Если g — простая вещественная алгебра Ли, то либо $g^{\mathbb{C}}$ проста, либо g имеет комплексную структуру Ли.

3. Пусть алгебра Ли L обладает инвариантным скалярным произведением w и пусть $J\colon g \to g$ — комплексная структура Ли. Рассмотрим разложение $L = Z(L) \oplus L_1 \oplus \dots \oplus L_k$ в прямую сумму центра и полупростых идеалов. Положим $I := L_1 \oplus \dots \oplus L_k$.

(a) $[g, g] = I$.

(b) $JI = [Jg, g]$.

(c) $JI = I$.

(d) $J|_I$ — симметрическое преобразование относительно w.

(e) все собственные значения $J|_I$ вещественны.

(f) $I = 0$.

Указание. Следует из (e) и $(J|_I)^2 = -Id$.

4. Если вещественная алгебра Ли имеет инвариантное скалярное произведение и комплексную структуру Ли, то она коммутативна.

§9. Доказательство единственности в теореме комплексификации

Пусть g_1, g_2 — такие две простые компактные вещественные подалгебры простой комплексной алгебры Ли g, что $g \cong g_1^{\mathbb{C}} \cong g_2^{\mathbb{C}}$. Нужно построить автоморфизм $\varphi\colon g \to g$, переводящий g_1 в g_2. Обозначим через τ и σ сопряжения относительно g_1 и g_2, соответственно: для $X, Y \in g_1$ положим $\tau(X + iY) := X - iY$; σ определяется аналогично. Искомый автоморфизм задается формулой $\rho := ((\sigma\tau)^2)^{1/4}$. Чтобы извлечь корень четвертой степени из оператора, мы докажем, что $(\sigma\tau)^2$ — положительный оператор относительно некоторого положительно определенного скалярного произведения на алгебре g. А это будет вытекать из симметричности и невырожденности оператора $\eta := \sigma\tau$. Для того, чтобы определить такое скалярное произведение, нам потребуется следующая билинейная форма, которую можно ввести на любой алгебре Ли.

Пусть g — алгебра Ли (над $\mathbb{R}$ или над $\mathbb{C}$). Ее билинейная **форма Киллинга** определяется формулой

$$(X, Y) := \operatorname{tr} \operatorname{ad}_X \operatorname{ad}_Y .$$

(Как известно, след линейного оператора не зависит от базиса.)

Отметим, что форма Киллинга не обязана быть невырожденной. Например, форма Киллинга коммутативной алгебры Ли — тождественно нулевая.

Заметим, что форма Киллинга понадобится нам не только в этом параграфе, но и в §11.

Осталось доказать следующие три леммы.

Лемма 1. *Формула $f(X, Y) := -(X, \sigma Y)$ задает положительно определенную эрмитову форму на g.*

Лемма 2. *Оператор $\eta := \sigma\tau$ симметричен относительно формы f.*

Лемма 3. *Для $\rho := (\eta^2)^{1/4}$ имеем $\rho g_1 = g_2$.*

Доказательства лемм 1 и 2 намечены в следующих несложных задачах (при этом в одной из них используется нетривиальный результат, доказанный в следующем параграфе). Более конкретно, лемма 1 доказывается в задачах 2–4, а лемма 2 в задаче 1.

1. (a) η — (обычный линейный) автоморфизм алгебры Ли g.

(b) Форма Киллинга на алгебре Ли инвариантна относительно автоморфизмов этой алгебры.

(c) Докажите лемму 2.

Указание: из (a) и (b) получим: $f(\eta X, Y) = -(\eta X, \tau Y) = -(X, \eta^{-1}\tau Y) = -(X, \tau\sigma\tau Y) = f(X, \eta Y)$.

2. (a) f — полуторалинейная форма на g (т.е. f линейна по первому аргументу и $f(Y, X) = \overline{f(X, Y)}$ для всех $X, Y \in g$).

(b) Форма Киллинга на вещественной алгебре Ли, обладающей инвариантным скалярным произведением, неположительно определена.

Указание. Это следует из того, что в ортонормированном относительно инвариантного скалярного произведения базисе все операторы ad_X, $X \in g$, записываются кососимметрическими матрицами.

(c) Пусть a — вещественная форма некоторой комплексной алгебры Ли h, а $(\cdot,\cdot)_a$ и $(\cdot,\cdot)_h$ — формы Киллинга на a и на h, соответственно. Тогда $(X,Y)_h = 2(X,Y)_a$ для всех $X, Y \in a$.

3. Для подмножества $M \subset g$ обозначим $M^\perp := \{x \in g : \forall y \in g : \ M(x,y) = 0\}$.

(a) Если a — идеал, то $a^\perp$ — тоже идеал.

(b) Если a — идеал, то форма Киллинга на a совпадает с ограничением формы Киллинга на g на идеал a.

(c)* **Лемма о нулевой форме Киллинга.** Если форма Киллинга алгебры Ли L тождественно равна нулю, то $[L,L] \neq L$.

Указание: доказательство нетривиально и приводится в следующем параграфе.

(d) Выведите из (a,b,c) следующую теорему о невырожденности формы Киллинга

Теорема о невырожденности формы Киллинга. *Форма Киллинга некоммутативной комплексной простой алгебры Ли невырождена.*

Указание к 3d. Действительно, если форма Киллинга алгебры Ли g вырождена, то $g^\perp$ — ненулевой идеал в силу 3a. Тогда собственная форма Киллинга на $g^\perp$ равна нулю в силу 3b. Если $g^\perp = g$, то $[g,g] \neq g$ в силу 3c. Но тогда идеал $[g,g]$ обязан быть нулевым, т.е. g коммутативна, что противоречит условию. $\diamond$

Заметим, что эта теорема будет использоваться и дальше в §11, при классификации простых комплексных алгебр Ли.

Замечание. Используя примерно те же идеи, что и при доказательстве теоремы о невырожденности формы Киллинга, можно доказать следующее утверждение (которое не будет использоваться в этом тексте).

Критерий Картана. *Форма Киллинга алгебры Ли g (вещественной или комплексной) невырождена тогда и только тогда, когда g не имеет (ненулевых) коммутативных идеалов.*

4. (a) Выведите из теоремы о невырожденности формы Киллинга невырожденность формы Киллинга вещественной формы простой комплексной некоммутативной алгебры Ли.

(b) Докажите лемму 1.

Набросок доказательства леммы 3. Положим $u := \rho g_1$. Тогда u тоже будет вещественной формой алгебры Ли g, обладающей инвариантным скалярным произведением. Соответствующая ей вещественная структура будет иметь вид $\tilde\tau = \rho\tau\rho^{-1}$.

Алгебра Ли u, как и всякая вещественная форма простой комплексной алгебры Ли, тоже будет проста. (В самом деле, если $u' \subset u$ — идеал, то $u' + iu'$ — идеал в g размерности не больше $2\dim u'$.)

Значит, форма Киллинга алгебры g будет отрицательно определена на u. Можно доказать, что

5.(a) $\sigma\tilde\tau = \tilde\tau\sigma$.

5.(b) $\sigma u = u$.

Это значит, что u есть прямая сумма собственных подпространств оператора σ с собственными значениями 1 и -1: $u = u_+ \oplus u_-$.

5.(c) $u_+ \subset u \cap g_2$ и $u_- \subset u \cap ig_2$.

Сравнение размерностей показывает, что $u_+ = u \cap g_2$ и $u_- = u \cap ig_2$.

Итак, $u = (u \cap g_2) \oplus (u \cap ig_2)$. Но форма Киллинга алгебры Ли g отрицательно определена на u и на g_2 и положительно определена на ig_2. Поэтому $u = u \cap g_2 = g_2$. Стало быть, $g_2 = \rho g_1$. $\diamond$

Замечание о сопряжении.

Вещественная подалгебра h в комплексной алгебре g (которую можно рассмотреть и как вещественную) называется **вещественной формой алгебры** g, если $g \cong h^{\mathbb{C}}$.

6. Это эквивалентно тому, что $g = h \oplus ih$ и тому, что любой базис h над $\mathbb{R}$ есть базис g над $\mathbb{C}$.

Вещественные формы комплексной алгебры Ли можно описывать с помощью соответствующих им операций сопряжения.

Вещественная структура (или сопряжение) в комплексной алгебре Ли g — это инволютивный антилинейный автоморфизм $\tau\colon g \to g$, то есть такое биективное отображение τ, что $\tau(\alpha a) = \bar{\alpha}\tau a$, $\tau^2 = id$ и $\tau[x, y] = [\tau x, \tau y]$ для всех $x, y \in g$.

Это определение оправдывается следующим утверждением:

7. (a) Если h — вещественная форма комплексной алгебры Ли g, то комплексное сопряжение $x + iy \mapsto x - iy$, где $x, y \in h$, — вещественная структура.

(b) Обратно, если τ — вещественная структура в комплексной алгебре Ли g, то $g^\tau = \{a \in g\colon \tau(a) = a\}$ — вещественная форма алгебры g.

§10. Корневое разложение

В этом параграфе мы построим разложение произвольной комплексной алгебры Ли в прямую сумму подпространств. (В отличие от теоремы о разложении, это будет прямая сумма в смысле линейных пространств, а не алгебр Ли.) Это разложение и свойства подпространств используются при доказательстве леммы о нулевой форме Киллинга в этом параграфе, а также в следующем параграфе. (Заметим, что в этом параграфе никакие результаты предыдущего параграфа не понадобятся.)

Построение разложения основано на следующих двух фактах из линейной алгебры.

Теорема о корневом разложении для оператора. *Для любого линейного оператора X в конечномерном линейном пространстве V над $\mathbb{C}$ пространство V разлагается в прямую сумму* корневых *подпространств*

$$V_\lambda(X) = \{v \in V : (X - \lambda Id)^N v = 0 \text{ для некоторого } N\}:$$

$V = \bigoplus_{j=1}^{k} V_{\lambda_j}$, *где $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — все собственные значения оператора X.*

Лемма о корневых подпространствах операторов. *Если линейные операторы $A, B\colon V \to V$ таковы, что для некоторого количества скобок верно условие*

$$[A, [A, [\ldots, [A, B] \ldots]] = 0, (*)$$

то корневые подпространства A инвариантны относительно B.

Доказательство. Индукция по числу скобок. Используем тождество

$$[A^N, B] = [A, B]A^{N-1} + A[A, B]A^{N-2} + \cdots + A^{N-1}[A, B].$$

Для построения разложения будут использованы операторы ad_X на алгебре Ли, где X пробегет все элементы некоторой подалгебры в этой алгебре. Теорема о корневом разложении и лемма о корневых подпространствах операторов побуждают рассматривать *совместные* корневые подпространства этих операторов.

Пусть g — комплексная алгебра Ли, а $t \subset g$ — ее подалгебра.

Корнем подалгебры t называется такой линейный функционал $\alpha\colon t \to \mathbb{C}$, для которого существует такой ненулевой элемент $x \in g$, что

$$[h, x] = \alpha(h)x \quad \text{для всех} \quad h \in t.$$

(Т.е. x — общий собственный вектор операторов ad_h для всех $h \in t$.)

Корневое подпространство корня α — это пересечение всех корневых подпространств операторов ad_h со значением $\alpha(h)$:

$$g_\alpha = \bigcap_{h\in t} \ker(\mathrm{ad}_h - \alpha(h)Id)^{\dim g}.$$

Алгебра Ли g называется **нильпотентной**, если для некоторого $n \in \mathbb{N}$ и любых $\xi_1, \ldots, \xi_n \in g$ верно равенство

$$[\xi_1, [\xi_2, [\ldots, [\xi_{n-1}, \xi_n] \ldots]]] = 0.$$

Замечание. Очевидно, нильпотентность алгебры Ли L влечет следующее свойство: найдется такое натуральное n, что $[x, [x, [\ldots, [x, y] \ldots]]] = 0$ для всех $x, y \in L$, где количество скобок равно n. А это свойство влечет выполнение условия леммы о корневых подпространствах для операторов ad_x и ad_y. На самом деле это свойство равносильно нильпотентности.

Теорема о корневом разложении. *Пусть t — ненулевая нильпотентная подалгебра комплексной алгебры Ли g. Тогда*

$$g = \bigoplus_{\alpha \text{ — корень}} g_\alpha.$$

Это разложение называется *корневым разложением.*

Начало доказательства теоремы о корневом разложении. Операторы ad_x, $x \in t$, образуют нильпотентную подалгебру в $gl(g)$. Теорема о корневом разложении для оператора и лемма о корневых подпространствах операторов, примененные к этим операторам, позволяют разложить всю алгебру g в прямую сумму подпространств, инвариантных относительно всех этих операторов.

Оказывается, в силу того, что алгебра Ли ограничений операторов ad_x для $x \in t$ на каждое из этих подпространств тоже нильпотентна, в каждом подпространстве эти ограничения имеют общий собственный вектор. Это следует из приведенной ниже теоремы.

Теорема Ли. *Пусть g — матричная комплексная алгебра Ли (т.е. подалгебра в $gl(V)$ для некоторого конечномерного линейного пространства V над $\mathbb{C}$), причем $[g, g] \neq g$. Тогда существует общий собственный вектор всех операторов алгебры g, т.е. ненулевой вектор $v \in V$ такой, что для любого $X \in g$ выполнено $X(v) = \lambda(X)v$.*

1. Если g — нильпотентная алгебра Ли, то $[g, g] \neq g$.

Указание. Для доказательства нужно рассмотреть минимальное n такое, что $[\xi_1, [\xi_2, [\ldots, [\xi_{n-1}, \xi_n] \ldots]]]$ 0 для любых $\xi_1, \ldots, \xi_n \in g$.

Завершение доказательства теоремы о корневом разложении. Заметим, что для каждого $x \in t$ всякое подпространство h из построенного разложения целиком лежит в каком-то корневом подпространстве $V_{\lambda(x)}$ оператора ad_x. Соответствующее собственное значение $\lambda(x)$ линейно зависит от x, поскольку по теореме Ли в h есть общий собственный вектор операторов ad_x. Значит, $\lambda(x)$ — корень подалгебры t и $h \subset g_\lambda$. $\diamond$

Для доказательства теоремы Ли понадобится лемма.

Лемма. *Пусть v — общий собственный вектор операторов некоторого идеала $g_1 \subset g$, а $X \in g$. Тогда Xv — тоже общий собственный вектор операторов идеала g_1.*

Набросок доказательства. Для $Y \in g_1$ имеем $Yv = a(Y)v$, $a\colon g_1 \to \mathbb{C}$. Поэтому $YXv = XYv + [Y, X]v = \lambda(Y)Xv + \lambda([Y, X])v$. По индукции получаем, что $YX^k v$ линейно выражается через $v, Xv, \ldots, X^k v$, причем коэффициент при X^k равен $\lambda(Y)$. Пусть m — наибольшее число, для которого векторы $v, Xv, \ldots, X^{m-1}v$ линейно независимы. Подпространство V_1 в V, порожденное этими векторами, X-, X^k- и Y-инвариантно. Матрица оператора $(XY -$

$YX)|_{V_1}$ в базисе $(v, Xv, \ldots, X^{m-1}v)$ имеет диагональные элементы $\lambda([X,Y])$. Поэтому ее след равен $m\lambda([X,Y]) = 0$. Значит, $YXv = \lambda(Y)Xv$. $\diamond$

Набросок доказательства теоремы Ли. Индукция по размерности алгебры g. Для одномерной алгебры Ли утверждение теоремы очевидно. Предположим теперь, что для всех алгебр Ли размерности меньше $\dim g$ теорема доказана. Возьмем линейное подпространство g_1 коразмерности 1 в алгебре Ли g, содержащее ее коммутант $[g,g]$. Тогда g_1 — идеал. Возьмем $X \in g - g_1$. Пусть v — общий собственный вектор операторов идеала g_1 (он существует по предположению индукции). Подпространство $\langle v, Xv, X^2v, \ldots \rangle$ является X-инвариантным и поэтому содержит собственный вектор u оператора X. Так как $u = p(X)v$ для некоторого полинома p (при этом $p(X)$ может не лежать в g), то u будет также общим собственным вектором операторов идеала g_1. $\diamond$

2. Лемма о свойствах корневых подпространств. *Пусть g — комплексная алгебра Ли, t — ее нильпотентная подалгебра. Рассмотрим корневое разложение алгебры g: $g = \bigoplus_{\alpha \text{ — корень}} g_\alpha$. Тогда:*

1) 0 — корень, и $t \subset g_0$.

2) $[g_\alpha, g_\beta] \subset g_{\alpha+\beta}$.

Указание: $(\mathrm{ad}_h - \alpha - \beta)[e_\alpha, e_\beta] = [(\mathrm{ad}_h - \alpha)e_\alpha, e_\beta] + [e_\alpha, (\mathrm{ad}_h - \beta)e_\beta]$.

3) Если $x, y \in t$, то $(x,y) = \sum_{\beta \text{ — корень}} \beta(x)\beta(y)\dim g_\beta$.

Указание: это свойство становится очевидным, если выбрать в алгебре g базис, в котором все операторы ad_x при $x \in t$ записываются верхнетреугольными матрицами, см. ниже.

4) Если α, $-\alpha$ и β — корни, то на $[g_\alpha, g_{-\alpha}]$ выполняется равенство $\beta = \rho_{\alpha\beta}\alpha$ для некоторого числа $\rho_{\alpha\beta} \in \mathbb{Q}$.

5) Если α и $-\alpha$ — корни и $h_\alpha \in [g_\alpha, g_{-\alpha}]$, то

$$(h_\alpha, h_\alpha) = (\alpha(h_\alpha))^2 \sum_{\beta \text{ — корень}} \rho_{\alpha\beta}^2 \dim g_\beta.$$

6) Для любого корня β имеем $\beta([t,t]) = 0$.

См. указания в lieold.tex. Приведем набросок доказательства пункта 3 леммы.

Следствие из теоремы Ли. *Если L — нильпотентная алгебра операторов в комплексном пространстве V, то в некотором базисе пространства V все ее элементы записываются верхнетреугольными матрицами.*

Доказательство. По задаче 1 после теоремы Ли $L \neq [L,L]$. Значит, по теореме Ли найдется общий собственный вектор $v_1 \in V$. Рассмотрим алгебру, индуцированную g в факторпространстве $V/\langle v_1 \rangle$. Она также нильпотентна, а значит, имеется общий собственный вектор $v_2 \in V/\langle v_1 \rangle$. Значит, $X(v_2 + \langle v_1 \rangle) = \lambda_2(X)(v_2 + \langle v_1 \rangle)$ для всякого $X \in L$, т.е. $Xv_2 = \lambda_2(X)v_2 + \mu(X)v_1$, и так далее. $\diamond$

Утверждение. *Пусть g — комплексная алгебра Ли и t — ее нильпотентная подалгебра. Тогда существует такой базис алгебры g, что все матрицы операторов ad_x для $x \in t$ в этом базисе будут иметь блочно-диагональный вид с верхнетреугольными блоками на диагонали.*

Доказательство. Алгебру g можно разложить в прямую сумму корневых подпространств относительно подалгебры t. Ограничения операторов ad_x для $x \in t$ на каждое из этих подпространств образуют нильпотентную алгебру. По следствию из теоремы Ли в каждом из этих подпространств можно выбрать базис, в котором эти операторы записываются верхнетреугольными матрицами. Вместе эти базисы составляют базис алгебры g. Легко понять, что на главной диагонали в матрице ограничения ad_x на корневое подпространство g_α стоят числа $\alpha(x)$. $\diamond$

Нильпотентная подалгебра t в алгебре Ли g называется **подалгеброй Картана** или **картановской подалгеброй**, если t совпадает с корневым подпространством нулевого корня для себя: $t = g_0$. (Напомним, что $t \subset g_0$ для любой нильпотентной подалгебры — см. пункт 1 леммы о свойствах корневых подпространств.)

Из следующего утверждения вытекает, что *в любой комплексной алгебре Ли существуют картановские подалгебры.*

Утверждение. *Корневое подпространство оператора* ad_X *для нулевого собственного значения, имеющее минимальную размерность среди всех таких подпространств для* $X \in g$*, является картановской подалгеброй.*

Набросок доказательства леммы о нулевой форме Киллинга из §10. Пусть $L = [L, L]$. Пусть t — картановская подалгебра алгебры L. Тогда t порождается коммутаторами вида $[\xi_\alpha, \xi_{-\alpha}]$, где $\xi_\beta \in L_\beta$. Если ненулевых корней нет, то $t \subset [L_0, L_0] = [t, t]$. Тогда t не нильпотентна (см. замечание после теоремы Ли в §10).

Пусть есть ненулевой корень α такой, что $-\alpha$ — тоже корень и $h_\alpha = [\xi_\alpha, \xi_{-\alpha}] \neq 0$. Тогда

$$0 = (h_\alpha, h_\alpha) = (\alpha(h_\alpha))^2 \sum_{\beta \text{ — корень}} \rho^2_{\alpha\beta} \dim L_\beta.$$

Это и $\rho_{\alpha\alpha} = 1$ влечет $\alpha(h_\alpha) = 0$. Тогда $\beta(h_\alpha) = 0$. Поскольку t порождается $[t, t]$ и элементами h_α, то $\beta(t) = 0$. То есть ненулевых корней нет, что противоречит доказанному. $\diamond$

§11. Доказательство теоремы о классификации простых комплексных алгебр Ли

В этом параграфе мы получим список всех комплексных простых алгебр Ли. Для этого мы сопоставим каждой такой алгебре некоторый геометрический объект — систему векторов в евклидовом пространстве с определенными свойствами, а затем классифицируем такие объекты.

Для доказательства утверждений этого параграфа понадобятся результаты предыдущего: корневые разложения относительно картановских подалгебр, свойства корневых подпространств, а также теорема о невырожденности.

В следующей лемме мы сформулируем те свойства корней на картановских подалгебрах, которые понадобятся нам для построения геометрических объектов, упомянутых в самом начале параграфа.

На самом деле собственно для конструкции нужны утверждения начиная с д) **???**, а корневые подпространства не нужны вовсе.

Лемма. Пусть g — комплексная полупростая алгебра Ли, а t — ее картановская подалгебра.

Тогда выполняются следующие свойства.

а) Ограничение формы Киллинга на t — невырожденная форма.

Это свойство позволяет построить стандартным образом изоморфизм между пространствами t и t^*. При этом изоморфизме корню α соответствует некоторый вектор h_α.

б) Из множества ненулевых корней можно выбрать базис сопряженного пространства t^*.

Пусть в t^* выбран базис из корней $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Тогда вектора $h_{\alpha_1}, \dots, h_{\alpha_k}$ составят базис пространства t.

в) Коэффициенты разложения любого вектора h_β по базису $h_{\alpha_1}, \dots, h_{\alpha_k}$ рациональны.

Определим пространство $t_\mathbb{Q}$ как линейную оболочку векторов некоторого базиса $h_{\alpha_1}, \dots, h_{\alpha_k}$ с рациональными коэффициентами. Вследствие свойства в) все вектора h_β попадут в это пространство. Значит, выбрав другой базис (отвечающий другому базису корней $\alpha_1, \dots, \alpha_k$), мы получим то же самое пространство $t_\mathbb{Q}$.

г) Ограничение формы Киллинга на $t_{\mathbb{Q}}$ — положительно определенная форма.

Расширим $t_{\mathbb{Q}}$ до вещественной алгебры $t_{\mathbb{R}}$ и продолжим форму Киллинга по линейности, получив положительное скалярное произведение на алгебре $t_{\mathbb{R}}$.

Оказывается, если α и β — ненулевые корни, то число $\dfrac{2(h_\beta, h_\alpha)}{(h_\alpha, h_\alpha)}$ целое. Более того, можно доказать следующее утверждение.

Лемма о цепочке корней. Пусть α и β — ненулевые корни. Тогда существуют такие целые неотрицательные числа j и k, что функция $\beta + l\alpha$, где l — целое число, является корнем в том и только том случае, когда $-j \leqslant l \leqslant k$. Верно равенство $\dfrac{2(h_\beta, h_\alpha)}{(h_\alpha, h_\alpha)} = j - k$.

Поясним геометрический смысл этого утверждения. Оно показывает, что существует цепочка корней $\beta - j\alpha, \beta - (j-1)\alpha, \ldots, \beta + k\alpha$ и соответствующая цепочка векторов $h_\beta - jh_\alpha, h_\beta - (j-1)h_\alpha, \ldots, h_\beta + kh_\alpha$. Равенство, указанной в лемме, равносильно утверждению о том, что отражение относительно гиперплоскости, перпендикулярной вектору h_α, переводит эту цепочку векторов в себя.

Заметим еще, что если α и β — ненулевые корни, то числа $\dfrac{2(h_\beta, h_\alpha)}{(h_\alpha, h_\alpha)}$ и $\dfrac{2(h_\alpha, h_\beta)}{(h_\beta, h_\beta)}$ целые. Но их произведение равно $4\cos^2 \angle(h_\alpha, h_\beta)$. Возможные значения пар $(\dfrac{|h_\beta|}{|h_\alpha|}, |\cos(\angle(h_\beta, h_\alpha))|)$ суть $(1, 0)$, $(1, \sqrt{3}/2)$, $(\sqrt{2}, \sqrt{2}/2)$ и $(\sqrt{3}, 1/2)$.

Зафиксируем в пространстве $t_{\mathbb{R}}$ некоторый базис $H_1, \ldots, H_k$ и введем *лексикографическое упорядочение* относительно этого базиса: если $x, y \in t_{\mathbb{R}}$, то положим $x > y$, если $(x, H_1) = (y, H_1), \ldots, (x, H_{l-1}) = (y, H_{l-1})$ и $(x, H_l) > (y, H_l)$ для некоторого натурального $l \leqslant k$. Элемент x назовем *положительным*, если $x > 0$.

Введенное отношение является линейным отношением порядка (т.е. если $x, y \in t_{\mathbb{R}}$ и $x \neq y$, то либо $x > y$, либо $x < y$). Оно обладает естественными свойствами: если $x > y$, то $x + z > y + z$, $-x > -y$ и $rx > ry$ для любого вещественного $r > 0$.

Назовем корень α **простым**, если $h_\alpha > 0$ и $h_\alpha \neq h_\beta + h_\gamma$, где $h_\beta > 0, h_\gamma > 0$.

Можно доказать следующие свойства простых корней.

Утверждение. Множество h_α для всех простых корней α образует базис в $t_{\mathbb{R}}$, и коэффициенты разложения любого положительного вектора h_β по этому базису — целые неотрицательные числа.

Утверждение. Если α и β — простые корни, то $\alpha - \beta$ — не корень.

(*Доказательство.* Предположим, что $\alpha - \beta$ — корень. Если $h_\alpha - h_\beta > 0$, то $h_\alpha = (h_\alpha - h_\beta) + h_\beta$, и тогда α не простой. Иначе же $h_\beta = -(h_\alpha - h_\beta) + h_\alpha$, и тогда β не простой.)

Из этого утверждения и леммы о цепочке корней следует, что если α и β — простые корни, то $\dfrac{2(h_\beta, h_\alpha)}{(h_\alpha, h_\alpha)} \leqslant 0$.

Системы векторов в евкдидовом пространстве, подобные системам векторов h_α для всех простых корней α, называют π-системами.

Множество $\pi = \{x_1, \ldots, x_l\} \in \mathbb{R}^l$ называется *π-системой*, если π — базис в $\mathbb{R}^l$ и числа $c_{ij} := -2\dfrac{(x_i, x_j)}{(x_j, x_j)}$ целые при всех i, j и неотрицательные при $i \neq j$. Числа c_{ij} образуют *матрицу Картана.*

π-система называется *неразложимой*, если ее нельзя разбить на две непересекающиеся подсистемы так, чтобы элементы разных подсистем были бы ортогональны друг другу.

Утверждение. Для всякой системы простых корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ простой комплексной алгебры Ли множество $h_{\alpha_1}, \ldots, h_{\alpha_k}$ является неразложимой π-системой.

Две π-системы называются **эквивалентными**, если можно так занумеровать их элементы, что их матрицы Картана станут равны.

Теорема 1. *Пусть g_1, g_2 — простые алгебры Ли, а их системы простых корней относительно некоторых подалгебр Картана (и упорядочивания относительно некоторых базисов этих подалгебр) порождают эквивалентные π-системы. Тогда g_1 и g_2 изоморфны.*

Осталось описать все возможные неразложимые π-системы. Их удобно изображать на плоскости с помощью *диаграмм Дынкина.* Они строятся следующим образом.

Пусть $\pi = \{x_1, \ldots, x_l\}$ — π-система. Векторам системы мы сопоставляем точки на плоскости. Точки x_i и x_j соединяются кривой (ребром) кратности $c_{ij}c_{ji}$ (это число от 0 до 3). На ребре ставится знак $>$ или $<$, в зависимости от того, какой из векторов, соответствующих концам ребра, длиннее (если их длины не равны). Таким образом, любая неразложимая π-система описывается связной диаграммой Дынкина.

Теорема 2. *Всевозможные попарно неизоморфные связные диаграммы Дынкина таковы: A_l, $l \geqslant 1$; B_l, $l \geqslant 2$; C_l, $l \geqslant 3$; D_l, $l \geqslant 4$; G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 (см. рисунок). (Числовые индексы обозначают количество вершин диаграммы.)*

Всякая диаграмма Дынкина реализуется как диаграмма системы простых корней некоторой комплексной простой алгебры Ли.

В построении системы простых корней данной простой комплексной алгебры Ли был допущен произвол двух видов. Во-первых, в одной и той же алгебре Ли могут существовать разные подалгебры Картана. Во-вторых, мы произвольно выбирали базис, относительно которого производилось упорядочение. Оказывается, если мы построили описанным выше способом некоторую π-систему, то, сделав иной выбор на первом или на втором шаге, мы получили бы π-систему, эквивалентную построенной. Это вытекает из следующих двух теорем.

Теорема 3. *Любая подалгебра Картана простой комплексной алгебры Ли переводится в любую другую подалгебру Картана некоторым изоморфизмом этой алгебры.*

Теорема 4. *Пусть g — простая комплексная алгебра Ли, t — ее подалгебра Картана, и пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ и $\beta_1, \ldots, \beta_k$ — две системы простых корней относительно t (построенные с помощью разных упорядочений). Тогда существует ортогональное преобразование пространства $t_{\mathbb{R}}$, переводящее множество $\{h_{\alpha_1}, \ldots, h_{\alpha_k}\}$ в множество $\{h_{\beta_1}, \ldots, h_{\beta_k}\}$.*

Теоремы 3–6 нетривиальны, однако мы не будем приводить схем их доказательства. Заметим только, что доказательства теорем 3 и 5 относятся к теории алгебр Ли, а доказательства теорем 4 (в части классификации π-систем) и 6 относятся к геометрии пространств $\mathbb{R}^n$.

Следующие технические утверждения о корневых подпространствах позволяют доказать свойства а)–г) из леммы в начале этого параграфа.

1. а) Если $\alpha + \beta \neq 0$, то $g_\alpha \perp g_\beta$.

б) Если α — корень, то $-\alpha$ — тоже корень.

в) Сужение формы Киллинга на подалгебру Картана невырождено.

г) Если $h \in t$ и $\alpha(h) = 0$ для любого корня α, то $h = 0$.

д) Размерность пространства корней не меньше размерности t.

е) t коммутативна.

ж) Если $e_{\pm\alpha} \in g_{\pm\alpha}$ и $[e_\alpha, e_{-\alpha}] \neq 0$, то $\alpha([e_\alpha, e_{-\alpha}]) \neq 0$.

Для каждого ненулевого корня α возьмем общий собственный вектор $e_\alpha \in g_\alpha$ операторов ad_h, $h \in t$. Можно считать, что $(e_\alpha, e_{-\alpha}) = 1$. Положим $h_\alpha := [e_\alpha, e_{-\alpha}]$.

2. а) $\alpha(h) = (h, h_\alpha)$.

б) $\alpha(h_\alpha) \neq 0$ и $h_\alpha \neq 0$.

в) $\dim g_\alpha = 1$.

г) $k\alpha$ не корень при целом $k \geq 2$.

Указание. Пространство $E := < e_{-\alpha} > \oplus \oplus_{k\geq 0}\, g_{k\alpha}$ является e_α- и $e_{-\alpha}$-инвариантным. Поэтому $0 = \operatorname{tr} \operatorname{ad}_{h_\alpha}|_E = \alpha(h_\alpha)(-1 + \dim g_1 + 2\dim g_2 + \dots)$.

Поскольку сужение формы Киллинга на t невырождено, мы можем построить стандартный изоморфизм $f\colon t^* \to t$. При этом изоморфизме корню α соответствует вектор h_α в силу утверждения 2а. В силу 1д в t^* можно выбрать базис из корней, а в t — базис из векторов h_α.

3. а) Если β — корень и p, q — наибольшие числа, для которых все функции $\beta + p\alpha, \beta + (p-1)\alpha, \dots, \beta - q\alpha$ — корни, то $\beta(h_\alpha) = \frac{1}{2}(q-p)\alpha(h_\alpha) = \frac{1}{2}(q-p)(h_\alpha, h_\alpha)$.

б) $(h_\alpha, h_\alpha) \in \mathbb{Q}$.

в) В t существует базис вида $h_{\alpha_1}, \dots, h_{\alpha_s}$.

г) Коэффициенты разложения h_β по этому базису рациональны. Указание. $(h_\beta, h_{\alpha_i}) = \beta(h_{\alpha_i}) = \rho_{\beta\alpha_i}\alpha_i(h_{\alpha_i})$.

д) $t_{\mathbb{Q}} := \{\lambda_1 h_{\alpha_1} + \dots + \lambda_s h_{\alpha_s} \mid \lambda_i \in \mathbb{Q}\}$ не зависит от выбора базиса $h_{\alpha_1}, \dots, h_{\alpha_s}$.

е) Метрика Киллинга положительно определена на $t_{\mathbb{Q}}$.