СТУДЕНЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ ПО ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

А. А. Ошемков и А. Б. Скопенков

http://dfgm.math.msu.su/files/skopenkov/geomolymp.pdf

Обновленная версия статьи

Мат. Просвещение, 11 (2007), 131–140, www.mccme.ru/free-books/matprosa.html

О студенческих олимпиадах на механико-математическом факультете Московского Государственного Университета им. М. В. Ломоносова см. http://dfgm.math.msu.su/files/skopenkov/stolymp.pdf

Задачи олимпиад по геометрии и топологии принадлежат математическому фольклору, но малоизвестны. Большинство этих задач либо являются частными случаями недавних результатов или нерешенных проблем, либо открывают новый для студентов взгляд на знакомый им материал (см. комментарии к решениям). Варианты олимпиад — плод коллективного труда сотрудников кафедры дифференциальной геометрии и приложений мехмата МГУ (окончательные варианты подготовлены А. Б. Скопенковым в 2005 г. и А. А. Ошемковым в 2006 г.). В 2007 году вместо олимпиады был проведен исследовательский конкурс, см. http://dfgm.math.msu.su/ materials.php, http://dfgm.math.msu.su/ files/skopenkov/hilbert.pdf.

Победители олимпиад по геометрии и топологии награждаются математическими призами, зачетом по курсу классической дифференциальной геометрии и приглашением на заключительный тур. Победители Олимпиады 2005 года (решили 4 задачи): второкурсники Авдеев Роман, Горин Вадим, Ероховец Николай, Изосимов Антон, Куюмжиян Каринэ, Поршнев Евгений и 10-классник Девятов Ростислав. Победители Олимпиады 2006 года (решили 3 задачи): второкурсники Айзенберг Антон, Дильман Глеб, Мешин Юрий и Шнурников Игорь. Победитель Исследовательского Конкурса 2007 года: первокурсник Веревкин Павел.

Приведем задачи олимпиад по геометрии и топологии, а также ответы, указания и ссылки на полные решения. На олимпиадах разрешалось пользоваться без определения и доказательства понятиями и теоремами из программы 1-2 курса мехмата МГУ. Все остальные используемые определения требовалось явно приводить, а используемые теоремы — формулировать.

Задачи Олимпиады 6.04.2005 (16.15–19.45).

1. На плоскости фиксированы точки $O, A_1, \dots, A_s$ и числа $m_1, \dots, m_s$. *Моментом инерции относительно прямой* l системы $A_1, \dots, A_s, m_1, \dots, m_s$ называется число $I(l) = m_1|A_1l|^2 + \dots + m_s|A_sl|^2$, где $|A_il|$ — расстояние от точки A_i до прямой l. Будем рассматривать прямые l на плоскости, проходящие через точку O. Пусть I_+ и I_- — наибольшее и наименьшее значения момента инерции $I(l)$ (возможно, $I_+ = I_-$). Возьмем одну из прямых l_+, для которой $I(l_+) = I_+$. Докажите, что $I(l) = I_+ \cos^2\varphi + I_- \sin^2\varphi$, где $\varphi = \angle(ll_+)$.

2. Разрежьте бутылку Клейна так, чтобы получился (один) лист Мебиуса. Бутылкой Клейна называется фигура, полученная из квадрата $ABCD$ склейкой противоположных сторон AB с CD и BC с AD (с учетом направления).

3. Какие правильные многогранники могут получиться в сечении четырехмерного куба трехмерной гиперплоскостью?

4. Докажите, что композиция осевых симметрий пространства относительно перпендикулярных скрещивающихся прямых является *винтовым движением*, т.е. композицией вращения на некоторый угол относительно некоторой направленной оси и параллельного переноса на вектор, параллельный этой оси. Найдите направленную ось, угол вращения и вектор переноса.

5. Пусть N — график непрерывной функции $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Известно, что для любых чисел $s, t \in \mathbf{R}$ существует диффеоморфизм $M : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ для которого $M(N) = N$ и $M(s, f(s))) = (t, f(t))$. Верно ли, что функция f дифференцируема?

Примечания: функция с бесконечной производной в точке считается дифференцируемой в этой точке; отображение $M = (M_1, M_2) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ называется *диффеоморфизмом*, если оно взаимно-однозначно, для M_1 и M_2 существуют частные производные всех порядков и $\frac{\partial M_1}{\partial x}\frac{\partial M_2}{\partial y} - \frac{\partial M_2}{\partial x}\frac{\partial M_1}{\partial y} \neq 0$ в любой точке плоскости.

Задачи Олимпиады 13.04.2006 (16.30–20.00).

1. Пусть AB — наибольшая сторона треугольника ABC. Докажите, что для любой точки M плоскости выполнено неравенство $AM + BM + CM \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(BC + CA)$.

2. Найдите наибольшее целое n, для которого на плоскости существует кривая второго порядка, имеющая в точке $(0, 1)$ касание n-го порядка с графиком функции $y = \cos x$.

Напомним [Ra03, §§ 22, 23], что если P — общая точка параметризованных кривых $r_1(t)$ и $r_2(t)$, то говорят, что они имеют в этой точке *касание n-го порядка*, если первые n производных радиус-векторов $r_1(t)$ и $r_2(t)$ в точке P совпадают.

3. Пусть K — (двумерный) многоугольник на плоскости и a — вектор, для которого образ $K+a$ многоугольника K при сдвиге на вектор a не пересекается с K, т.е. $K \cap (K+a) = \emptyset$. Докажите, что два воза (т.е. круга диаметра $|a|$) не могут поменяться местами при непрерывном движении их центров по K, при котором возы не сталкиваются.

4. (a) Пусть $\gamma(t)$ — бесконечно дифференцируемая плоская кривая и $\alpha(t)$ — касательная к ней прямая в точке $P = \gamma(0) = \alpha(0)$. Предположим, что модули векторов скорости кривой $\gamma(t)$ и прямой $\alpha(t)$ равны единице в каждой точке (т.е. и кривая $\gamma(t)$, и прямая $\alpha(t)$ проходят путь длины τ за любой промежуток времени длины τ). Докажите, что модуль $|\gamma''(0)|$ ускорения кривой $\gamma(t)$ в точке P равен $\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} \rho(\gamma(t), \alpha(t))$, где ρ — расстояние.

(b) Рассмотрим модель Пуанкаре геометрии Лобачевского в верхней полуплоскости [DNF79, I.10.1, Pr95, §3, MSF04, §3]. Пусть $\gamma(t)$ — кривая с уравнением $y = 1$ (горизонтальная евклидова прямая) и $\alpha(t)$ — касательная к $\gamma(t)$ прямая (в смысле геометрии Лобачевского) в точке $\gamma(0) = \alpha(0) = (0, 1)$. Предположим, что и кривая $\gamma(t)$, и прямая $\alpha(t)$ проходят путь длины τ (в смысле геометрии Лобачевского) за любой промежуток времени длины τ. Вычислите величину $\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} \rho(\gamma(t), \alpha(t))$, где ρ — расстояние на плоскости Лобачевского.

5. Для каждой пары целых чисел n и k выясните, сколько имеется (с точностью до движений и гомотетий) неупорядоченных наборов из k ненулевых векторов в n-мерном евклидовом пространстве, сумма которых равна нулю и все попарные углы между которыми равны.

Ответы, указания, решения и комментарии.

2005-1. Утверждение задачи вытекает из того, что момент инерции есть сумма функций вида $f(\varphi) = A\cos^2\varphi + 2B\cos\varphi\sin\varphi + C\sin^2\varphi$, а значит, и сам является функцией такого вида.

Комментарий. Аналогично получается элементарное доказательство *формулы Эйлера для кривизны нормального сечения поверхности*, см. формулировку и неэлементарное доказательство в [Ra03, §55, DNF79, I.8.3].

2005-2. Надо резать по $BC = AD$.

2005-3. Ответ: тетраэдр, куб и октаэдр. Поскольку у четырехмерного куба восемь трехмерных граней, то у его сечения трехмерной гиперплоскостью не может быть более восьми двумерных граней. Кубом, правильным тетраэдром и правильным октаэдром являются сечения куба $-1 \le x_i \le 1$, $i = 1,2,3,4$, трехмерными гиперплоскостями $x_1 = 0$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$ и $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, соответственно.

2005-4. Ответ: осью является прямая l, содержащая общий перпендикуляр, угол вращения равен π, а длина вектора переноса равна удвоенной дине общего перпендикуляра. Для доказательства можно рассмотреть проекции на прямую l и на ортогональную ей плоскость.

2006-1. Пусть M' и B' — образы точек M и B при повороте на $\pi/3$ относительно точки C. Тогда

$$MA + MB + MC = AM + MM' + M'B' \ge AB' \ge \frac{\sqrt{3}}{2}(CA + CB).$$

Здесь последнее неравенство следует по теореме косинусов из $\angle ACB' = \angle ACB + \pi/3 \ge 2\pi/3$.

Комментарий. Эта задача — простейший случай (для трехточечного множества) знаменитой гипотезы Гилберта-Поллака (1960) о проблеме Штейнера: *отношение длины кратчайшего дерева, соединяющего данное конечное множество точек плоскости, к длине кратчайшего дерева без дополнительных вершин больше или равно* $\sqrt{3}/2$. Подробности см. в [IT03].

2006-2. Ответ: 5. Пусть график функции $y = \cos x$ задан в параметрической форме $x(t) = t$, $y(t) = \cos t$, а кривая второго порядка — уравнением $F(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + px + qy + r = 0$, где $F(0,1) = 0$. Чтобы найти порядок касания этих кривых в точке $(0,1)$, рассмотрим функцию $\phi(t) = F(x(t), y(t))$ и ее производные в точке $t = 0$. Если $\phi'(0) = \phi''(0) = \ldots = \phi^{(n)}(0) = 0$, то рассматриваемые кривые имеют касание n-го порядка [Ra03, с. 110]. Вычисляя производные функции $\phi(t) = at^2 + bt\cos t + c\cos^2 t + pt + q\cos t + r$ в точке $t = 0$ и приравнивая их к нулю (а также учитывая условие $\phi(0) = 0$), получаем (однородную) систему линейных уравнений на коэффициенты a, b, c, p, q, r. Если приравнять к нулю производные до 5-го порядка включительно, то система имеет ненулевое решение, а при добавлении условия $\phi^{(6)}(0) = 0$ ненулевых решений нет. Поэтому максимально возможный порядок касания равен 5. Он достигается для гиперболы $(y-4)^2 - 3x^2 = 9$.

Комментарий. Рассматриваемый пример является частным случаем общей задачи, которую можно сформулировать следующим образом: для данной кривой $\gamma(t)$ требуется найти кривую из некоторого семейства кривых (зависящих от параметров), которая наилучшим образом приближает $\gamma(t)$. Эту задачу можно решать аналогичным образом. Так, например, одно из определений кривизны кривой основано на рассмотрении семейства окружностей, касающихся кривой в данной точке [Ra03].

2006-3. [CRS98, §2 , Sk05, глава 1].

2006-5. Ответ: одна при $n \ge k-1$ (это система векторов, соединяющих центр правильного $(k-1)$-мерного симплекса с его вершинами), ни одной при $n < k-1$ [Mi06].

Решение и обсуждение задачи 2005-5.

Ответ: да. Докажем это.

Возьмем точку $a \in \mathbf{R}^2 - N$. Расстояние от a до N не равно нулю. Значит, существует точка $y \in N$, для которой $|a-y|$ равно этому расстоянию. Тогда открытый круг D с центром в y радиуса $|a-y|$ не пересекает N.

При любом $x \in N$ существует диффеоморфизм $M : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, переводящий y в x и N в N. Обозначим через R^φ поворот плоскости на угол φ вокруг начала координат. Обозначим через B_l равнобедренный треугольник (открытый двумерный) с вершиной в начале координат, углом $2\pi/l$ при вершине и высотой длины $1/l$, параллельной оси Oy. Так как M диффеоморфизм, то $M(D) \supset x + R^\varphi B_l$ для некоторых l и φ. Поэтому

(*) *при любом* $x \in N$ *существуют такие* l *и* φ, *что* $(x + R^\varphi B_l) \cap N = \emptyset$.

Возьмем произвольную последовательность $\{\varphi_l\}$, всюду плотную на $[0, 2\pi]$. Обозначим

$$N_l := \{x \in N \mid (x + R^{\varphi_l} B_l) \cap N = \emptyset\}.$$

Ввиду условия (*) имеем $N = \cup_{l=1}^{\infty} N_l$. Нетрудно проверить, что N_l *замкнуто в* N (докажите или см. детали в [RSS96, Лемма 3.1]). Значит, по теореме Бэра о категории [KF, Zo] некоторое N_l содержит непустое открытое в N множество.

Рисунок 1 (=рис.2 прошлой версии) приблизительно здесь

Поэтому существуют точка $x \in N$ и замкнутый квадрат I^2 со стороной меньше $1/l$ с центром в x, для которых $N' := N \cap I^2 \subset N_l$ (рис. 1). Тогда

$$(**) \quad [(y + R^{\varphi_l} B_l) \cup (y - R^{\varphi_l} B_l)] \cap N' = \emptyset \quad \text{при любом} \quad y \in N'.$$

Действительно, если $z \in (y - R^{\varphi_l} B_l) \cap N'$, то $y \in (z + R^{\varphi_l} B_l) \cap N' \subset N_l$, что невозможно.

Можно считать, что угол между некоторой стороной L квадрата I^2 и осью Ox равен φ_l. Можно также считать, что N' связно и гомеоморфно отрезку (иначе заменим N' на малую окрестность точки $a \in N'$, которая гомеоморфна отрезку, поскольку N — график функции). Тогда ортогональная проекция множества N' на L содержит некоторый отрезок ненулевой длины. Можно считать, что этот отрезок совпадает с L (иначе уменьшим L).

Напомним, что отображение $q : L \to [0, 1]$ называется *липшициевым*, если существует такое s, что $|q(x) - q(y)| < s|x - y|$ для любых двух различных точек $x, y \in L$. Из (**) следует, что N' есть график некоторой липшициевой функции $q : L \to [0, 1]$ (при естественном представлении $I^2 = L \times [0, 1]$). Функция q имеет точку дифференцируемости [KF, Zo]. Значит, и исходная функция f имеет точку дифференцируемости. Тогда из существования диффеоморфизмов $M = M_{s,t}$ вытекает, что f дифференцируема в любой точке.

Комментарий.

Какой формы могут быть ножны, чтобы из них можно было вытащить саблю? Математическая формулировка этого вопроса приводит к следующему понятию. Подмножество N трехмерного (или m-мерного евклидова) пространства называется *риманово объемлемо однородным*, если для любых двух точек $x, y \in N$ существует движение (т.е. изометрия) $h : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, переводящее x в y и N в N. Хорошо известно, что *риманово объемлемо однородными кривыми в трехмерном пространстве являются только прямые, окружности и винтовые линии.*

А какой формы может быть электрический кабель, чтобы провод можно было вытащить из его обмотки (провод можно гнуть, но нельзя ломать)? Математическая формулировка этого вопроса приводит к следующему понятию. Подмножество N пространства $\mathbf{R}^m$ называется *дифференцируемо объемлемо однородным*, если *для любых двух точек* $x, y \in N$ *существует диффеоморфизм* $h : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$, *переводящий* x *в* y *и* N *в* N. Непрерывность производной диффеоморфизма h не предполагается.

Напомним, что подмножество $N \subset \mathbf{R}^m$ называется *дифференцируемым подмногообразием*, если для любой точки $x \in N$ найдутся ее окрестность в $\mathbf{R}^m$, диффеоморфная $\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m-k}$ (отождествим ее с $\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m-k}$) и дифференцируемое инъективное отображение $q : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^{m-k}$, график которого есть $N \cap (\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m-k})$. (Это определение, удобное для доказательства нижеследующей теоремы, равносильно стандартному [Pr04].) Например, график любой дифференцируемой функции $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ является дифференцируемым подмногообразием плоскости $\mathbf{R}^2$, а образ канторова множества [Pr04, 4.4] при произвольном вложении в плоскость не является дифференцируемым подмногообразием плоскости $\mathbf{R}^2$.

Нетрудно проверить, что любое дифференцируемое подмногообразие является дифференцируемо объемлемо однородным. Замечательно, что справедливо и обратное.

Теорема. *Если* $N \subset \mathbf{R}^m$ *замкнуто и дифференцируемо объемлемо однородно, то* N *является дифференцируемым подмногообразием* [RSS93, RSS96].

Кроме задачи 2005-5, эта теорема имеет следующее элементарное (но нетривиальное) следствие: *канторово множество не может быть дифференцируемо объемлемо однородно вложено в плоскость.* Другие интересные следствия приведены в [Sk06].

Доказательство теоремы аналогично приведенному решению задачи 2005-5. См. [Sk06], где доказательство проще предложенного в [RSS93, RSS96].

Решение и обсуждение задачи 2006-4.

Докажем утверждение пункта (a). Прямая $\alpha(t)$ задается уравнением $\alpha(t) = \alpha(0) + t\alpha'(0)$. Для кривой $\gamma(t)$ имеем $\gamma(t) = \gamma(0) + t\gamma'(0) + \frac{t^2}{2}\gamma''(0) + o(t^2)$ при $t \to 0$. Учитывая, что $\alpha(0) = \gamma(0)$ и $\alpha'(0) = \gamma'(0)$, получаем

$$\rho(\gamma(t), \alpha(t)) = |\gamma(t) - \alpha(t)| = |\tfrac{t^2}{2}\gamma''(0) + o(t^2)| = \tfrac{t^2}{2}|\gamma''(0)| + o(t^2).$$

Откуда и следует требуемое равенство $\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} \rho(\gamma(t), \alpha(t)) = |\gamma''(0)|$.

Ответ к (b): 1.

Чтобы привести решение, напомним сначала стандартные факты из геометрии Лобачевского (в модели Пуанкаре на верхней полуплоскости с координатами (x, y), где $y > 0$), которые мы будем использовать. Они входят в программу курса “Классическая дифференциальная геометрия” для второго курса мехмата МГУ [DNF79, I.10.1; Pr95, §3; MSF04, §3]). Длина кривой $r(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, на плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре ($y(t) > 0$) равна $\int\limits_a^b \frac{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}{y(t)}\,dt$. Прямыми для рассматриваемой модели плоскости Лобачевского являются (евклидовы) полуокружности, перпендикулярные оси x, и вертикальные полупрямые $y > 0$. Расстояние между точками плоскости Лобачевского определяется как длина отрезка прямой с концами в этих точках (где слова “длина” и “прямая” понимаются в указанном выше смысле, т.е. в смысле геометрии Лобачевского). Если рассматривать точки плоскости Лобачевского как комплексные числа с положительной мнимой частью, то формулу для расстояния между точками z_1 и z_2 можно записать в следующем виде [MSF04, задача 3.31]:

$$\rho(z_1, z_2) = \ln \frac{|z_2 - \overline{z}_1| + |z_2 - z_1|}{|z_2 - \overline{z}_1| - |z_2 - z_1|}.$$

Перейдем к решению пункта (b). В координатах (x, y) кривая $\gamma(t)$ имеет вид $\gamma(t) = (t, 1)$. Действительно, образ этой параметризованной кривой какой нужно, а ее параметр равен длине дуги. Касательная прямая (Лобачевского) $\alpha(t)$ (к кривой $\gamma(t)$) в рассматриваемой модели является полуокружностью $x^2 + y^2 = 1$, $y > 0$. Вычислив длину дуги этой полуокружности в метрике Лобачевского, найдем ее параметризацию: $\alpha(t) = \left(\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}, \frac{2e^t}{e^{2t}+1}\right)$.

Используя приведенную выше формулу для расстояния между точками, можно явно выразить $\rho(\gamma(t), \alpha(t))$ через t. Поскольку нам нужна не сама эта функция, а лишь ее вторая производная в нуле, можно упростить вычисления, раскладывая $\alpha(t)$ в ряд по t и отбрасывая члены порядка выше 2. Получаем $\alpha(t) = (t, 1 - \frac{t^2}{2}) + o(t^2)$. Отсюда

$$\rho(\gamma(t), \alpha(t)) = |\ln(1 - \tfrac{t^2}{2})| + o(t^2) = \tfrac{t^2}{2} + o(t^2).$$

В итоге получаем ответ: $\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} \rho(\gamma(t), \alpha(t)) = 1$.

Комментарий.

Кривизна кривой в евклидовом пространстве обычно определяется как модуль вектора ускорения точки, движущейся вдоль этой кривой с единичной по модулю скоростью. А как определить кривизну кривой в “неевклидовом” пространстве (т.е. в пространстве с неевклидовой римановой метрикой)? Можно и здесь определить ее как длину вектора ускорения точки, движущейся вдоль этой кривой с единичной по модулю скоростью. Но для этого надо по-новому определить саму операцию дифференцирования в этом пространстве. Оказывается, нельзя определить вектор ускорения как вектор с координатами, равными вторым производным координат точки по времени. Определение “правильной” — *ковариантной* — операции дифференцирования см. в [Ra04, DNF79, I, §§ 28,29б Sk].

В задаче 2006-4 предлагается еще одно (менее распространенное) определение кривизны кривой. Пункт (a) лишь показывает, что в обычной ситуации это определение равносильно обычному. А в пункте (b) предлагается вычислить по этому определению кривизну кривой для конкретного примера (без использования формул ковариантного дифференцирования). Отметим, что точно так же кривизна кривой может быть определена в любом пространстве с римановой метрикой.

Литература.

[CRS98] A. Cavicchioli, D. Repovs and A. B. Skopenkov, Open problems on graphs arising from geometric topology, Topol. Appl. 84 (1998), 207–226.

[DNF79] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков и А. Т. Фоменко, Современная геометрия: методы и приложения. М.: Наука, 1979.

[IT03] А. О. Иванов и А.А.Тужилин, Теория экстремальных сетей, Москва, Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2003.

[KF] А. Н. Колмогоров и С. В. Фомин, Функциональный анализ.

[MSF04] А. С. Мищенко, Ю. П. Соловьёв, А.Т.Фоменко, Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии Москва, Физматлит, 2004.

[Mi06] В. А. Мирзоян, Структурные теоремы для Ric-полусимметрических подмногообразий и геометрическое описание одного класса минимальных полуэйнштейновых подмногообразий, Матем. сб., 2006, 197:7, 47-76.

[Pr95] В.В.Прасолов. Геометрия Лобачевского (М: МЦНМО, 1995, 2000, 2004), http:// www.mccme.ru/ prasolov

[Pr04] В. В. Прасолов, Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии, Москва, МЦНМО, 2004.

[Ra03] П. К. Рашевский, Курс дифференциальной геометрии, Москва, УРСС, 2003.

[Ra04] П. К. Рашевский, Риманова геометрия и тензорный анализ, Москва, УРСС, 2004.

[RSS93] D. Repovš, A. B. Skopenkov and E. V. Ščepin, A characterization of C^1-homogeneous subsets of the plane, Boll. Unione Mat. Ital., **7-A** (1993), 437–444.

[RSS96] D. Repovs, A. B. Skopenkov and E. V. Scepin, C^1-homogeneous compacta in R^n are C^1-submanifolds of R^n, Proc. Amer. Math. Soc. 124:4 (1996), p. 1219–1226.

[Sk05] А. Б. Скопенков, Алгебраическая топология с элементарной точки зрения,
http://dfgm.math.msu.su/people/skopenkov/obstruct2.ps,
http://www.mccme.ru/ium/s05.

[Sk06] A. Skopenkov, A characterization of submanifolds by a homogeneity condition, Topol. Appl. 154 (2007) 1894-1897.
http://dx.doi.org/10.1016/j.topol.2007.03.002, http://arxiv.org/abs/math.GT/0606470.

[Sk] А. Скопенков, Основы дифференциальной геометрии в интересных задачах,
http://dfgm.math.msu.su/files/skopenkov/DIFGEOM.pdf

[Zo] В. А. Зорич, Математический анализ.

А. А. Ошемков: Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова.

А. Б. Скопенков: Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова, Независимый Московский Университет, Московский Институт Открытого Образования, skopenko@mccme.ru

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ПОДМНОГООБРАЗИЙ УСЛОВИЕМ ОДНОРОДНОСТИ

А. Скопенков, skopenko@mccme.ru

Аннотация. Приводится очень короткое доказательство следующей теоремы Д. Реповша, Е. В. Щепина и автора. Предположим, что для любых двух точек x, y локально компактного подмножества N гладкого многообразия M существует диффеоморфизм $h : M \to M$, для которого $h(N) = N$ и $h(x) = y$. Тогда N — гладкое подмногообразие в N.

Какой формы могут быть ножны, чтобы из них можно было вытащить саблю? Математическая формулировка этого вопроса приводит к следующему вопросу. Какие подмножества N трехмерного пространства имеют следующее свойство: *для любых двух точек $x, y \in N$ существует движение (т.е. изометрия) пространства, переводящее x в y и N в себя*?

Подмножество N трехмерного пространства называется *риманово объемлемо однородным*, если для любых двух точек $x, y \in N$ существуют их окрестности Ux и Uy в $\mathbf{R}^3$ и движение $h : Ux \to Uy$, переводящее x в y и $Ux \cap N$ в $Uy \cap N$. Хорошо известно, что риманово объемлемо однородными кривыми в трехмерном пространстве являются только прямые, окружности и винтовые линии.

А какой формы может быть электрический кабель, чтобы провод можно было вытащить из его обмотки (провод можно гнуть, но нельзя ломать)? Математическая формулировка этого вопроса приводит к следующему понятию. Подмножество N дифференцируемого многообразия M называется *дифференцируемо объемлемо однородным*, если *для любых двух точек $x, y \in N$ существуют их окрестности Ux и Uy в M и диффеоморфизм $h : Ux \to Uy$, переводящий x в y и $Ux \cap N$ в $Uy \cap N$.* Непрерывность производной диффеоморфизма h не предполагается.

Читатель, не знакомый с понятием дифференцируемого многообразия, может считать, что в дальнейшем M является плоскостью или пространством $\mathbf{R}^m$ — даже для этих частных случаев приведенный ниже результат интересен и нетривиален. Напомним для этого читателя следующие определения. Отображение $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ называется *дифференцируемым*, если для любой точки $z_0 \in \mathbf{R}^2$ существуют такие линейное отображение $A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ и бесконечно малая функция $\alpha : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, что для любой $z \in K$ выполнено

$$F(z) = F(z_0) + A(z - z_0) + \alpha(z - z_0)|z, z_0|.$$

Это линейное отображение A называется *производной* отображения F в точке z_0. Если $F = (F_1, F_2)$, то матрица производной в стандартном базисе есть $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$. *Диффеоморфизмом* плоскости $\mathbf{R}^2$ называется взаимно-однозначное дифференцируемое отображение $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, производная которого в каждой точке невырождена (т.е. $\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial y} \neq \frac{\partial F_2}{\partial x}\frac{\partial F_1}{\partial y}$).

Напомним, что подмножество $N \subset M$ дифференцируемого многообразия M называется *дифференцируемым подмногообразием*, если для любой точки $x \in N$ найдутся ее окрестность, диффеоморфная $\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m-k}$ (отождествим ее с $\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{m-k}$) и дифференцируемое инъективное отображение $q : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^{m-k}$, график которого есть $N \cap Ux$. (Это определение, удобное для доказательства нижеследующей теоремы, равносильно стандартному [Pr04].)

Например, дифференцируемо объемлемо однородным является любое дифференцируемое подмногообразие дифференцируемого многообразия (в частности, *график любой дифференцируемой функции* $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$). В этой заметке мы приводим доказательство обратного утверждения. Наше доказательство проще предложенного в [RSS93, RSS96, RS00] (хотя использует те же идеи).

Теорема. *Пусть N — локально компактное подмножество дифференцируемого многообразия M. Если N дифференцируемо объемлемо однородно, то N является дифференцируемым подмногообразием в M.*

Элементарные (но нетривиальные) следствия. (1) *Если график N непрерывной функции $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ дифференцируемо объемлемо однороден, то эта функция дифференцируема. (Функция, имеющая бесконечную производную в некоторой точке, считается дифференцируемой в этой точке.)*

(2) *Канторово множество* [Pr04, 4.4] *не может быть дифференцируемо объемлемо однородно вложено в плоскость.*

Читатель, не знакомый с понятием локальной компактности, может считать, что в теореме N замкнуто в M — даже этот случай нетривиален. Теорема неверна без предположения локальной компактности (или замкнутости); контрпример: $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

Если в каком-то из следующих применений встретятся непонятные читателю термины, то это применение можно опустить без ущерба для понимания дальнейшего.

Другие применения. (3) Известно, что многообразия однородны и что обратное неверно (контрпример: канторово множество [Pr04, 4.4]). Приведенная теорема показывает, что свойство быть *дифференцируемым подмногообразием* равносильно *дифференцируемой однородности.* Ср. [Gl68].

(4) При помощи приведенной теоремы удобно доказывать, что некоторые группы являются группами Ли. Например, из нее вытекает теорема Картана о том, что *любая замкнутая подгруппа группы Ли является подгруппой Ли.*

(5) Любая орбита некоторого непрерывного действия топологической группы на гладком многообразии диффеоморфизмами является гладко объемлемо однородной. Поэтому из приведенной теоремы вытекает, что *группа p-адических чисел не может свободно (и даже эффективно) действовать на гладком многообразии диффеоморфизмами.* Известно, что последнее утверждение влечет следующий результат: *если локально компактная топологическая группа эффективно действует на гладком многообразии диффеоморфизмами, то это группа Ли.* Это гладкий случай гипотезы Гильберта-Смита, доказанный в 1946 Бохнером и Монтгомери [MZ55, Theorem 2 on p. 208] более сложным образом. Гипотеза Гильберта-Смита появилась после решения в 1952 (независимо Глизоном, а также Монтгомери и Циппиным) следующей пятой проблемы Гильберта: *любая локально евклидова топологическая группа является группой Ли* [MZ55]. Приведенная теорема позволяет редуцировать гладкий случай гипотезы Гильберта-Смита и к пятой проблеме Гильберта. См. также [RS97, RSS97].

(6) Приведенная теорема позволяет свести следующий результат [MZ55, Theorem 3 on p. 208-209] к его простому случаю $m = 1$ (т.е. к уравнению Коши $h(s+t) = h(s) + h(t)$): *любая однопараметрическая группа $\{h^t\}_{t\in\mathbf{R}}$ диффеоморфизмов m-мерного многообразия, непрерывно зависящих от параметра t, на самом деле гладко зависит от этого параметра.* (Этот результат был сформулирован в качестве проблемы В. И. Арнольдом в 1980-е годы.)

Доказательство теоремы. Мы советуем читателю разобрать это доказательство сначала для $M = \mathbf{R}^2$, чего достаточно для элементарных следствий (тогда конец этого абзаца можно пропустить). То, что N является дифференцируемым подмногообразием в M, является локальным условием. Поэтому можно считать, что $M = \mathbf{R}^m$.

Обозначим $|x| := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_m^2}$.

Напомним, что отображение $q : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^m$ называется *липшициевым*, если существует такое s, что $|q(x) - q(y)| < s|x - y|$ для любых двух различных точек $x, y \in \mathbf{R}^k$.

Обозначим

$$B_l^{m,k} := \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m \mid -l^2 x_k < |x| < 1/l \quad \text{и} \quad l^2|x_i| < |x| \text{ для } k < i \le m\}.$$

Тогда $B_l^{m,m+1}$ есть проколотая внутренность m-мерного шара радиуса $1/l$,

$B_l^{m,k}$ есть открытый конус над $(1/l^2)$-окрестностью k-мерного полушария в $(m-1)$-мерной сфере радиуса $1/l$ для $1 \le k \le m$, и

$B_l^{m,0} = \emptyset$ для $l > m$.

Через O_m обозначается группа ортогональных преобразований пространства $\mathbf{R}^m$. Возьмем наибольшее $k \geq 0$, для которого

$$(*) \quad \text{при любом } x \in N \text{ существуют такие } l > m \text{ и } A \in O_m, \text{ что } (x + AB_l^{m,k}) \cap N = \emptyset.$$

(Неформально это значит, что N является '$(m-k)$-мерно липшициевым'.) Такое k существует, поскольку (*) справедливо при $k = 0$. Если $k = m+1$, то N состоит из изолированных точек и теорема доказана. Поэтому будем считать, что $k \leq m$.

Далее фиксируем m и k и опускаем их из обозначений конуса $B_l^{m,k}$. Возьмем произвольную последовательности $\{A_l\}$, всюду плотную в O_m. Обозначим

$$N_l := \{x \in N \mid (x + A_l B_l) \cap N = \emptyset\}.$$

Ввиду условия (*) имеем $N = \cup_{l=1}^{\infty} N_l$. Нетрудно проверить, что N_l *замкнуто в* N (докажите или см. детали в [RSS96, Лемма 3.1]). Значит, по теореме Бэра о категории некоторое N_l содержит непустое открытое в N множество.

Поэтому существуют точка $x \in N$ и замкнутый m-мерный куб I^m диаметра меньше $1/l$ с центром в x, для которых $N' := N \cap I^m \subset N_l$. Тогда

$$(**) \quad [(y + A_l B_l) \cup (y - A_l B_l)] \cap N' = \emptyset \quad \text{при любом} \quad y \in N'.$$

Действительно, если $z \in (y - A_l B_l) \cap N'$, то $y \in (z + A_l B_l) \cap N' \subset N_l$, что невозможно.

Так как N локально компактно, то можно считать, что N' компактно. Можно также считать, что некоторая $(m-k)$-мерная грань L куба I^m перпендикулярна k-мерной плоскости $A_l(\mathbf{R}^k \times \vec{0})$ ($L = I^m$ при $k = 0$). Обозначим через $p : I^m \to L$ ортогональную проекцию.

Первый случай: $p(N')$ содержит открытое в L множество U. (Это заведомо так для $k = m$, когда все уже очевидно.) (Это заведомо не так для $k = 0$.) Из (**) следует, что p является взаимно-однозначным на N', и что обратное отображение $q : U \to N'$ липшициево. Поэтому q имеет точку дифференцируемости [Fe69, Теорема 3.1.6]. Тогда из дифференцируемой объемлемой однородности вытекает, что q дифференцируемо в любой точке. Поэтому условие из определения дифференцируемого подмногообразия выполнено в одной точке множества N. Тогда из дифференцируемой объемлемой однородности вытекает, что N является дифференцируемым подмногообразием.

Второй случай: $p(N')$ не содержит никакого открытого в L множества. (Значит, $k < m$.) Так как $p(N')$ не содержит открытого в L множества, то существует точка $a \in L - p(N')$, достаточно близкая к центру грани L (точнее, расстояние от которой до центра грани L меньше четверти диаметра этой грани). Так как $p(N')$ компактно, то расстояние от a до $p(N')$ не равно нулю и существует точка $z \in N'$, для которой $|a - p(z)|$ равно этому расстоянию. Поскольку a достаточно близко к центру грани L, то $p(z)$ лежит *внутри* грани L. Тогда открытый $(m-k)$-мерный шар $D \subset L$ с центром в y и радиусом $|a - p(z)|$ не пересекает $p(N')$. Поэтому $p^{-1}(D) \cap N' = \emptyset$. Ясно, что

$$(z + A_l B_l) \cup (z - A_l B_l) \cup p^{-1}(D) \supset z + A_l B_s^{m,k+1} \quad \text{для некоторого } s.$$

Отсюда и из (**) следует, что $(z + A_s B_s^{m,k+1}) \cap N = \emptyset$. Так как N дифференцируемо объемлемо однородно, то при любом $x \in N$ существуют окрестности Uz и Ux точек z и x в $\mathbf{R}^m$ и диффеоморфизм $h : Uz \to Ux$, переводящий z в x и $Uz \cap N$ в $Ux \cap N$. Тогда по определению диффеоморфизма

$$h(Uz \cap (z + A_s B_s^{m,k+1})) \supset x + AB_u^{m,k+1} \quad \text{для некоторых} \quad A \in O_m \text{ и } u > m.$$

Значит, (*) выполнено с заменой k на $k+1$. Это противоречит максимальности числа k. QED

Заметим, что канторово множество *может* быть *непрерывно* или *липшициево* объемлемо однородно вложено в плоскость и в $\mathbf{R}^m$ — докажите или см. [Ma]. Значит, аналоги приведенной теоремы для непрерывной или липшициевой категорий неверны.

Аналог приведенной теоремы (и следствия (1)) для C^1-категории верен. Доказательство аналогично. В конце первого случая надо дополнительно заметить, что у производной дифференцируемого отображения есть точка непрерывности (поскольку производная есть поточечный предел последоветельности непрерывных функций: для $m=1$ имеем $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty}(f(x+\frac{1}{n}) - f(x))n)$. Тогда из объемлемой C^1-однородности будет вытекать, что N есть C^1-подмногообразие.

Гипотеза. *Аналог приведенной теоремы верен для C^r-категории при $r \geq 2$ и для аналитической категории.*

Вопреки [RSS96, RSS97], автор не имеет доказательства гипотезы в C^r-категории при $r \geq 2$. Для этого доказательства можно вместо конусов $B_l^{m,k}$ пытаться рассматривать объекты, более гладко втыкающиеся в начало координат, а вместо $(m-k)$-мерных шаров $D \subset L$ (из второго случая) — фигуры, имеющие больший порядок касания с $p(N')$.

Благодарю А. Ефимова за полезные обсуждения. Настоящий текст является расширенной русской версией статьи [Sk07].

Литература.

[DRS89] D. Dimovski, D. Repovš and E. V.Ščepin, C^∞-homogeneous closed curves on orientable closed surfaces, Geometry and Topology, ed. G. M. Rassles and G. M. Stratopoulos, 1989 World Scientific Publ. Co Singapore, pp. 100-104.

[DR95] D. Dimovski and D. Repovš, On homogeneity of compacta in manifolds, Atti. Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, XLIII (1995) 25–31.

[Fe69] H. Federer, Geometric Measure Theory, Springer, Berlin, 1969.

[Gl68] H. Gluck, Geometric characterisation of differentiable manifolds in Euclidean space, II, Michigan Math. J. **15:1** (1968), 33–50.

[MR99] J.Malešič and D. Repovš, On characterization of Lipschitz manifolds, New Developments In Differential Geometry, J. Szenthe, Ed., Kluwer, Dordrecht 1999, pp. 265-277.

[MZ55] D. Montgomery and L. Zippin, Topological Transformation Groups, Princeton, Princeton Univ. Press, 1955.

[Pr04] В. В. Прасолов, Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии, Москва, МЦНМО, 2004.

[RS97] D. Repovš and E. V. Shchepin, A proof of the Hilbert-Smith conjecture for actions by Lipschitz maps, Math. Ann. **308** 1997, 361–364.

[RS00] E. V. Shchepin and D. Repovš, On smoothness of compacta. Jour. of Math. Sci., **100(6)** 2000, 2716–2726.

[RSS93] D. Repovš, A. B. Skopenkov and E. V. Ščepin, A characterization of C^1-homogeneous subsets of the plane, Boll. Unione Mat. Ital., **7-A** (1993), 437–444.

[RSS96] D. Repovš, A. B. Skopenkov and E. V.Ščepin, C^1-homogeneous compacta in $\mathbf{R}^n$ are C^1-submanifolds of $\mathbf{R}^n$, Proc. Amer. Math. Soc. **124:4** (1996), 1219–1226.

[RSS97] D. Repovš, A. B. Skopenkov and E. V. Ščepin, Group actions on manifolds and smooth ambient homogeneity, Jour. of Math. Sci. (New York), **83:4** (1997), 546–549.

[Sk07] A. Skopenkov, A characterization of submanifolds by a homogeneity condition, Topol. Appl. 154 (2007) 1894-1897.

http://dx.doi.org/10.1016/j.topol.2007.03.002, http://arxiv.org/abs/math.GT/0606470.