

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ С ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ

полугодовой спецкурс А. Б. Скопенкова для 3–5 курсов
первый семестр 2009/10 уч. года

по пятницам с 18.09.2009, 15.00-16.35, сбор у ауд. 16-19

Изучаются основные методы алгебраической топологии (гомологии, векторные расслоения и характеристические классы) на примере применений к геометрическим проблемам дифференциальной топологии (о векторных полях, диффеоморфизмах, погружениях и вложениях многообразий). Для многообразий важнейшие методы алгебраической топологии наиболее наглядны. Это позволяет быстро добраться до по-настоящему интересных результатов (будут построены два знаменитых примера: пример Милнора нестандартной 7-мерной сферы и пример Хефлигера нестандартного узла $S^3 \rightarrow \mathbb{R}^6$).

Предполагается знакомство слушателей с основами теорий многообразий и гомологий. Большая часть материала будет преподноситься в виде циклов задач (с подробными указаниями). Будут предложены красивые задачи для исследования.

Программа

1. Три классические проблемы топологии. Две конструкции сферы Милнора. Заузленные сферы Хефлигера.
2. Пересечение в гомологиях многообразий. Двойственность Пуанкаре. Сигнатура.
3. Конструкция Понтрягина: оснащенные многообразия и их кобордизмы. Гомотопическая классификация отображений трехмерной сферы в двумерную. Теорема Понтрягина о гомотопической классификации векторных полей на ориентируемых 3-многообразиях.
4. Инвариантность сигнатуры при кобордизме. Аддитивность сигнатуры. Теорема Рошлина о сигнатуре и многообразии Рошлина. Числа Бернулли и обобщение Милнора-Кервера теоремы Рошлина.
5. Геометрическое определение характеристических классов.
6. Числа Штифеля-Уитни. Препятствие к кобордантности. Теорема Тома о классификации многообразий с точностью до кобордизма (формулировка).
7. Теорема Хирцебруха о сигнатуре для 4- и 8-мерных многообразий (формулировка). Применение: нестандартные семимерные сферы Милнора.
8. Теорема о трубчатой окрестности. Нормальные расслоения.
9. Нормальные классы Уитни. Инвариант Уитни вложений многообразий. Векторные расслоения. Теорема Смейла-Хирша о классификации погружений.
- 10.* Классификация гомотопических сфер. Проблема Кервера.

Литература.

- А. Т. Фоменко и Д. Б. Фукс, Курс гомотопической топологии, Москва, Наука, 1989.
Дж. Милнор, Дж. Сташефф, Характеристические классы, Москва, Мир, 1979.
В. В. Прасолов, Элементы теории гомологий, <http://www.mcsme.ru/prasolov>
А. Б. Скопенков, Алгебраическая топология с элементарной точки зрения, Москва, МЦНМО, в печати, <http://arxiv.org/abs/math/0808.1395>.
А. Skopenkov, Embedding and knotting of manifolds in Euclidean spaces, in: Surveys in Contemporary Mathematics, Ed. N. Young and Y. Choi London Math. Soc. Lect. Notes, 347 (2008) 248–342. <http://arxiv.org/abs/math/0604045>.