СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

доц. А.А.Ошемков
(1 год / 3–5 курс, аспиранты)

Спецкурс посвящен изложению основных понятий, а также некоторых идей и методов, используемых в современной симплектической геометрии.

Программу спецкурса можно условно разделить на две части. Первая часть содержит основные понятия, необходимые для понимания дальнейшего материала, а также классические результаты. Материал этой части излагается достаточно подробно и с полными доказательствами. Вторая часть содержит материал, относящийся к современным достижениям в области симплектической геометрии, и носит более обзорный характер.

ПРОГРАММА СПЕЦКУРСА (1-й семестр)

I. Линейная симплектическая геометрия

1. Симплектическое пространство
   – линейное симплектическое пространство, его каноническая ориентация
   – косоортогональное дополнение и его свойства (симплектические и лагранжевы подпространства)
   – линейная теорема Дарбу
2. Симплектические преобразования
   – линейные симплектические преобразования, геометрия группы $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$, отображение Кэли
   – аффинные емкости, аффинная теорема о несжимаемости шара
3. Простейшие представления и действия симплектической группы
   – стандартное и присоединенное представления
   – представления в пространствах кососимметрических и симметрических форм
   – симплектические эллипсоиды
   – действия на подпространствах и на парах лагранжевых подпространств
   – геометрия лагранжева грассманиана, инварианты троек лагранжевых подпространств
4. Симплектические, евклидовы и комплексные структуры
   – эрмитово пространство, согласованность симплектической, евклидовой и комплексной структур
   – стягиваемость множества комплексных структур, согласованных с симплектической структурой,
   – стягиваемость множества “положительных” комплексных структур
   – соотношения между группами ортогональных, симплектических и унитарных преобразований, геометрия соответствующих однородных пространств

II. Симплектические многообразия

1. Основные определения и простейшие примеры
   – симплектическое многообразие, симплектоморфизм, гамильтоново векторное поле
   – скобка Пуассона, симплектические листы, функции Казимира
   – лагранжевы подмногообразия
   – кокасательные расслоения, комплексные подмногообразия в $\mathbb{C}^n$
   – пример “экзотической” симплектической структуры в $\mathbb{R}^4$
2. Кэлеровы многообразия
   – комплексная структура на многообразии, $\mathbb{C}P^n$ и проективные многообразия
   – дифференциально-геометрические и гомологические свойства кэлеровых многообразий
   – пример Тёрстона
3. Орбиты коприсоединенного представления
   – инвариантные симплектическая и кэлерова структуры на орбитах
   – $\mathbb{C}P^n$, T^*S^n как орбиты коприсоединенного представления
   – симплектическая редукция, отображение момента
4. Локальная эквивалентность в симплектической геометрии
   – теорема Дарбу, относительная теорема Дарбу (теорема Дарбу–Вейнстейна)
   – теорема Костанта
   – теорема Лиувилля
5. Почти-комплексные структуры
   – интегрируемость почти-комплексной структуры, тензор Нийенхёйса
   – почти-комплексные структуры, согласованные с невырожденной формой
   – дифференциально-геометрические свойства невырожденных форм и почти-комплексных структур
   – несуществование почти-комплексной структуры на S^4