ЗАДАЧИ ПО КУРСУ "ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ"

7 семестр

1. Найти гармонические k-формы на n-мерном торе с метрикой $ds^2 = dx_1^2 + \dots + dx_n^2$.

2. Найти гармонические формы на двумерном эллипсоиде в $\mathbb{R}^3$.

3. Найти гармонические формы на двумерном торе вращения.

4. Выписать оператор Лапласа – Бельтрами на 1-формах на сфере в сферических координатах.

5. Выписать оператор Виттена на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в сферических координатах для функции $f = z$.

6. Найти спектр двумерного оператора Шредингера с потенциалом

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(4x_1^2 + 9x_2^2).$$

Вычислить кратности первых восьми собственных чисел.

7. Используя осцилляторное приближение, найти квазиклассический предел первых 10 собственных чисел оператора Шредингера с потенциалом

$$V(x_1, x_2) = (x_1^2 - a^2)^2 + x_2^2.$$

8. Используя осцилляторное приближение, найти квазиклассический предел первых N собственных чисел оператора Шредингера с потенциалом

$$V(x_1, x_2) = (x_1^2 - a^2)^2 + (x_2 - b^2)^2.$$

9. Найти оператор монодромии для двойного прямоугольного барьера

$$V(x) = V_0 > 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < a, \quad b < x < b + a,$$
$$V(x) = 0 \quad \text{при} \quad x < 0, \quad a < x < b, \quad x > a + b.$$

Существуют ли энергии, меньшие V_0, при которых коэффициент прохождения равен 1?

10. Найти собственные значения $E < 0$ оператора Шредингера с потенциалом, имеющим вид прямоугольной ямы

$$V(x) = V_0 < 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < a,$$
$$V(x) = 0 \quad \text{при} \quad x < 0, \quad x > a.$$