

СПИСОК ВОПРОСОВ
Классическая дифференциальная геометрия
(Иванов, осень 2019)

1. Непрерывные, гладкие, регулярные кривые в пространстве, три способа задания кривых, длина кривой, натуральный параметр, кривизна регулярной кривой, главная нормаль бирегулярной кривой.
2. Плоские кривые, регулярные кривые, способы задания плоской кривой, репер Френе и кривизна плоской бирегулярной кривой.
3. Формулы Френе на плоскости, кривизна кривой и репер Френе в произвольной параметризации.
4. Ориентированная кривизна плоской регулярной кривой, ориентированные формулы Френе, ориентированная кривизна в произвольной параметризации.
5. Натуральное уравнение плоской кривой. Его решение. Теоремы существования и единственности решения натурального уравнения (для ориентированной и обычной кривизны).
6. Кривые в трехмерном пространстве. Кривизна и кручение, формулы Френе для бирегулярной кривой. Вычисление кривизны, кручения и репера Френе в произвольной параметризации.
7. Натуральное уравнение пространственной кривой. Теорема существования и единственности решения натурального уравнения. Примеры: кривые нулевого кручения, кривые с постоянными кривизной и кручением.
8. Поверхности, регулярные поверхности, способы задания поверхности, их локальная эквивалентность.
9. Кривые на поверхности, координатные линии, касательный вектор, касательное пространство и его канонические базисы на регулярной поверхности. Изменение компонент касательного вектора и векторов канонического базиса при замене координат на поверхности.
10. Гладкие и регулярные отображения поверхностей. Дифференциал.
11. Первая квадратичная форма, скалярное произведение векторов в касательном пространстве, длина гладкой кривой, угол между кривыми на поверхности. Изометрии регулярных поверхностей.
12. Вторая квадратичная форма регулярной поверхности. Вычисление ее компонент в координатах.
13. Геометрический смысл второй квадратичной формы. Плоские сечения и плоские нормальные сечения, их кривизны. Теорема об отношении пары форм. Теорема Менье.
14. Главные кривизны и главные направления поверхности. Их геометрический смысл (связь с кривизнами нормальных сечений). Формула Эйлера.
15. Средняя и гауссова кривизна поверхности. Геометрический смысл гауссовой кривизны. Формулировка теоремы Бонне.
16. Дериwационные формулы Вейнгартена–Гаусса. Символы Кристоффеля.
17. Теорема Гаусса.
18. Ковариантная производная касательного векторного поля.
19. Геодезические на поверхностях. Теорема существования и единственности. Примеры.
20. Криволинейные координаты в области. Примеры. Касательный вектор к области в точке, касательное пространство, его канонические базисы. Формулы преобразования компонент касательного вектора при замене координат в области.

21. Евклидова метрика в криволинейных координатах в области. Изменение компонент метрики при замене координат. Стереографические координаты на сфере. Метрика на сфере в координатах стереографической проекции. Конформно-евклидовы метрики. Сохранение углов при стереографической проекции.
22. Риманова и псевдориманова метрики. Времениподобные, пространственноподобные и изотропные векторы. Псевдосфера, ее стереографическая проекция. Метрика псевдосферы в координатах стереографической проекции.
23. Геометрия Лобачевского. Модель Пуанкаре в круге. Формула расстояния между точками.
24. Геометрия Лобачевского. Модель верхней полуплоскости. Оценка суммы углов треугольника.
25. Дробно линейные преобразования плоскости и изометрии геометрии Лобачевского в разных моделях.
26. Топологические пространства. Примеры. Открытые и замкнутые множества, их свойства. Непрерывные отображения. Критерий непрерывности. Гомеоморфизмы. Примеры.
27. Связные топологические пространства. Достаточные условия связности. Непрерывные отображения и связность. Линейная связность и связность.
28. Хаусдорфовы топологические пространства. Компактные пространства. Компактность и непрерывные отображения.
29. Топологические многообразия. Гладкие многообразия. Гладкие функции на гладком многообразии. Гладкие отображения гладких многообразий, диффеоморфизмы, примеры.
30. Размерность многообразия. Инвариантность размерности при диффеоморфизмах.
31. Задание многообразий уравнениями. Примеры.
32. Три определения касательного вектора к многообразию. Их эквивалентность.
33. Касательное пространство к многообразию, его размерность.
34. Дифференциал гладкого отображения гладких многообразий. Действие дифференциала на касательный вектор в смысле каждого из трех определений касательного вектора.
35. Регулярные точки и регулярные значения гладкого отображения. Теорема о прообразе регулярного значения. Погружения и вложения. Примеры. Подмногообразия. Существование вложения компактного гладкого многообразия в евклидово пространство. Формулировка слабой и сильной теоремы Уитни.
36. Римановы многообразия. Длина кривой и углы между кривыми на римановом многообразии. Индуцированная метрика. Теорема существования римановой метрики (для компактных многообразий).
37. Ориентируемые и неориентируемые многообразия. Эквивалентность трех определений. Примеры ориентируемых, ориентированных и неориентируемых многообразий.