

**ВОПРОСЫ**  
**к курсу**  
**Классическая дифференциальная геометрия**  
**(Иванов, осень 2014)**

1. Непрерывные, гладкие, регулярные кривые в пространстве, способы задания кривых, длина кривой, натуральный параметр, главная нормаль и кривизна регулярной кривой.
2. Плоские кривые, регулярные кривые, способы задания плоской кривой, репер Френе и кривизна плоской регулярной кривой.
3. Формулы Френе на плоскости, кривизна кривой и репер Френе в произвольной параметризации, соприкасающаяся окружность.
4. Ориентированная кривизна плоской кривой, ориентированные формулы Френе, ориентированная кривизна в произвольной параметризации.
5. Натуральное уравнение плоской кривой. Его решение. Теоремы существования и единственности решения натурального уравнения.
6. Кривые в трехмерном пространстве. Кривизна и кручение, формулы Френе. Вычисление кривизны, кручения и репера Френе в произвольной параметризации.
7. Натуральное уравнение пространственной кривой. Теорема существования и единственности решения натурального уравнения. Примеры: кривая нулевого кручения, кривая с постоянными кривизной и кручением.
8. Поверхности, регулярные поверхности, способы задания поверхности, их локальная эквивалентность.
9. Кривые на поверхности, координатные линии, касательный вектор, касательное пространство и канонический базис на регулярной поверхности. Изменение компонент касательного вектора и векторов канонического базиса при замене координат на поверхности.
10. Длина гладкой кривой на поверхности, первая квадратичная форма, скалярное произведение векторов в касательном пространстве, угол между кривыми на поверхности, изометрии регулярных поверхностей.
11. Вторая квадратичная форма поверхности. Вычисление ее компонент в координатах.
12. Геометрический смысл второй фундаментальной формы. Кривизна плоского сечения поверхности. Теорема об отношении пары форм. Теорема Менье.
13. Главные кривизны и главные направления поверхности. Их геометрический смысл (связь с кривизнами нормальных сечений). Формула Эйлера.
14. Средняя и гауссова кривизна поверхности. Геометрический смысл гауссовой кривизны. Формулировка теоремы Бонне.
15. Деривационные формулы Вейнгартена–Гаусса. Символы Кристоффеля.
16. Теорема Гаусса.
17. Ковариантная производная касательного векторного поля.
18. Геодезические на поверхностях. Определения, примеры.
19. Геодезические на поверхностях, теорема существования и единственности. Примеры.

20. Криволинейные координаты в области. Примеры. Касательный вектор к области в точке, касательное пространство. Канонический базис. Формулы преобразования компонент касательного вектора при замене координат в области.
21. Евклидова метрика в криволинейных координатах в области. Изменение компонент метрики при замене координат. Стереографические координаты на сфере. Метрика на сфере в координатах стереографической проекции. Сохранение углов при стереографической проекции.
22. Риманова и псевдориманова метрики. Времениподобные, пространственноподобные и изотропные векторы. Псевдосфера, ее стереографическая проекция. Метрика псевдосферы в координатах стереографической проекции. Конформно-евклидов вид метрики.
23. Геометрия Лобачевского. Модель Пуанкаре в круге. Теорема косинусов.
24. Геометрия Лобачевского. Модель верхней полуплоскости. Сумма углов треугольника.
25. Дробно линейные преобразования плоскости и изометрии геометрии Лобачевского в разных моделях.
26. Топологические пространства. Примеры. Открытые и замкнутые множества. Непрерывные отображения. Критерий непрерывности. Гомеоморфизмы. Примеры.
27. Связность топологического пространства. Достаточные условия связности. Непрерывные отображения и связность. Линейная связность.
28. Хаусдорфовы топологические пространства. Компактные пространства. Компактность и непрерывные отображения.
29. Топологические многообразия. Гладкие многообразия. Гладкие функции. Гладкие отображения, диффеоморфизмы, примеры.
30. Размерность многообразия. Инвариантность размерности при диффеоморфизмах.
31. Задание многообразий уравнениями. Примеры.
32. Три определения касательного вектора к многообразию. Их эквивалентность.
33. Касательное пространство к многообразию, его размерность, касательное расслоение.
34. Дифференциал гладкого отображения. Действие дифференциала на касательный вектор в смысле каждого из трех определений касательного вектора.
35. Регулярные точки и регулярные значения гладкого отображения. Теорема о прообразе регулярного значения. Погружения и вложения. Примеры. Подмногообразия.
36. Существование вложения компактного гладкого многообразия в евклидово пространство. Формулировка слабой теоремы Уитни.
37. Римановы многообразия. Длина кривой и углы между кривыми на римановом многообразии. Индуцированная метрика. Теорема существования римановой метрики (для компактных многообразий).
38. Ориентируемые и неориентируемые многообразия. Эквивалентность определений. Примеры ориентируемых, ориентированных и неориентируемых многообразий.