

ВОПРОСЫ
к курсу
Классическая дифференциальная геометрия
(Иванов, осень 2010)

1. Плоские кривые, регулярные кривые, способы задания кривых, длина кривой, натуральный параметр, кривизна плоской кривой.
2. Формулы Френе на плоскости, кривизна кривой в произвольной параметризации, ориентированная кривизна.
3. Натуральное уравнение плоской кривой. Его решение. Теоремы существования и единственности.
4. Кривые в пространстве. Кривизна и кручение, формулы Френе. Вычисление кривизны и кручения в произвольной параметризации.
5. Натуральное уравнение пространственной кривой. Теорема существования и единственности решения. Примеры: кривая нулевого кручения, кривая с постоянными кривизной и кручением.
6. Поверхности, регулярные поверхности, способы их задания, их локальная эквивалентность.
7. Кривые на поверхности, координатные линии, касательный вектор, касательное пространство и канонический базис на регулярной поверхности. Изменение компонент вектора и векторов канонического базиса при замене координат.
8. Длина гладкой кривой на поверхности, первая квадратичная форма, скалярное произведение векторов в касательном пространстве, угол между кривыми на поверхности, изометрии регулярных поверхностей.
9. Вторая квадратичная форма поверхности. Вычисление ее компонент в координатах.
10. Геометрический смысл второй фундаментальной формы. Кривизна плоского сечения поверхности. Теорема об отношении пары форм. Теорема Менье.
11. Главные кривизны и главные направления поверхности. Их геометрический смысл. Формула Эйлера.
12. Средняя и гауссова кривизна поверхности. Геометрический смысл гауссовой кривизны. Формулировка теоремы Бонне.
13. Деривационные формулы Вейнгартена–Гаусса. Символы Кристоффеля.
14. Теорема Гаусса.
15. Ковариантная производная касательного векторного поля.
16. Геодезические на поверхностях, эквивалентность определений. Примеры.
17. Геодезические на поверхностях, теорема существования и единственности. Примеры.
18. Криволинейные координаты в области. Примеры. Касательное пространство к области в точке.

19. Евклидова метрика в криволинейных координатах. Изменение компонент метрики при замене координат. Стереографические координаты на сфере. Метрика сферы в координатах стереографической проекции. Сохранение углов при стереографической проекции.
20. Риманова и псевдориманова метрики. Времениподобные, пространственноподобные и изотропные векторы. Псевдосфера, ее стереографическая проекция. Метрика псевдосферы в ней. Конформно-евклидов вид метрики.
21. Геометрия Лобачевского. Модель Пуанкаре. Теорема косинусов.
22. Геометрия Лобачевского. Модель верхней полуплоскости. Сумма углов треугольника.
23. Дробно линейные преобразования плоскости и изометрии геометрии Лобачевского в разных моделях.
24. Метрические пространства. Примеры. Операция взятия внутренности и замыкания. Открытые и замкнутые множества.
25. Топологические пространства. Примеры. Открытые и замкнутые множества. Непрерывные отображения. Критерий непрерывности. Гомеоморфизмы.
26. Связность топологического пространства. Признаки связности. Непрерывные отображения и связность. Линейная связность.
27. Хаусдорфовы топологические пространства. Компактные пространства. Компактность и непрерывные отображения.
28. Топологические многообразия. Гладкие многообразия. Гладкие структуры. Гладкие отображения, диффеоморфизмы.
29. Размерность многообразия. Инвариантность размерности при диффеоморфизмах.
30. Задание многообразий уравнениями. Примеры.
31. Три определения касательного вектора к многообразию. Их эквивалентность.
32. Касательное пространство к многообразию, касательное расслоение.
33. Дифференциал гладкого отображения. Как действует дифференциал на касательный вектор в смысле каждого из трех определений касательного вектора.
34. Регулярные точки и регулярные значения гладкого отображения. Теорема о прообразе регулярного значения. Погружения и вложения. Подмногообразия.
35. Существование вложения компактного гладкого многообразия в евклидово пространство.
36. Теорема Уитни о существовании вложения компактного гладкого n -мерного многообразия в евклидово пространство размерности $2n + 1$.
37. Римановы многообразия. Теорема существования римановой метрики (для компактных многообразий). Длина кривой. Углы между кривыми.
38. Индуцированная риманова метрика на подмногообразии. Примеры. Изометрии.
39. Два определения ориентируемого многообразия, их эквивалентность.
40. Классификация гладких двумерных компактных связных многообразий (схема доказательства: редукция к склейке многоугольников, Эйлерова характеристика).