Über die regulären Zerlegungen geschlossener orientierbarer Flächen

Von *Dietmar Garbe* in Braunschweig

---

§ 1. Einleitung

Unter den Verallgemeinerungen der regulären Polyeder hat sich der von H. R. Brahana eingeführte Begriff der regulären Zerlegungen (engl.: regular maps) geschlossener Flächen als besonders fruchtbar erwiesen. Da die nichtorientierbare Fläche der Charakteristik χ von der orientierbaren Fläche der Charakteristik 2χ regulär zweifach überlagert wird, kommt es darauf an, die regulären Zerlegungen der orientierbaren Flächen zu studieren. Die regulären Zerlegungen der Kugel sind genau die regulären Polyeder. Eine Aufzählung der regulären Zerlegungen vom Geschlecht 1, 2 bzw. 3 findet sich bei Coxeter [3], Coxeter und Moser [7] bzw. Sherk [9]. In der vorliegenden Arbeit[1]) werden unter anderem die regulären Zerlegungen vom Geschlecht 4, 5 und 6 angegeben (§ 7).

Nach einer Zusammenstellung der grundlegenden Begriffe (§ 2) schildern wir in § 3 unser Verfahren zur Aufzählung regulärer Zerlegungen. Anders als zum Beispiel Sherk, der oft geometrische Überlegungen anstellt, beschreiten wir rein gruppentheoretische Wege. Die nächsten drei Paragraphen enthalten einige allgemeine Ergebnisse über Serien regulärer Zerlegungen. Coxeter [6] untersuchte die regulären Komposita (engl.: regular compounds) der hyperbolischen Ebene und fand insbesondere die beiden Serien $\{4, q\}[2\{q, q\}]\{q, 4\}$ und $\{3, 2q\}$ $[3\{q, 2q\}]$ $2\{2q, 3\}$. Analog dazu lassen sich die Beziehungen zwischen den häufig vorkommenden regulären Zerlegungen $\{q, 4\}$, $\{2q, 3\}$ oder $\{2q+1, 3\}$ einerseits und $\{q, q\}$, $\{2q, q\}$ bzw. $\{2q+1, 2q+1\}$ andrerseits studieren (§ 4). Weiterhin treten unter den regulären Zerlegungen einer geschlossenen orientierbaren Fläche besonders häufig solche mit kleiner Polygonanzahl N_2 auf. Sherk [9] gab eine vollständige Liste der regulären Zerlegungen $\{p, 3\}$ mit $N_2 \leqq 6$. Wir zählen in § 6 sämtliche regulären Zerlegungen mit $N_2 < 6$ auf.

Besonders interessant ist der Begriff der irreflexiblen regulären Zerlegung. Während es auf dem Torus irreflexible Zerlegungen gibt, die von Coxeter und Moser [7] vollständig aufgezählt wurden, tritt der irreflexible Fall auf orientierbaren Flächen vom Geschlecht $h > 1$ zunächst nur selten auf. J. R. Edmonds [4; p. 388], P. Bergau sowie F. A. Sherk

---

[1]) Auszug aus der gleichnamigen Dissertation des Verfassers. Braunschweig 1966. Referenten: Prof. Dr. R. Iglisch, Dr. J. Mennicke. Der Verfasser dankt Herrn Dr. J. Mennicke für die Anregung zur vorliegenden Untersuchung sowie für wertvolle Ratschläge und Hinweise.

[10] entdeckten irreflexible reguläre Zerlegungen für das Geschlecht 7 und 8. Unsere Aufzählung regulärer Zerlegungen wird zeigen, daß die orientierbare Fläche vom Geschlecht 7 die einfachste Fläche negativer Charakteristik ist, für die irreflexible Zerlegungen auftreten. Ebenso erweist sich $N_2 = 5$ als kleinste Polygonanzahl, die irreflexible reguläre Zerlegungen zuläßt.

§ 2. Reguläre Zerlegungen und ihre Gruppen

Wir erinnern an die Threlfallsche Definition des Zellsystems [11]: Eine endliche Anzahl N_2 von (nichtausgearteten) Polygonen bildet ein geschlossenes Zellsystem, wenn ihre gerichteten Kanten paarweise einander zugeordnet und der Richtung entsprechend miteinander zur Deckung gebracht sind, so daß aus je zwei Polygonkanten eine Kante des Zellsystems wird. Ferner soll das Polygonsystem zusammenhängend sein. Das so entstehende geschlossene Polyeder fassen wir als topologisches zweidimensionales Polygonsystem auf und sprechen auch von einer *Zerlegung* der geschlossenen zweidimensionalen Mannigfaltigkeit. Die Anzahl der Kanten der Zerlegung sei N_1, die der Ecken N_0, so daß die erzeugenden Polygone im ganzen $2N_1$ Kanten haben.

Zur Definition der Regularität (nach Brahana) betrachten wir inzidenzerhaltende Permutationen der Kanten, die wir unter Vernachlässigung der Metrik *Deckbewegungen* oder *Automorphismen* der Zerlegung nennen. Sämtliche Deckbewegungen einer Zerlegung bilden die sogenannte *Gruppe der Zerlegung.* Eine Zerlegung heißt *regulär*, wenn sie die beiden folgenden Automorphismen zuläßt: eine Deckbewegung R, welche die ein beliebiges, aber fest gewähltes Polygon berandenden Kanten der Reihe nach zyklisch vertauscht, und eine weitere S, durch welche die an einer Ecke dieses Polygons zusammenstoßenden Kanten in sukzessiver Folge zyklisch permutiert werden.

R und S sind durch diese Angaben eindeutig bestimmt und erzeugen die sogenannte *Drehgruppe*[2]) $\mathfrak{G}$ der Zerlegung. $\mathfrak{G}$ operiert transitiv auf den Ecken, Polygonen und Kanten der Zerlegung. Somit ist die Definition der Regularität unabhängig von dem zugrundegelegten ausgezeichneten Polygon, und jedes Polygon der Zerlegung weist die gleiche Eckenzahl p auf. Ebenso stoßen an jeder Ecke gleichviele — etwa q — Kanten zusammen, so daß für eine reguläre Zerlegung die Bezeichnung mit dem Schläfli-Symbol $\{p, q\}$ gerechtfertigt ist.

Da RS eine Kante des ausgezeichneten Polygons unter Vertauschung der beiden mit ihr inzidenten (nicht notwendig verschiedenen) Polygone und Ecken in sich überführt, ist die Drehgruppe $\mathfrak{G}$ einer regulären Zerlegung $\{p, q\}$ eine Faktorgruppe der durch

$$R^p = S^q = (RS)^2 = E \tag{2.1}$$

definierten Polyedergruppe $\mathfrak{P} = [p, q]^+$. Für eine orientierbare Fläche sind E und RS die beiden einzigen Drehungen, welche die ausgezeichnete Kante in sich überführen. Also besitzt $\mathfrak{G}$ die Ordnung $N = 2N_1$. Gibt es in der Gruppe der Zerlegung einen Automorphismus, der eine Kante unter Vertauschung der beiden inzidenten Ecken, aber unter Festlassen der zwei anliegenden Polygone in sich überführt, so heißt die reguläre Zerlegung *reflexibel* [7; p. 102], und ihre Gruppe hat die Ordnung $4N_1$. Im Falle einer nichtorientierbaren Fläche tritt ein solcher Automorphismus bereits in der Drehgruppe der Zerlegung auf. Hier sind reguläre Zerlegungen also stets reflexibel, und die Drehgruppe stimmt mit der vollen Gruppe der Zerlegung überein. Nützlich ist es, sich das folgende Kriterium

---

[2]) Der Begriff „Drehung" wird bei uns in Anlehnung an Coxeter und Moser [7; p. 54] im Sinne eines die Orientierung erhaltenden Automorphismus gebraucht.

klarzumachen: Eine reguläre Zerlegung einer orientierbaren Fläche ist genau dann reflexibel, wenn man in den definierenden Relationen von $\mathfrak{G}$ die Erzeugenden R und S durch R^{-1} bzw. S^{-1} ersetzen darf.

Jede reguläre Zerlegung $\{p, q\}$ einer geschlossenen Fläche induziert auch eine entsprechende Zerlegung der zugehörigen universellen Überlagerungsfläche. Diese kann metrisch als Parkettierung der Kugel, der euklidischen oder der hyperbolischen Ebene mit regelmäßigen p-Ecken realisiert werden, je nachdem, ob für die Charakteristik der Grundfläche $\chi > 0$, $\chi = 0$ bzw. $\chi < 0$ gilt [7; p. 26]. Umgekehrt kann man natürlich jede reguläre Zerlegung $\{p, q\}$ durch geeignete Identifikationen aus der regelmäßigen Unterteilung $\{p, q\}^*$ der zugehörigen universellen Überlagerungsfläche erhalten (vgl. z. B. Fig. 1).

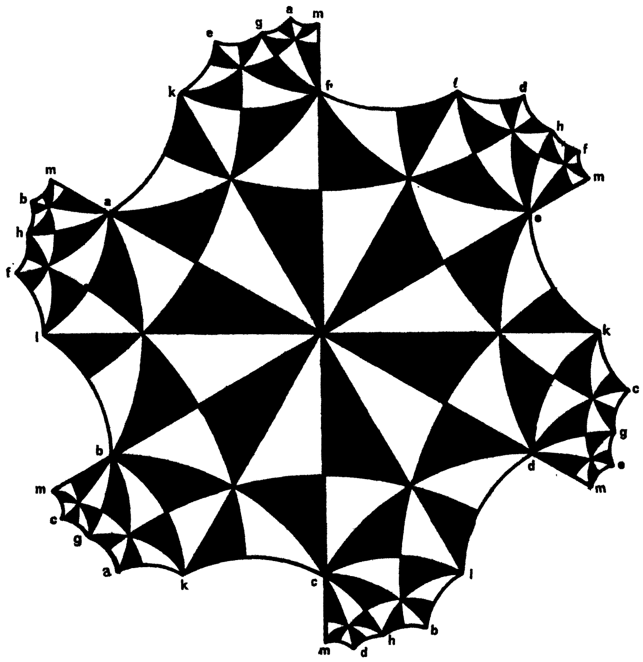

Fig. 1
Die reguläre Zerlegung $\{4, 6\}$ vom Geschlecht 4 als Teil der regelmäßigen Pflasterung $\{4, 6\}^*$ der hyperbolischen Ebene

Gruppentheoretisch besagt dies, daß wir in der vollständigen Symmetriegruppe $[p, q]$ der regelmäßigen Pflasterung $\{p, q\}^*$ bzw. in der Gruppe $[p, q]^+$ ihrer eigentlichen Bewegungen [7; p. 54] geeignete Deckbewegungen der Gruppeneins gleichsetzen, also zu einer Faktorgruppe von $[p, q]$ bzw. $[p, q]^+$ übergehen. Für Zerlegungen auf orientierbaren Flächen sind die Elemente des Normalteilers Deckbewegungen erster Art, so daß uns nur die Normalteiler der Gruppe $[p, q]^+$ interessieren werden. Es gilt: Jeder fixpunktfreie Normalteiler $\mathfrak{N}$ der Gruppe $\mathfrak{P} = [p, q]^+$ von endlichem Index liefert eine reguläre Zerlegung $\{p, q\}$ einer geschlossenen orientierbaren Fläche, und man erhält auf diese Weise sämtliche regulären Zerlegungen $\{p, q\}$ der orientierbaren Flächen. Dabei ist $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{P}/\mathfrak{N}$, und verschiedene Normalteiler liefern verschiedene Zerlegungen. Das Geschlecht der Fläche, auf der die gewonnene Zerlegung liegt, ist durch p, q und die Ordnung N der Faktorgruppe festgelegt. Denn die Euler-Poincarésche Charakteristik

$$\chi = N_0 - N_1 + N_2 = 2 - 2h$$

ergibt zusammen mit der Relation

$$N = 2N_1 = pN_2 = qN_0 \tag{2.2}$$

die Beziehung

$$h = 1 + \frac{N}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right). \tag{2.3}$$

Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß zu jeder regelmäßigen Unterteilung $\{p, q\}^*$ und zu jeder regulären Zerlegung $\{p, q\}$ das duale Gegenstück $\{q, p\}^*$ bzw. $\{q, p\}$ existiert [1; p. 274]. Duale reguläre Zerlegungen besitzen isomorphe Drehgruppen, in deren Relationensystemen nur die Rollen von R und S vertauscht sind.

§ 3. Verfahren zur Aufzählung regulärer Zerlegungen

Für fest vorgegebenes Geschlecht h unterliegen die arithmetischen Bestimmungszahlen p, q, N_0, N_1, N_2 der regulären Zerlegungen dieser Fläche wegen (2.2) und (2.3) starken Einschränkungen, woraus man für $h > 0$ die diophantische Gleichung

$$p = 2q\,\frac{N_2 + 2h - 2}{N_2(q - 2)} \tag{3.1}$$

gewinnt. Bei Beschränkung auf $q \leqq p$ folgt aus (3.1) $q \leqq 4h$. Für vorgegebenes $h > 0$ lassen sich die endlich vielen arithmetisch möglichen Zerlegungen also leicht ermitteln.

Während sich Brahana [1] bei der Untersuchung, ob sich die arithmetischen Bestimmungszahlen auch geometrisch realisieren lassen, auf die Möglichkeit der Permutationsdarstellung von $\mathfrak{G}$ auf den N_2 Polygonen der Zerlegung zurückzog, stellte Sherk [9] jeweils ad hoc durchgeführte, meist geometrische Überlegungen bezüglich der Identifikationen der Polygone von $\{p, q\}^*$ an. Wir wollen folgenden Weg beschreiten: Die Aufzählung sämtlicher regulärer Zerlegungen $\{p, q\}$ vom Geschlecht h läuft auf die Ermittlung derjenigen Normalteiler $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{P} = [p, q]^+$ von vorgegebenem Index N hinaus, für die die Nebenklassen $R\mathfrak{N}$, $S\mathfrak{N}$ und $RS\mathfrak{N}$ die Ordnungen p, q bzw. 2 behalten[3]). Die überwiegende Anzahl der in Frage stehenden Drehgruppen $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{P}/\mathfrak{N}$ ist aber auflösbar. Man übersieht also für diese Gruppen mit Hilfe der Faktorkommutatorgruppe $\mathfrak{P}/\mathfrak{P}'$ alle Möglichkeiten für das oberste Stück der Hauptreihen von $\mathfrak{G}$. Die entsprechenden Normalteiler von $\mathfrak{P}$ ermittle man nach dem Reidemeister-Verfahren (vgl. etwa [8; pp. 86—95]), steige die Hauptreihen durch wiederholte Anwendung dieser Methode weiter hinab, um so schließlich alle möglichen Normalteiler $\mathfrak{N}$ vom Index N aufzusuchen. Das Verfahren wird sich meist durch zusätzliche, auf den Einzelfall zugeschnittene gruppentheoretische Überlegungen abkürzen lassen.

Die Gruppenordnungen N, die eine nichtauflösbare Drehgruppe zulassen, bleiben für $h < 13$ noch unterhalb der Schranke 1000, so daß man die Frage nach der Existenz einer regulären Zerlegung auch in einem dieser seltenen Fälle wird entscheiden können. Für das Geschlecht 4, 5 und 6 haben wir das Resultat einer solchen Aufzählung der regulären Zerlegungen in den Tabellen am Schluß der Arbeit zusammengefaßt[4]). Insbesondere folgt aus diesen Ergebnissen:

Satz 3.1. *Die orientierbare Fläche vom Geschlecht* 7 *ist die einfachste Fläche negativer Charakteristik, für die irreflexible reguläre Zerlegungen existieren.*

---

[3]) Wir werden in Zukunft die Elemente $R\mathfrak{N}$, $S\mathfrak{N}$, $RS\mathfrak{N}$ der Faktorgruppe $\mathfrak{P}/\mathfrak{N}$ auch einfach mit R, S bzw. RS bezeichnen, wenn aus dem Zusammenhang heraus klar ist, in welcher Gruppe wir operieren.

[4]) Einzelheiten findet man in der in Anmerkung [1]) genannten Dissertation des Verfassers.

§ 4. Zur Struktur regulärer Zerlegungen $\{n, 3\}$ und $\{n, 4\}$

Die diophantische Gleichung (3.1) hat bei festem h besonders viele Lösungen für kleine Zahlen N_2 oder q. Wenn wir hier also für $q = 3$ und $q = 4$ einige allgemeine Überlegungen anstellen und in § 6 sämtliche regulären Zerlegungen mit einer Polygonzahl $N_2 < 6$ angeben, so erleichtert dies einmal eine Aufzählung regulärer Zerlegungen, zum anderen sind die Resultate aber auch im Hinblick auf das Problem einer Systematik der regulären Zerlegungen von Interesse.

Bekanntlich lassen sich einem Würfel zwei Tetraeder einbeschreiben, deren Ecken zusammen genau die Würfelecken bilden. Die Tetraederkanten sind die Flächendiagonalen des Würfels. In die Sprache der regulären Zerlegungen übersetzt, besagt dies, daß die reguläre Zerlegung $\{4, 3\}$ vom Geschlecht $h = 0$ eine Zerlegung $\{3, 3\}$ der gleichen Fläche induziert. Dieser Tatbestand läßt sich verallgemeinern. Die folgenden Sätze liefern aus gegebenen Zerlegungen $\{n, 3\}$ und $\{n, 4\}$ weitere reguläre Zerlegungen. Es sei noch bemerkt, daß hier eine gewisse Beziehung zu dem von H. S. M. Coxeter für die regulären Polyeder [5; pp. 47—50], die euklidische [3] und die hyperbolische [6] Ebene definierten Begriff des regulären Kompositums besteht.

Satz 4.1. *Jede reguläre Zerlegung $\{2n, 3\}$ auf einer Fläche vom Geschlecht h induziert in bestimmter Weise eine reguläre Zerlegung $\{2n, n\}$ entweder auf der gleichen Fläche oder auf einer solchen vom Geschlecht $3h - 2$, je nachdem, ob die Drehgruppe von $\{2n, 3\}$ eine Diedergruppe der Ordnung 6 als Faktorgruppe zuläßt oder nicht. Im zweiten Fall wird $\{2n, n\}$ auch von einer regulären Zerlegung $\{2n, 3\}$ vom Geschlecht $3h - 2$ induziert.*

Beweis. Das Element SR^{-1} ist in $[2n, 3]^+$ zu R konjugiert; denn die Relation $(RS)^2 = E$ liefert $SR^{-1} = S^{-1}RS$. Also haben die Elemente $A = R$ und $B = (SR^{-1})^2$ die Ordnungen $2n$ bzw. n, und AB ist involutorisch. Durch Aufzählung der Nebenklassen ermittelt man leicht, daß die Untergruppe $\{A, B\}$ in $[2n, 3]^+$ den Index 3 hat. Geht man nun von einem Normalteiler $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{P} = [2n, 3]^+$ aus, der eine reguläre Zerlegung $\{2n, 3\}$ vom Geschlecht h definiert, so induziert $\mathfrak{N} \cap \{A, B\}$ eine reguläre Zerlegung $\{2n, n\}$, die gemäß (2.3) entweder auf derselben Fläche oder auf der Fläche vom Geschlecht $3h - 2$ liegt, je nachdem, ob $\mathfrak{N} \subset \{A, B\}$ oder nicht. Das erste tritt genau dann ein, wenn die Gruppe $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{P}/\mathfrak{N}$ eine Diedergruppe $\mathfrak{D}_3$ der Ordnung 6 als Faktorgruppe besitzt. In der Tat: Läßt $\mathfrak{G}$ eine Gruppe $\mathfrak{D}_3$ als Faktorgruppe zu, so ist $\mathfrak{N} \subset \{A, B\}$, da die entsprechende Faktorgruppe der Ordnung 6 von $\mathfrak{P}$ nur durch $R^2 = S^3 = (RS)^2 = E$ definiert sein kann. Gilt umgekehrt $\mathfrak{N} \subset \{A, B\}$, so ist $\{A, B\}/\mathfrak{N}$ eine von drei konjugierten Untergruppen in $\mathfrak{P}/\mathfrak{N}$ vom Index 3. $\mathfrak{G}$ läßt also eine Faktorgruppe $\mathfrak{D}_3$ zu. Der Rest der Aussage von 4.1 folgt aus der Tatsache, daß auf alle Fälle $\mathfrak{N} \cap \{A, B\}$ ein fixpunktfreier Normalteiler von $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{P}/\mathfrak{N} \cap \{A, B\} \cong \mathfrak{D}_3$ ist.

So induziert zum Beispiel die reguläre Zerlegung $\{3 \cdot 4, 3\}$ vom Geschlecht 4 die Zerlegung $\{3 \cdot 4, 3 \cdot 2\}$ auf derselben Fläche (Tab. II, Nr. 9 u. 4), während dagegen $\{2 \cdot 5, 3\}$ vom Geschlecht 5 (Tab. III, Nr. 12) eine reguläre Zerlegung $\{10, 5\}$ vom Geschlecht 13 liefert.

Satz 4.2. *Mit jeder regulären Zerlegung $\{2n + 1, 3\}$ vom Geschlecht h existiert auch eine solche vom Typ $\{2n + 1, 2n + 1\}$ für das Geschlecht* $h^* = 6\,\dfrac{h-1}{2n-5} + 3h - 2$.

Beweis. Die von $A = R$ und $B = (SR^{-1})^2$ erzeugte Untergruppe von $\mathfrak{P} = [2n + 1, 3]^+$ wird definiert durch die Relationen $A^{2n+1} = B^{2n+1} = (AB)^2 = (A^{-1}B^n)^3 = (A^{-2}B^n)^2 = E$; denn $ABA = RSR^{-1}S = S^{-1}R^{-2}S$ hat $(ABA)^n = S^{-1}RS = SR^{-1}$ zur Folge. Überdies ersieht man daraus, daß die Untergruppe $\{A, B\}$ sogar mit $\mathfrak{P}$ übereinstimmt. Die Gruppe

$[2n + 1, 3]^+$ ist also eine Faktorgruppe von $[2n + 1, 2n + 1]^+$, so daß jeder Normalteiler in $[2n + 1, 3]^+$ von endlichem Index, der keine Elemente endlicher Ordnung besitzt, zu einem Normalteiler von $[2n + 1, 2n + 1]^+$ gehört, für den dies erst recht gilt.

Beispielsweise induziert die Dodekaederzerlegung vom Geschlecht 0 die reguläre Zerlegung $\{5, 5\,|\,3\}$ vom Geschlecht 4 (Tab. II, Nr. 10).

Satz 4.3. *Jede reguläre Zerlegung $\{2n + 1, 4\}$ auf einer orientierbaren Fläche vom Geschlecht h, deren Drehgruppe $\mathfrak{G}$ die Kommutatorgruppe $\mathfrak{G}'$ echt enthält, induziert dort auch eine reguläre Zerlegung $\{2n + 1, 2n + 1\}$. Für $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}'$ erhält man eine reguläre Zerlegung $\{2n + 1, 2n + 1\}$ vom Geschlecht $2h - 1$.*

Beweis. Die Kommutatorgruppe $\mathfrak{P}'$ von $\mathfrak{P} = [2n + 1, 4]^+$ hat den Index 2. $\mathfrak{P}'$ hat die Erzeugenden $A = R$ und $B = SRS^{-1}$ und die definierenden Relationen

$$A^{2n+1} = B^{2n+1} = (AB)^2 = E.$$

Die reguläre Zerlegung $\{5, 4\}_6$ vom Geschlecht 4 gibt Anlaß zu der Zerlegung $\{5,5\,|\,3\}$ (Tab. II, Nr. 12 u. 10). In Fig. 2 ist dieser Sachverhalt durch Konstruktion des regulären

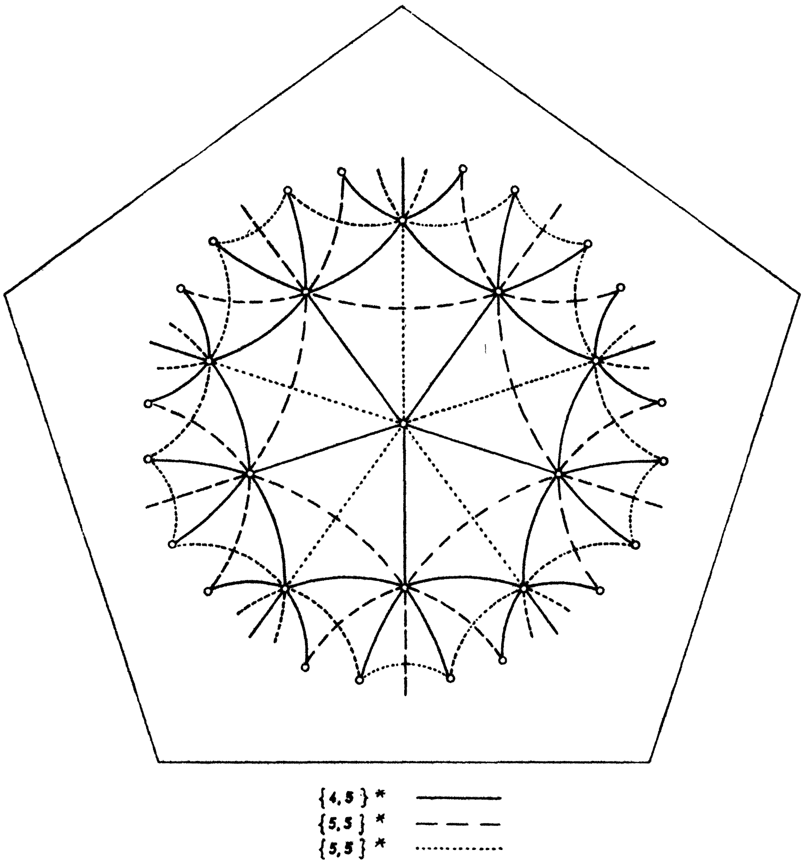

Fig. 2

Kompositums $\{4, 5\}\,[2\{5, 5\}]$ der hyperbolischen Ebene veranschaulicht. Als Paradigma für den zweiten Fall — Übereinstimmung von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ — sei die reguläre Zerlegung $\{7, 4\,|\,3\}$ für $h = 10$ mit der Drehgruppe $(7, 4\,|\,2, 3) \cong PSL\,(2, 7)$ der Ordnung 168 genannt [2; p. 83]. Hinreichend (aber nicht notwendig) dafür, aus $\{2n + 1, 4\}$ eine reguläre Zerlegung $\{2n + 1, 2n + 1\}$ für das gleiche Geschlecht zu erhalten, ist natürlich schon die Auflösbarkeit von $\mathfrak{G}$. Dies trifft für gewöhnlich sogar auf jede reguläre Zerlegung $\{n, 4\}$ zu:

Satz 4.4. *Die Auflösbarkeit der Drehgruppe $\mathfrak{G}$ einer regulären Zerlegung $\{n, 4\}$ vom Geschlecht h ist im allgemeinen eine hinreichende Bedingung dafür, daß $\{n, 4\}$ auf dieser Fläche auch eine reguläre Zerlegung vom Typ $\{n, n\}$ induziert. Ausnahmen bilden genau diejenigen regulären Zerlegungen $\{4n, 4\}$, bei denen die Faktorkommutatorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'$ eine zyklische Gruppe der Ordnung 4 ist.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage zunächst für den Typ $\{4n + 2, 4\}$. Für $\mathfrak{P} = [4n + 2, 4]^+$ ist $\mathfrak{P}/\mathfrak{P}' \cong \mathfrak{Z}_2 \times \mathfrak{Z}_2$. Die drei Normalteiler in $\mathfrak{P}$ vom Index 2 sind:

$$\mathfrak{N}_1^2\colon A = R;\ B = SRS^{-1} \qquad A^{4n+2} = B^{4n+2} = (AB)^2 = E$$

$$\mathfrak{N}_2^2\colon A = S;\ B = RSR^{-1} \qquad A^4 = B^4 = (AB)^{2n+1} = E$$

$$\mathfrak{N}_3^2\colon A = S^2;\ B = SR;\ C = RS^{-1} \qquad A^2 = B^2 = (AC)^2 = (BC)^{2n+1} = E\,.$$

Da die Faktorkommutatorgruppen von $\mathfrak{N}_2^2$ bzw. $\mathfrak{N}_3^2$ eine zyklische Gruppe $\mathfrak{Z}_4$ bzw. eine Kleinsche Vierergruppe $\mathfrak{Z}_2 \times \mathfrak{Z}_2$ sind und $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{P}/\mathfrak{N}$ nach Voraussetzung auflösbar ist, umfaßt $\mathfrak{N}_1^2$ den Normalteiler $\mathfrak{N}$. Dieser induziert also in $\mathfrak{N}_1^2 = [4n + 2, 4n + 2]^+$ die behauptete reguläre Zerlegung $\{4n + 2, 4n + 2\}$ für das gleiche Geschlecht h.

Betrachten wir nun den Fall $\{4n, 4\}$. Für $\mathfrak{P} = [4n, 4]^+$ ist $\mathfrak{P}/\mathfrak{P}' \cong \mathfrak{Z}_2 \times \mathfrak{Z}_4$ (Fig. 3). Die drei Normalteiler in $\mathfrak{P}$ vom Index 2 haben dieselben Erzeugenden und ganz analoge

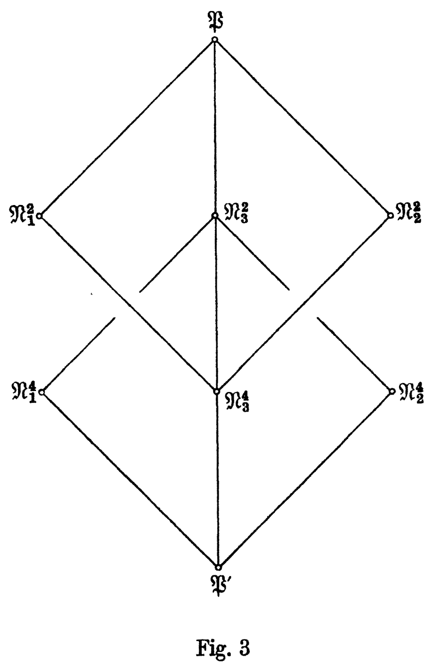

Fig. 3

Relationen wie oben. Ist die Faktorkommutatorgruppe von $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{P}/\mathfrak{N}$ keine zyklische Gruppe der Ordnung 4, dann enthält $\mathfrak{N}_1^2 = \{R, SRS^{-1}\}$ den Normalteiler $\mathfrak{N}$. Dies ist klar, wenn bei der eineindeutigen Zuordnung der Normalteiler von $\mathfrak{G}$ zu den Normalteilern von $\mathfrak{P}$, die $\mathfrak{N}$ umfassen, die Kommutatorgruppe $\mathfrak{G}'$ den Normalteilern $\mathfrak{N}_1^2$, $\mathfrak{N}_3^4$ oder $\mathfrak{P}'$ entspricht. Andrerseits können aber $\mathfrak{N}_2^2$ und $\mathfrak{N}_3^2$ nicht der Gruppe $\mathfrak{G}'$ zugeordnet sein; denn $\mathfrak{N}_2^2/(\mathfrak{N}_2^2)'$ und $\mathfrak{N}_3^2/(\mathfrak{N}_3^2)'$ sind 2-Gruppen und die Faktorkommutatorgruppe nicht zyklischer p-Gruppen ist nicht zyklisch. Berücksichtigt man noch, daß genau für $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}' \cong \mathfrak{Z}_4$ der Normalteiler $\mathfrak{N}$ nicht in $\mathfrak{N}_1^2$ enthalten ist, so ist der Beweis vollständig.

Eine der (seltenen) Ausnahmen ist etwa die durch

$$R^8 = S^4 = (RS)^2 = (RS^{-1})^3 = E\,,$$
$$(R^4, SR^{-3}S) = (R^4, S^{-2}R^{-2}SR^2S^2) = E$$

definierte reguläre Zerlegung $\{8, 4\}$ vom Geschlecht $h = 37$.

Zur Verdeutlichung des Sachverhaltes formulieren wir noch die folgende notwendige und hinreichende Bedingung:

Satz 4.5. *Jede reguläre Zerlegung $\{n, 4\}$ vom Geschlecht h induziert eine reguläre Zerlegung $\{n, n\}$ auf der gleichen Fläche, wenn R und $S\,RS^{-1}$ eine echte Untergruppe der Drehgruppe von $\{n, 4\}$ erzeugen. Andernfalls erhält man eine reguläre Zerlegung $\{n, n\}$ vom Geschlecht $h^* = 2h - 1$. Im zweiten Fall wird $\{n, n\}$ auch von einer regulären Zerlegung $\{n, 4\}$ vom Geschlecht h^* induziert.*

Wir wollen auch festhalten, welchen Bedingungen eine reguläre Zerlegung $\{2n, n\}$ (bzw. $\{2n + 1, 2n + 1\}$ bzw. $\{n, n\}$) genügen muß, um von einer regulären Zerlegung $\{2n, 3\}$ (bzw. ($\{2n + 1, 3\}$ bzw. $\{n, 4\}$) induziert zu werden:

Satz 4.6. *Zu einer regulären Zerlegung*[5] ${}^{N_2}\{2n, n\}^{g_i(A,B)=E}$ *vom Geschlecht h gehört genau dann eine reguläre Zerlegung $\{2n, 3\}$ derselben Fläche, die ${}^{N_2}\{2n, n\}^{g_i(A,B)=E}$ gemäß 4.1 induziert, wenn der normale Abschluß $\mathfrak{N}$ von $\{g_i(R, S^{-1}R^2S)\}$ in $\mathfrak{P} = [2n, 3]^+$ fixpunktfrei und vom Index $6n \cdot N_2$ ist. Dabei entsprechen die induzierte und induzierende Zerlegung einander eineindeutig. Besitzt die Drehgruppe $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{P}/\mathfrak{N}$ überdies einen Normalteiler der Ordnung 3, der nicht in dem zur Faktorgruppe $\mathfrak{D}_3$ von $\mathfrak{G}$ gehörigen Normalteiler enthalten ist, so wird $\{2n, n\}$ auch von einer regulären Zerlegung $\{2n, 3\}$ vom Geschlecht $\frac{h+2}{3}$ induziert und umgekehrt.*

Beweis. Gegeben ist die reguläre Zerlegung ${}^{N_2}\{2n, n\}^{g_i(A,B)=E}$ vom Geschlecht h. Wenn diese nach 4.1 von einer regulären Zerlegung $\{2n, 3\}$ derselben Fläche induziert wird, so sind die Relationen $g_i(R, S^{-1}R^2S) = E$ in der Drehgruppe $\mathfrak{G}$ von $\{2n, 3\}$ erfüllt. Nach Voraussetzung ist die Ordnung von $\mathfrak{G}$ $6n \cdot N_2$. Mit dem Todd-Coxeter-Verfahren zeigt man, daß die Ordnung der durch $R^{2n} = S^3 = (RS)^2 = g_i(R, S^{-1}R^2S) = E$ definierten Gruppe höchstens $6n \cdot N_2$ beträgt. Also ist der normale Abschluß von $\{g_i(R, S^{-1}R^2S)\}$ in $\mathfrak{P}$ fixpunktfrei und vom Index $6n \cdot N_2$.

Wenn umgekehrt die Elemente $g_i(R, S^{-1}R^2S)$ in $\mathfrak{P}$ einen fixpunktfreien Normalteiler $\mathfrak{N}$ vom Index $6n \cdot N_2$ erzeugen, so liefern sie nach (2.3) eine reguläre Zerlegung $\{2n, 3\}$ vom Geschlecht h mit der Drehgruppe $\mathfrak{G}$. In $\mathfrak{G}$ erzeugen $A = R$ und $B = S^{-1}R^2S$ eine Untergruppe vom Index 3. Nach 4.1 wird also eine Zerlegung $\{2n, n\}$ derselben Fläche induziert, die selbstverständlich mit der vorgegebenen Zerlegung ${}^{N_2}\{2n, n\}$ übereinstimmt. Dabei sind verschiedene Normalteiler $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{P}$ natürlich auch in $\{A, B\}$ voneinander verschieden und umgekehrt.

Zur Faktorgruppe $\mathfrak{D}_3$ von $\mathfrak{G}$ möge der Normalteiler $\mathfrak{N}^6$ von $\mathfrak{P}$ gehören, und es existiere ein Normalteiler $\mathfrak{N}^*$ von $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{N}^* \cap \mathfrak{N}^6 = \mathfrak{N}$ und $[\mathfrak{N}^* : \mathfrak{N}] = 3$. Wegen $\mathfrak{N}^6 \cap \mathfrak{N}^* = \mathfrak{N}$ muß $\mathfrak{N}^*$ notwendig fixpunktfrei sein, definiert also eine reguläre Zerlegung $\{2n, 3\}$ vom Geschlecht $\frac{h+2}{3}$, die ${}^{N_2}\{2n, n\}^{g_i(A,B)=E}$ induziert. Die Umkehrung der Aussage ist unmittelbar klar.

Satz 4.7. *Zu einer regulären Zerlegung $\{2n + 1, 2n + 1\}$ vom Geschlecht h gehört genau dann eine reguläre Zerlegung $\{2n + 1, 3\}$ vom Geschlecht $\frac{(2n-5)\,h + 4n - 4}{6n - 9}$,* die

[5]) d. i. die reguläre Zerlegung $\{2n, n\}$ mit N_2 Polygonen und dem Relationennormalteiler $\{g_i(A, B)\}$ von $A^{2n} = B^n = (AB)^2 = E$.

$\{2n+1, 2n+1\}$ gemäß 4.2 induziert, wenn die Drehgruppe von $\{2n+1, 2n+1\}$ die Relationen $(A^{-1}B^n)^3 = (A^{-2}B^n)^2 = E$ erfüllt. Verschiedene Zerlegungen $\{2n+1, 3\}$ induzieren verschiedene Zerlegungen $\{2n+1, 2n+1\}$.

Beweis. Nach dem Beweis von 4.2 ist $[2n,3]^+$ Faktorgruppe von $[2n+1, 2n+1]^+$. Der dazugehörige Relationennormalteiler ist $(A^{-1}B^n)^3 = (A^{-2}B^n)^2 = E$. Daraus folgt die Behauptung.

Satz 4.8. *Eine reguläre Zerlegung $\{n, n\}$ vom Geschlecht h wird genau dann gemäß 4.5 von einer regulären Zerlegung $\{n, 4\}$ der gleichen Fläche induziert, wenn die Drehgruppe von $\{n, n\}$ irgendeinen Automorphismus zuläßt, der A mit B vertauscht. Die Zerlegung $\{n, 4\}$ ist dabei durch $\{n, n\}$ eindeutig bestimmt. Die Zerlegung $\{n, n\}$ wird überdies genau dann von einer regulären Zerlegung $\{n, 4\}$ vom Geschlecht $\frac{h+1}{2}$ induziert, wenn es ein innerer Automorphismus ist.*

Beweis. $\{n, 4\}$ induziere $\{n, n\}$ nach 4.5. Dann ist $A = R$ und $B = SRS^{-1}$, und $T \underset{\mathrm{Df}}{=} SR$ transformiert A in B und B in A. Besitzt $\{A, B\}$ umgekehrt einen Automorphismus, der A mit B vertauscht, so nehmen wir zu $\{A, B\}$ ein Element T und die Relationen $T^2 = E$, $TAT = B$ hinzu und setzen $A = R$, $T = SR$. Ist der betrachtete Automorphismus von $\{A, B\}$ sogar ein innerer Automorphismus, so gibt es ein Element T der Ordnung 2 in $\{A, B\}$ mit $TAT = B$. Wir setzen $A = R$ und $T = SR$. Dann erzeugen R und S die Gruppe $\{A, B\}$, und die Elemente R, S bzw. RS haben die Ordnungen $n, 4$ bzw. 2.

§ 5. Einige Serien regulärer Zerlegungen

Die folgenden Sätze sollen die im nächsten Paragraphen erfolgende Aufzählung von Zerlegungen mit kleiner Polygonanzahl vorbereiten.

Satz 5.1. *Eine Serie regulärer Zerlegungen $\{2(2m-1)(2n-1), (2m-1)(2n-1)\}$ vom Geschlecht $h = (2m-1)^2 n - (2m-1)(m+1) + 1$ vermittelt das Relationensystem*

$$(5.1) \qquad \begin{gathered} R^p = S^q = (RS)^2 = E\,, \\ R \rightleftarrows S^{2m-1},\ R^2 \rightleftarrows S \end{gathered}$$

für $p = 2(2m-1)(2n-1)$ und $q = (2m-1)(2n-1)$. Die Drehgruppe ist eine Gruppe $\mathfrak{D}_{2m-1} \times \mathfrak{Z}_{(2m-1)(2n-1)}$.

Beweis. Nehmen wir die Relation $R^2 = E$ zu (5.1) hinzu, so erhalten wir eine Faktorgruppe $\mathfrak{D}_{2m-1}$. Der zugehörige Normalteiler ist zyklisch und wird von R^2 erzeugt. Er hat also höchstens die Ordnung $(2m-1)(2n-1)$. Andrerseits ist die Faktorkommutatorgruppe von (5.1) eine Gruppe $\mathfrak{Z}_2 \times \mathfrak{Z}_{(2m-1)(2n-1)}$. Nach dem zweiten Isomorphiesatz hat der Normalteiler $\{R^2\}$ somit auch wenigstens die Ordnung $(2m-1)(2n-1)$. In (5.1) gilt die Relation $R^{2n(2m-1)} S^{2m-1} = E$; denn die Faktorkommutatorgruppe ändert sich durch Hinzunahme dieser Relation ebensowenig wie die oben erwähnte Faktorgruppe $\mathfrak{D}_{2m-1}$. Mithin erzeugen $A = R^{(2m-1)(2n-1)}$ und $B = R^{(2m-1)(2n-1)+1} S$ eine Diedergruppe $\mathfrak{D}_{2m-1}$, die Normalteiler in (5.1) ist. Da $\{A, B\} \cap \{R^2\} = \{E\}$ ist und überdies R^2 im Zentrum von (5.1) liegt, ist die Aussage des Satzes bewiesen.

Satz 5.2. *Es seien k, l, m natürliche ganze Zahlen mit der Eigenschaft $(k, 4) \geqq (l, 2)$ und $m \equiv 3 \bmod 6$. Dann definieren die Relationen*

$$(5.2) \qquad \begin{gathered} R^{(k,4)m} = S^{(l,2)m} = (RS)^2 = E\,, \\ R \rightleftarrows S^3,\ S \rightleftarrows R^3\,, \\ R^{\frac{(k,4)}{(l,2)}m} = S^m \end{gathered}$$

auf der Fläche vom Geschlecht $h = \frac{(k,4)}{(l,2)}[(l,2)m - 2] - 1$ *eine reguläre Zerlegung mit vier Polygonen.*

Beweis. Die Hinzunahme der Relationen $R^3 = S^3 = E$ ergibt eine Faktorgruppe $\mathfrak{T}_{12}$ von (5.2). Das Reidemeisterverfahren liefert die Erzeugenden und definierenden Relationen des Normalteilers:

$$A = R^3,\ B = S^3;\ A^{(k,4)\frac{m}{3}} = B^{(l,2)\frac{m}{3}} = A^4 B^4 = E\,, \tag{5.3}$$
$$A \rightleftarrows B\,,$$
$$A^{\frac{(k,4)}{(l,2)}\frac{m}{3}} = B^{\frac{m}{3}}\,.$$

Dieser Normalteiler macht genau das Zentrum von (5.2) aus. Die Relationenmatrix erweist die Gruppe (5.3) als zyklische Gruppe der Ordnung $(k,4)\,\frac{m}{3}$. Die Ordnungen von A und B sind $(k,4)\,\frac{m}{3}$ bzw. $(l,2)\,\frac{m}{3}$. (Die Drehgruppe (5.2) läßt sich jedoch nicht mehr wie in Satz 5.1 als direktes Produkt von Zentrum und Faktorgruppe kennzeichnen.)

Ebenso beweist man die folgende Aussage.

Satz 5.3. *Es seien k, l, m natürliche Zahlen mit der Eigenschaft, daß entweder $l = 3m$ ist oder die Beziehungen $l = 0$ und $m \equiv 0 \bmod 2$ zugleich bestehen. Dann ist durch das Relationensystem*

$$R^{12m} = S^{12m} = (RS)^2 = E\,, \tag{5.4}$$
$$R \rightleftarrows S^3,\ S \rightleftarrows R^3\,,$$
$$R^{-3} = S^{3[1+(-1)^k m]+l}$$

eine tetrapolygonale reguläre Zerlegung vom Geschlecht $h = 12m - 3$ gegeben.

Die einfachste irreflexible reguläre Zerlegung ist die Zerlegung $\{4,4\}_{2,1}$ vom Geschlecht 1 mit der Drehgruppe

$$R^4 = S^4 = (RS)^2 = (R^{-1}S)^2 RS^{-1} = E\,. \tag{5.5}$$

Der folgende Satz ordnet diese Zerlegung als Spezialfall in eine Serie irreflexibler Zerlegungen vom Geschlecht $h = 10n - 9$ ein.

Satz 5.4. *Das Relationensystem*

$$R^{4(2n-1)} = S^{4(2n-1)} = (RS)^2 = R^4 S^4 = E\,, \tag{5.6}$$
$$R^{4n}(R^{-1}S)^2 RS^{-1} = E$$

liefert eine Serie irreflexibler regulärer Zerlegungen $\{4(2n-1),\,4(2n-1)\}$ vom Geschlecht $h = 10n - 9$.

Beweis. Die Relationen (5.5) vermitteln die K-metazyklische Gruppe der Ordnung 20 [7; p. 134] als Faktorgruppe von (5.6). Der Kern ist zyklisch von der Ordnung $2n - 1$ und wird von R^4 erzeugt. An Hand des in § 2 angegebenen Kriteriums überzeugt man sich sofort, daß die Zerlegungen irreflexibel sind.

§ 6. Die regulären Zerlegungen mit weniger als 6 Polygonen

F. A. Sherk führte für eine reguläre Zerlegung $\{p,q\}$ mit N_2 Polygonen die Bezeichnung ${}^{N_2}\{p,q\}$ ein und ermittelte alle regulären Zerlegungen ${}^{N_2}\{p,3\}$ für $N_2 \leqq 6$ [9]. Wir geben im folgenden alle regulären Zerlegungen mit $N_2 < 6$ an.

Satz 6.1. *Auf der Fläche vom Geschlecht $h > 0$ existieren genau zwei reguläre Zerlegungen ${}^1\{p,q\}$: $\{4h,4h\}_{1,0}$ und $\{4h+2,\,2h+1\}_2$ (vgl. [9; Lemma 4]).*

Beweis. Die Drehgruppe muß nach (2.2) zyklisch von gerader Ordnung sein, etwa $\mathfrak{Z}_{2m}$. Dann ist $q\,|\,2m$, und die Faktorkommutatorgruppe von $[2m, q]^+$ ist vom Typ $\mathfrak{Z}_2 \times \mathfrak{Z}_q$. Demgemäß ist entweder $q = m$ oder $q = 2m$. (2.3) liefert $m = 2h + 1$ bzw. $m = 2h$. Diesen beiden Werten entsprechen eindeutig bestimmte reguläre Zerlegungen, nämlich $\{4h + 2, 2h + 1\}_2$ [7; p. 113] und $\{4h, 4h\}_{1,0}$ [7; p. 105].

Für den Fall $N_2 = 2$ kommt zustatten, daß Hölder alle Gruppen bestimmt hat, die Erweiterung eines zyklischen Normalteilers durch eine zyklische Gruppe sind [12; pp. 129, 130]. Denn in der Drehgruppe einer Zerlegung ${}^2\{p, q\}$ ist die Untergruppe $\{R\}$ Normalteiler vom Index 2. Es kommt also darauf an, unter den Hölderschen Gruppen die Drehgruppen regulärer Zerlegungen mit zwei Polygonen aufzusuchen. Notwendige und hinreichende Bedingungen gibt der folgende Hilfssatz.

Hilfssatz. *Notwendig und hinreichend für die Existenz einer regulären Zerlegung ${}^2\{p,q\}$ vom Geschlecht h mit 2 Polygonen ist die Existenz einer Zahl r, die folgenden Bedingungen genügt:*

(1) $$r^2 \equiv 1 \bmod p \quad (0 < r < p)$$

(2) $$q = \frac{2p}{(r + 1, p)}$$

(3) $$h = \frac{p - (r + 1, p)}{2}.$$

Beweis. Die Notwendigkeit dieser Bedingungen ist leicht zu sehen. Da die Untergruppe $\{R\}$ Normalteiler ist, gilt $S^{-1}RS = R^r$. Daraus folgt einerseits durch Anwendung der Relation $(RS)^2 = E$ die Beziehung $S^{-2} = R^{r+1}$ und andrerseits $S^{-2}RS^2 = R^{r^2}$, also (1). Potenziert man $S^{-2} = R^{r+1}$ mit $\frac{p}{(r+1, p)}$, dann erhält man $s^{\frac{2p}{(r+1,p)}} = E$. $\frac{2p}{(r+1,p)}$ ist auch die Ordnung von S, da R die volle Ordnung p haben soll. (Daß q notwendig gerade ist, überlegt man sich leicht.) Die Bedingung (3) folgt aus den Beziehungen (2.2) und (2.3).

Es existiere nun umgekehrt eine Zahl r, die den Bedingungen (1), (2) und (3) genügt. Wir betrachten die durch $R^p = (RS)^2 = E$ und $S^{-1}RS = R^r$ definierte Gruppe. Nach Hölder hat die Gruppe die Ordnung $2p$. Dabei ist $r^2 \equiv 1 \bmod p$ die bekannte Höldersche Bedingung. Die Ordnung von S in dieser Gruppe ermittelt man wieder als $\frac{2p}{(r+1, p)}$, sie ist also mit (2) verträglich. (3) stellt sicher, daß die reguläre Zerlegung auf der Fläche vom Geschlecht h liegt.

Wenn wir jetzt $p = mn$ und $r + 1 = mx$ mit $(x, n) = 1$ setzen, so wird $q = 2n$ und $2h = m(n - 1)$. Das Ergebnis läßt sich nun folgendermaßen wenden:

Satz 6.2. *Für das Geschlecht h liefert die Zerlegung der Zahl $2h$ in ein Produkt zweier Zahlen m und $n - 1$ (m, n natürliche Zahlen) für jede Lösung der Kongruenz $mx \equiv 2 \bmod n$ unter den Bedingungen $1 < mx \leqq mn$ und $(x,n) = 1$ genau eine reguläre Zerlegung ${}^2\{mn, 2n\}$ vom Geschlecht h mit der Drehgruppe*

$$R^{mn} = (RS)^2 = E; \quad S^{-2} = R^{mx}.$$

Damit sind alle regulären Zerlegungen vom Geschlecht h mit 2 Polygonen erfaßt.

Man sieht, daß die Anzahl der regulären Zerlegungen auf einer Fläche vom Geschlecht h ganz stark von Teilbarkeitseigenschaften der Zahl h abhängt.

Wir sprechen noch zwei Folgerungen aus, auf die wir später zurückgreifen werden.

Folgerung 1. Von den arithmetisch möglichen regulären Zerlegungen ${}^2\{3(2k-1), 2(2k-1)\}$ der Fläche vom Geschlecht $h = 3k - 3$ existieren genau die beiden folgenden:

$$^2\{3(6n-5), 2(6n-5)\}^{R^{6n-3}=S^{-2}} \qquad h = 9n - 9$$

$$^2\{3(6n-1), 2(6n-1)\}^{R^{-6n+3}=S^{-2}} \qquad h = 9n - 3$$

Folgerung 2. Von den arithmetisch möglichen regulären Zerlegungen ${}^2\{5(2k-1), 2(2k-1)\}$ der Fläche vom Geschlecht $h = 5k - 5$ existieren genau die folgenden:

$$^2\{5(10n-9), 2(10n-9)\}^{R^{30n-25}=S^{-2}} \qquad h = 25n - 25$$

$$^2\{5(10n-7), 2(10n-7)\}^{R^{10n-5}=S^{-2}} \qquad h = 25n - 20$$

$$^2\{5(10n-3), 2(10n-3)\}^{R^{-10n+5}=S^{-2}} \qquad h = 25n - 10$$

$$^2\{5(10n-1), 2(10n-1)\}^{R^{20n}=S^{-2}} \qquad h = 25n - 5$$

Satz 6.3. *Die einzigen regulären Zerlegungen* ${}^3\{p, q\}$ *sind die dualen Zerlegungen der Folgerung* 1 *und die Zerlegung* ${}^3\{6(2n-1), 3(2n-1)\}$ *vom Geschlecht* $h = 9n - 8$ *aus Satz* 5.1.

Beweis. Für eine reguläre Zerlegung ${}^3\{p, q\}$ liefert die Abzählung nach der Untergruppe $\{R\}$ in der Drehgruppe genau 3 Restklassen. Die volle symmetrische Gruppe auf 3 Ziffern besitzt aber keine echte Untergruppe, die Faktorgruppe von $[p, q]^+$ ist und gleichzeitig nicht in einer Stabilitätsuntergruppe von $\mathfrak{S}_3$ liegt. Also muß die Restklassenabzählung von $\mathfrak{G}$ nach $\{R\}$ die Gruppe $\mathfrak{S}_3$ treu darstellen, und es ist $q = 3k$. Wegen $N = 3p = N_0 \cdot 3k$ ist p gerade und $k \mid p$. Somit sind die gesuchten Zerlegungen notwendig vom Typ ${}^3\{lk, 3k\}$. Der Restklassenabzählung entnehmen wir die Gültigkeit der Relation $S^3 = R^\alpha$ für $\mathfrak{G}$. Aus der Normalteilereigenschaft von $\{R^2\}$ folgt mit $S^{-3}RS^3 = R$ und $(RS)^2 = E$ die Beziehung $S^{-1}R^2S = R^2$. $\mathfrak{G}$ ist also eine Faktorgruppe der Ordnung $3lk$ von (5.1) mit $p = lk$, $q = 3k$ und $m = 2$. Wir ermitteln den zur Faktorgruppe $\mathfrak{S}_3$ von (5.1) gehörigen Normalteiler. Er hat die Erzeugenden $A = R^2$ und $B = S^3$ und wird durch $A^{\frac{lk}{2}} = B^k = A^3B^2 = (A, B) = E$ definiert. Wenn l ungerade ist, so gilt wegen (3.1) notwendig $k = 4n$. Da man zur Aufzählung der Nebenklassen von $\{S\}$ in (5.1) höchstens 6 Ziffern benötigt, ist nur $l = 1$ oder $l = 3$ möglich. Nach Satz 6.1 scheidet $l = 1$ aus. Um $l = 3$ zu realisieren, müßte (5.1) mit $p = q = 12n$ einen Normalteiler der Ordnung 2 besitzen, der die Ordnungen von R und S nicht reduziert. Wegen $\{A, B\} \cong \mathfrak{Z}_{12}$ ist das unmöglich, und mithin ist $l = 2d$. Für die gesuchte Drehgruppe $\mathfrak{G}$ muß $\{A, B\}$ zyklisch von der Ordnung dk sein, also ist entweder $d = 3$ oder $d = 1$. Überdies müssen A und B die volle Ordnung dk bzw. k behalten, k ist also notwendig ungerade. Während $d = 3$ die regulären Zerlegungen ${}^3\{6(2n-1), 3(2n-1)\}$ von Satz 5.1 ergibt, wird der Fall $d = 1$ genau durch die dualen Zerlegungen der Folgerung 1 realisiert.

Hilfssatz. *Notwendig und hinreichend für die Existenz einer regulären Zerlegung* ${}^4\{p, q\}$ *vom Geschlecht* h, *für deren Drehgruppe* $\mathfrak{G}$ *die Isomorphie* $\mathfrak{G}/\{R^2\} \cong \mathfrak{D}_4$ *besteht, sind die folgenden Bedingungen*:

(1) $$p = 2s \text{ und } q = \frac{4s}{\left(r + 1 + \frac{k}{2}, s\right)}$$

mit nichtnegativen ganzen Zahlen k *und* r, *für die*

(2) $$k = s \text{ und gerade oder } k = 0,$$

(3) $$r^2 \equiv 1 \bmod s \quad (0 < r < s)$$

und

$$(4) \qquad h = 2s - 1 - \left(r + 1 + \frac{k}{2}, s\right)$$

gilt. Die Drehgruppe einer solchen Zerlegung wird durch

$$(6.1) \qquad \begin{gathered} R^p = S^q = (RS)^2 = R^{2r+2+k}S^4 = E\,, \\ S^{-1}R^2S = R^{2r} \end{gathered}$$

definiert.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Notwendigkeit der Bedingungen. Die Zerlegungen sind nach Voraussetzung vom Typ $\{2s, 4t\}$, und wegen der Normalteilereigenschaft von $\{R^2\}$ gilt

$$(6.2) \qquad S^{-1}R^2S = R^{2r} \qquad (0 < r < s)\,.$$

Das Element R gehört entweder zu einer Klasse von $l = 4$ oder $l = 2$ Konjugierten, und es gilt die Relation

$$(6.3) \qquad S^{-2}RS^2 = R^{k+1} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{ll} 0 < k < 2s-1 & \text{für } l = 4 \\ k = 0 & \text{für } l = 2\,. \end{array}$$

k ist notwendig gerade, damit R die volle Ordnung $2s$ in $\mathfrak{G}$ besitzt. Aus (6.2) und (6.3) folgt $SR^{2k+2} = R^{2r}S$ und mit $(RS)^2 = E$ erhält man $R^{2k} = E$. Es ist also entweder $k = s$ oder $k = 0$. (Bedingung (2)). In jedem Fall ist R^2 mit S^2 vertauschbar. Mit (6.2) ergibt sich die Bedingung (3). Aus (6.2) und (6.3) errechnet man mit Hilfe der Relation $(RS)^2 = E$ leicht die Beziehung $R^{2r+2+k}S^4 = E$. Wegen $S^{4t} = R^{-t(2r+2+k)} = E$ ist $\dfrac{s}{\left(r+1+\frac{k}{2}, s\right)} \Big| \, t$ und wegen $R^{(2r+2+k)\frac{2s}{(2r+2+k,2s)}} = S^{-4\frac{2s}{(2r+2+k,2s)}} = E$ ist $t \,\Big|\, \dfrac{s}{\left(r+1+\frac{k}{2}, s\right)}$.

Damit ist auch (1) erfüllt. (4) folgt aus (2.3).

Umgekehrt läßt sich zeigen, daß die Gruppe (6.1) eine reguläre Zerlegung ${}^4\{p, q\}$ vom Geschlecht h definiert, wenn die Bedingungen (1) bis (4) erfüllt sind. Dazu sucht man den zur Faktorgruppe $\mathfrak{D}_4$ gehörigen Normalteiler $\{R^2\}$ von (6.1) auf und zeigt, daß er zyklisch von der Ordnung s ist.

Nun können wir die regulären Zerlegungen mit 4 Polygonen aufzählen.

Satz 6.4. *Für das Geschlecht h liefert die Zerlegung der Zahl $h + 1$ in ein Produkt zweier Zahlen m und $2n - 1$ (m, n natürliche Zahlen) für jede Lösung der Kongruenz $mx \equiv 2 \bmod \left(n - k\dfrac{1-(-1)^m}{4m}\right)$ unter den Bedingungen $1 + \dfrac{k}{2} < mx \leqq mn + \dfrac{k}{2}$ und $(x, n) = 1$ genau eine reguläre Zerlegung ${}^4\{2mn, 4n\}$ mit der Drehgruppe*

$$\begin{gathered} R^{2mn} = S^{4n} = (RS)^2 = R^{2mx}S^4 = E\,, \\ S^{-1}R^2S = R^{2(mx-1)-k}\,. \end{gathered}$$

Dabei sind für k genau die beiden Werte 0 und mn zugelassen, letzterer jedoch nur, wenn nicht gleichzeitig $m \equiv 2 \bmod 4$ und $n \equiv 1 \bmod 2$ ist[6]).

[6]) Überdies ist natürlich $k = mn$ verboten, wenn m und n beide ungerade sind; denn dann ist $k\,\dfrac{1-(-1)^m}{4m}$ keine ganze Zahl.

Berücksichtigt man noch die Zerlegungen der Sätze 5.2 *und* 5.3, *so sind damit alle regulären Zerlegungen* ${}^4\{p, q\}$ *aufgezählt.*

Beweis. Die Restklassenabzählung nach $\{R\}$ in $\mathfrak{G}$ muß 4 Ziffern aufweisen. Daher muß $\mathfrak{G}$ homomorph zu einer Untergruppe von $\mathfrak{S}_4$ sein, die nicht in einer Stabilitätsuntergruppe von $\mathfrak{S}_4$ enthalten ist. Es kommen also nur die Gruppen $\mathfrak{D}_4$, $\mathfrak{T}_{12}$ und $\mathfrak{S}_4$ in Frage. Der letztere Fall kann nicht eintreten, da die Gruppe $\mathfrak{S}_4$ kein Element der Ordnung 6 enthält.

Sei die Faktorgruppe eine Tetraedergruppe. Dann ist die Zerlegung vom Typ ${}^4\{3r, 3s\}$. (2.2) erbringt $4r = st$. Da die Elemente der Ordnung 3 in der Tetraedergruppe jeweils zu einer Klasse von 4 Konjugierten gehören, hat das Element R in $\mathfrak{G}$ genau 4 Konjugierte. Es sind R, $S^{-1}RS$, $S^{-2}RS^2$, $R^{-1}S^{-2}RS^2R$, und es gilt $S^{-3}RS^3 = R$. S^3 liegt im Zentralisator von R, d.h. $S^3 = R^\alpha$. R und S sollen die volle Ordnung $3r$ bzw. $3s$ haben. Das bedeutet $3r|\alpha s$ und $s \mid \frac{3r}{(\alpha, 3r)}$, und somit ist $t = 4l$, $\alpha = 3kl$, $k \leqq s$, $(k, s) = 1$. Da die Restklassenabzählung nach $\{R\}$ eine Tetraedergruppe $\mathfrak{T}_{12}$ treu darstellt, gilt außerdem die Beziehung $S^{-1}R^3S = R^{3\beta}$.

Mit $(RS)^2 = E$ folgt wieder $R^{3\beta} = R^3$. In $\mathfrak{G}$ bestehen also notwendig die Relationen

$$\begin{gathered} R^{3ls} = S^{3s} = (RS)^2 = R^{3kl}S^{-3} = E\,, \\ R^3 \rightleftarrows S\,. \end{gathered} \tag{6.4}$$

Der zur Faktorgruppe $\mathfrak{T}_{12}$ gehörige Normalteiler von (6.4) ist gegeben durch

$$\begin{gathered} A = R^3, \quad B = S^3; \\ A^{ls} = B^s = A^4B^4 = A^{kl}B^{-1} = E\,. \end{gathered}$$

Er hat genau dann die Ordnung ls, wenn die Bedingungen

$$\begin{gathered} ls|4(kl+1)\,, \\ (k,s) = 1\,, \\ k \leqq s \end{gathered} \tag{6.5}$$

erfüllt sind. Eine Diskussion der Bedingungen (6.5) erbringt genau die Zerlegungen der Sätze 5.2 und 5.3.

Den verbleibenden Teil der Aussage unseres Satzes erhält man, wenn man im vorstehenden Hilfssatz $s = mn$ und $r + 1 + \frac{k}{2} = mx$ mit $(x, n) = 1$ einsetzt.

Satz 6.5. *Sämtliche pentapolygonalen regulären Zerlegungen sind durch diejenigen von Satz* 5.4, *die dualen Zerlegungen von Folgerung* 2 *und die Zerlegungen* $\{10(2n-1), 5(2n-1)\}$ *des Satzes* 5.1 *klassifiziert.*

Beweis. Der Beweis läßt sich mit denselben Methoden führen. Die Darstellung von $\mathfrak{G}$ auf den Nebenklassen von $\{R\}$ kann nur isomorph zur Gruppe $\mathfrak{D}_5$ oder zur K-metazyklischen Gruppe der Ordnung 20 sein. Im letzteren Fall ergeben sich genau die regulären Zerlegungen von Satz 5.4, die andere Möglichkeit liefert die restlichen Aussagen.

An Hand des Kriteriums von § 2 prüft man leicht nach, daß alle regulären Zerlegungen ${}^{N_2}\{p, q\}$ mit $N_2 \leqq 4$ reflexibel sind. Andrerseits haben wir in Satz 5.4 eine Serie irreflexibler regulärer Zerlegungen mit 5 Polygonen angegeben.

Satz 6.6. $N_2 = 5$ *ist die kleinste Polygonanzahl, die irreflexible reguläre Zerlegungen zuläßt. Die Zerlegungen* ${}^5\{4(2n-1), 4(2n-1)\}$ *von Satz* 5.4 *sind die einfachsten irreflexiblen regulären Zerlegungen, die es gibt.*

§ 7. Tabellen

Tabelle I. *Die regulären Zerlegungen mit weniger als* 6 *Polygonen*

N_2	Zerlegung $\{p, q\}$	Relationennormalteiler von $[p, q]^+$	Ordnung von $\mathfrak{G}$	Geschlecht
1	$\{4h, 4h\}_{1,0}$ $\{4h+2, 2h+1\}_2$	$R^{2h-1}S^{-1}$ R^2S^2	$4h$ $4h+2$	h h
2	$\{mn, 2n\}$ $(m, n, x$ gemäß Satz 6.2)	$R^{mx}S^2$	$2mn$	$\frac{m(n-1)}{2}$
3	$\{6(2n-1), 3(2n-1)\}$ $\{2(6n-5), 3(6n-5)\}$ $\{2(6n-1), 3(6n-1)\}$	(R, S^3); (R^2, S) R^2S^{6n-3} R^2S^{-6n+3}	$18(2n-1)$ $6(6n-5)$ $6(6n-1)$	$9n-8$ $9n-9$ $9n-3$
4	$\{2mn, 4n\}$ $(k, m, n, x$ gemäß Satz 6.4)	$R^{2mx}S^4$; $R^{2(mx-1)-k}\ S^{-1}\ R^{-2}S$	$8mn$	$m(2n-1)-1$
	$\{(k, 4)m, (l, 2)m\}$ $(k, l, m$ gemäß Satz 5.2)	(R, S^3); (R^3, S); $R^{\frac{(k,4)}{(l,2)}m}\ S^{-m}$	$4(k, 4)m$	$\frac{(k,4)}{(l,2)}[(l,2)m-2]-1$
	$\{12m, 12m\}$ $(k, l, m$ gemäß Satz 5.3.)	(R, S^3); (R^3, S); $R^3S^{3[1+(-1)^k m]+l}$	$48m$	$12m-3$
5	$\{4(2n-1), 4(2n-1)\}$ $\{10(2n-1), 5(2n-1)\}$ $\{2(10n-9), 5(10n-9)\}$ $\{2(10n-7), 5(10n-7)\}$ $\{2(10n-3), 5(10n-3)\}$ $\{2(10n-1), 5(10n-1)\}$	$R^{4n}(R^{-1}S)^2RS^{-1}$; R^4S^4 (R, S^5); (R^2, S) R^2S^{30n-25} R^2S^{10n-5} R^2S^{-10n+5} R^2S^{20n}	$20(2n-1)$ $50(2n-1)$ $10(10n-9)$ $10(10n-7)$ $10(10n-3)$ $10(10n-1)$	$10n-9$ $25n-19$ $25n-25$ $25n-20$ $25n-10$ $25n-5$

Tabelle II. *Die regulären Zerlegungen vom Geschlecht* 4

Zerlegung $\{p, q\}$	Duale Zerl. $\{q, p\}$	N_0	N_1	N_2	N	Relationennormalteiler von $[p, q]^+$	Literatur
$\{16, 16\}_{1,0}$		1	8	1	16	R^7S^{-1}	[7; p. 105]
$\{18, 9\}_2$	$\{9, 18\}_2$	2	9	1	18	R^8S^{-1}	[2; p. 147]
$\{10, 10\}_2$		2	10	2	20	R^2S^2	[2; p. 147]
$\{3\cdot 4, 3\cdot 2\}$	$\{3\cdot 2, 3\cdot 4\}$	4	12	2	24	R^4S^{-2}	[9; p. 461]
$\{16, 4\}_{1,1}$	$(4, 16\}_{1,1}$	8	16	2	32	R^8S^{-2}	[7; p. 115]
$\{10, 4\|2\}$	$\{4, 10\|2\}$	10	20	4	40	$(RS^{-1})^2$	[2; p. 146]
$\{6, 6\|2\}$		6	18	6	36	$(RS^{-1})^2$	[2; p. 146]
$(3\cdot 2, 6\}$	$\{6, 3\cdot 2\}$	6	18	6	36	(R^2, S)	[9; p. 460]
$\{3\cdot 4, 3\}$	$\{3, 3\cdot 4\}$	24	36	6	72	(R^4, S)	[9; p. 460]
$\{5, 5\|3\}$		12	30	12	60	$(RS^{-1})^3$	[2; p. 146]
$\{6, 4\}_4$	$\{4, 6\}_4$	18	36	12	72	$(R^2S^2)^2$	[2; p. 147]
$\{5, 4\}_6$	$\{4, 5\}_6$	30	60	24	120	$(R^2S^2)^3$	[1; p. 273]

Tabelle III. *Die regulären Zerlegungen vom Geschlecht 5*

Zerlegung $\{p, q\}$	Duale Zerlegung $\{q, p\}$	N_0	N_1	N_2	N	Relationen-normalteiler von $[p, q]^+$	Literatur
$\{20, 20\}_{1,0}$		1	10	1	20	R^9S^{-1}	[7; p. 105]
$\{22, 11\}_2$	$\{11, 22\}_2$	2	11	1	22	$R^{10}S^{-1}$	[2; p. 147]
$\{12, 12\}_2$		2	12	2	24	R^2S^2	[2; p. 147]
$\{3 \cdot 5, 3 \cdot 2\}$	$\{3 \cdot 2, 3 \cdot 5\}$	5	15	2	30	R^5S^{-2}	[9; p. 461]
$\{20, 4\}_{1,1}$	$\{4, 20\}_{1,1}$	10	20	2	40	$R^{10}S^{-2}$	[7; p. 115]
$\{4 \cdot 2, 8\}_4$		4	16	4	32	(R^2, S); $(R^2S^2)^2$	
$\{8, 8\}_4^{(R^2)^S = R^{-2}}$		4	16	4	32	$(R^2)^S R^2$; $(R^2S^2)^2$	
$\{12, 4 \mid 2\}$	$\{4, 12 \mid 2\}$	12	24	4	48	$(RS^{-1})^2$	[2; p. 146]
$\{6, 6\}_{2,0}$		8	24	8	48	$(R^2S^{-1})^2$; $(R^2S^2)^2$	[10; p. 16]
$\{8, 4\}^{R^2 \rightleftarrows S^2}$	$\{4, 8\}^{R^2 \rightleftarrows S^2}$	16	32	8	64	(R^2, S^2)	
$\{8, 4 \mid 4\}^{S^{-2}R^2S^2 = R^{-2}}$	$\{4, 8 \mid 4\}^{R^{-2}S^2R^2 = S^{-2}}$	16	32	8	64	$(R^2)^{S^2} R^2$; $(RS^{-1})^4$	
$\{2 \cdot 5, 3\}$	$\{3, 2 \cdot 5\}$	40	60	12	120	(R^5, S)	[9; p. 460]
$\{5, 5\}_4$		16	40	16	80	$(R^2S^2)^2$	[2; p. 147]
$\{6, 4\}^{(R^3S^2)^2 = E}$	$\{4, 6\}^{(R^2S^3)^2 = E}$	24	48	16	96	$(R^3S^2)^2$	[10; p. 17]
$\{8, 3\}^{R^2 \rightleftarrows S^{-1}R^4S}$	$\{3, 8\}^{S^2 \rightleftarrows R^{-1}S^4R}$	64	96	24	192	$(R^2, S^{-1}R^4S)$	[1; p. 278]
$\{5, 4 \mid 4\}$	$\{4, 5 \mid 4\}$	40	80	32	160	$(RS^{-1})^4$	[2; p. 146]

Tabelle IV. *Die regulären Zerlegungen vom Geschlecht 6*

Zerlegung $\{p, q\}$	Duale Zerlegung $\{q, p\}$	N_0	N_1	N_2	N	Relationen-normalteiler von $[p, q]^+$	Literatur
$\{24, 24\}_{1,0}$		1	12	1	24	$R^{11}S^{-1}$	[7; p. 105]
$\{26, 13\}_2$	$\{13, 26\}_2$	2	13	1	26	$R^{12}S^{-1}$	[2; p. 147]
$\{14, 14\}_2$		2	14	2	28	R^2S^2	[2; p. 147]
$\{5 \cdot 3, 5 \cdot 2\}$	$\{5 \cdot 2, 5 \cdot 3\}$	3	15	2	30	R^3S^{-2}	[9; p. 461]
$\{24, 4\}_{1,1}$	$\{4, 24\}_{1,1}$	12	24	2	48	$R^{12}S^{-2}$	[7; p. 115]
$\{9, 9\}^{R^3 = S^{-3}}$		4	18	4	36	R^3S^3	
$\{14, 4 \mid 2\}$	$\{4, 14 \mid 2\}$	14	28	4	56	$(RS^{-1})^2$	[2; p. 146]
$\{5 \cdot 2, 5\}$	$\{5, 5 \cdot 2\}$	10	25	5	50	(R^2, S)	[9; p. 460]
$\{8, 6 \mid 2\}$	$\{6, 8 \mid 2\}$	8	24	6	48	$(RS^{-1})^2$	[2; p. 146]
$\{2 \cdot 4, 2 \cdot 3\}$	$\{2 \cdot 3, 2 \cdot 4\}$	8	24	6	48	R^4S^{-3}	[9; p. 461]
$\{9, 4\}^{(R^3)^S = R^{-3}}$	$\{4, 9 \mid, 2\}$	18	36	8	72	$(R^3)^S R^3$	
$\{10, 3\}_6$	$\{3, 10\}_6$	50	75	15	150	$(R^2S^2)^3$	[2; p. 147]
$\{6, 4 \mid 3\}$	$\{4, 6 \mid 3\}$	30	60	20	120	$(RS^{-1})^3$	[2; p. 146]

Literatur

[1] *H. R. Brahana*, Regular maps and their groups, Amer. J. Math. **49** (1927), 268—284.
[2] *H. S. M. Coxeter*, The abstract groups $G^{m,n,p}$, Trans. Amer. Math. Soc. **45** (1939), 73—150.
[3] *H. S. M. Coxeter*, Configurations and maps, Reports of a Math. Colloq. (2), 8 (1948), 18—38.
[4] *H. S. M. Coxeter*, Introduction to geometry, New York 1961.
[5] *H. S. M. Coxeter*, Regular polytopes, 2nd ed. New York 1963.
[6] *H. S. M. Coxeter*, Regular compound tessellations of the hyperbolic plane, Proc. Roy. Soc. London (A), **278** (1964), 147—167.
[7] *H. S. M. Coxeter* and *W. O. J. Moser*, Generators and relations for discrete groups, 2nd. ed. Berlin 1965.
[8] *W. Magnus*, *A. Karras* and *D. Solitair*, Combinatorial group theory, New York 1966.
[9] *F. A. Sherk*, The regular maps on a surface of genus three, Canad. J. Math. **11** (1959), 452—480.
[10] *F. A. Sherk*, A family of regular maps of type $\{6, 6\}$, Canad. Math. Bull. **5** (1962), 13—20.
[11] *W. Threlfall*, Gruppenbilder, Abh. Sächs. Akad. Wiss. Math.-phys. Kl. **41** (1932), 1—59.
[12] *H. Zassenhaus*, The theory of groups, New York 1958.

Institut für Mathematik A der Technischen Universität, 33 Braunschweig

Eingegangen 7. Juli 1967