

Максимально симметричные клеточные разбиения поверхностей и их накрытия

Е.А. Кудрявцева, И.М. Никонов, А.Т. Фоменко

2 апреля 2008 г.

Аннотация

В настоящей работе рассматриваются правильные (т.е. максимально симметричные) клеточные разбиения замкнутых ориентированных двумерных поверхностей, т.е. правильные карты или правильные абстрактные многогранники. Эти объекты известны и как максимально симметричные ориентированные атомы. Атом назовём приводимым, если он является разветвлённым накрытием над другим атомом, с ветвлениями в вершинах разбиения и (или) центрах граней. Следующие две проблемы возникли в теории интегрируемых гамильтоновых систем: 1) описать неприводимые максимально симметричные атомы; 2) описать все максимально симметричные атомы, накрывающие данный неприводимый максимально симметричный атом. В данной работе эти проблемы решаются в важных случаях. В качестве приложения перечисляются все максимально симметричные ориентированные атомы следующих типов: 1) имеющие не более 30 рёбер; 2) имеющие не более 6 граней; 3) имеющие p или $2p$ рёбер, где p — простое число.

Содержание

1	Введение	2
1.1	Сложные функции Морса, атомы и клеточные разбиения поверхностей	2
1.2	Максимально симметричные атомы	5
1.3	Интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы	8
1.4	Некоторые важные серии максимально симметричных ориентированных атомов	9
2	Накрытия и симметрии атомов	13
3	Регулярные разветвлённые накрытия атомов	15
4	Симметричные разветвлённые накрытия атомов	19
5	Примитивные максимально симметричные атомы и отображения примитивизации	32
6	Классификация максимально симметричных атомов с данной примитивизацией	36
7	Нахождение примитивных максимально симметричных атомов	47

8	Классификация максимально симметричных атомов с не более чем 6 белыми клетками	62
9	Описание максимально симметричных ориентированных атомов данной сложности	68
10	Приложение А. Классификация максимально симметричных ориентированных атомов рода $g \leq 2$	74
11	Приложение Б. Некоторые задачи.	76

1 Введение

1.1 Сложные функции Морса, атомы и клеточные разбиения поверхностей

Пусть M – замкнутая гладкая двумерная вещественная поверхность, и $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ – функция Морса на ней. Функция Морса f , имеющая ровно по одной критической точке на каждом критическом уровне, называется *простой*. В противном случае f называется *сложной* функцией Морса. Простую функцию Морса можно определить эквивалентным образом: её значения во всех критических точках попарно различны.

Определение 1.1. Две функции Морса f на поверхности M и g на поверхности N назовем *эквивалентными*, если существуют два диффеоморфизма $\lambda: M \rightarrow N$ и $\mu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такие, что μ сохраняет ориентацию и $f = \mu \circ g \circ \lambda$. Другими словами, f и g получаются друг из друга гладкими “заменами координат” как в образе, так и в прообразе.

Введем понятие атома. Пусть K – связная компонента критического уровня функции Морса f на M , содержащая хотя бы одну критическую точку. Множество K является связным конечным графом, вершины которого имеют степень 0 или 4. Пусть $c = f(K)$ – соответствующее критическое значение и $\varepsilon > 0$ – малое число.

Определение 1.2. *Атомом* называется связная компонента $P \subset M$ множества, задаваемого неравенством $c - \varepsilon \leq f \leq c + \varepsilon$, содержащая граф K , и рассматриваемая вместе с заданной на ней функцией Морса f , где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число. Атом называется *седловым* (соотв. *минимаксным*), если K содержит седловую критическую точку (соотв. точку локального минимума или максимума) функции f . Все вершины седлового (соотв. минимаксного) атома имеют степень 4 (соотв. 0). Атом называется *простым* (соотв. *сложным*), если отвечающая ему функция Морса $f|_P$ простая (соотв. сложная). Критические точки функции Морса (т.е. вершины графа K) называются *вершинами* атома, а их количество – *сложностью* атома. Если поверхность P ориентируема (соотв. неориентируема), атом называется *ориентируемым* (соотв. *неориентируемым*). Если на поверхности P фиксирована ориентация, то соответствующий атом называется *ориентированным*. *Родом* атома называется род замкнутой поверхности $\bar{P}$, получающейся из поверхности P заклеиванием дисками всех компонент края. Два атома (соотв. ориентированных атома) считаются *изоморфными*, если заданные на них функции Морса эквивалентны, см. Определение 1.1 (соотв. в ориентированном случае диффеоморфизм λ сохраняет ориентацию).

Определение 1.3. Эквивалентным образом атом можно задать как “оснащённую” пару $(P, K)^\#$, где P – компактная поверхность с краем, K – непустой

конечный связный граф в P , вершины которого имеют степень 0 или 4, причём $P \setminus K$ является несвязным объединением колец $S^1 \times (0; 1]$, $S^1 \times \{1\} \subset \partial P$, и множество колец разбито на два подмножества (“белые” и “чёрные” кольца) таким образом, что к каждому ребру графа K примыкают ровно одно белое кольцо и ровно одно чёрное кольцо. Указанное разбиение колец на белые и чёрные называется *оснащением* пары (P, K) , и оснащённая пара обозначается через $(P, K)^\#$. Две оснащённые пары считаются *изоморфными*, если существует гомеоморфизм пар, сохраняющий ориентацию и раскраску.

Действительно, по атому однозначно строится оснащённая пара $(P, K)^\#$, где белые (соотв. чёрные) кольца задаются неравенством $f > c$ (соотв. $f < c$). Верное и обратное: по оснащённой паре $(P, K)^\#$ однозначно строится атом.

Определение 1.4. (А) Введенное выше (Определения 1.2, 1.3) понятие атома допускает ещё одну эквивалентную формулировку. Оно получается из Определения 1.3 заменой поверхности P с краем на замкнутую поверхность $\bar{P}$, а белых (соотв. чёрных) колец на открытые двумерные белые (соотв. чёрные) клетки. То есть, (ориентированный) атом рассматривается как пара $(\bar{P}, K)^\#$ (с ориентированной поверхностью $\bar{P}$). *Изоморфизмом* двух пар называется клеточный гомеоморфизм, сохраняющий раскраску (и ориентацию). Изоморфизм пары на себя называется *автоморфизмом*.

(Б) (Ориентированный) атом, полученный из (ориентированного) седлового атома $X = (\bar{P}, K)^\#$ перекраской белых клеток в чёрные, а чёрных — в белые, называется *двойственным* (ориентированному) атому X и обозначается X^* . Ориентируемый атом назовём *отражаемым*, если он имеет автоморфизм, меняющий ориентацию.

(В) Две двумерные клетки атома называются *смежными*, если они имеют общую вершину. *Шашечным разбиением белых клеток* атома назовём такое разбиение множества белых клеток на два подмножества, что любые две различные смежные белые клетки принадлежат разным подмножествам. *Графом смежности* белых клеток атома называется граф, вершины которого взаимно однозначно отвечают белым клеткам атома, и две вершины графа соединены ребром тогда и только тогда, когда отвечающие этим вершинам белые клетки атома смежны.

Построим соответствие между атомами как парами $(P, K)^\#$ и атомами как парами $(\bar{P}, K)^\#$ (причём индуцированное соответствие между классами эквивалентности таких пар будет взаимно однозначным). Пусть $(P, K)^\#$ – атом в смысле Определения 1.3, и $\bar{P}$ – замкнутая поверхность, полученная из P заклеивкой дисками граничных окружностей. Объединение чёрного (белого) кольца с приклеенным к нему диском будем называть чёрной (белой) клеткой. Тогда на замкнутой поверхности $\bar{P}$ получаем клеточное разбиение, одномерным остовом которого является граф K , а двумерные клетки описаны выше и раскрашены в два цвета так, что к каждому ребру примыкает ровно одна белая и ровно одна чёрная клетки (т.е. является “шахматной” раскраской). Полученный клеточный комплекс с шахматной раскраской обозначим через $(\bar{P}, K)^\#$. Он является атомом в смысле Определения 1.4.А.

Определение 1.5. Эквивалентным образом можно задать (ориентированный) атом как клеточное разбиение связной замкнутой (ориентированной) поверхности (возможно, пустой). Такое клеточное разбиение называется также (*ориентированной*) *картой* [HC], [KM, §3.2], или (*ориентированным*) *абстрактным многогранником* [MS], [MS0]. Два таких разбиения считаются *изоморфными*, если имеется (сохраняющий ориентацию) клеточный гомеоморфизм.

Опишем клеточное разбиение замкнутой поверхности (на белые двумерные клетки), отвечающее паре $(\bar{P}, K)^\#$ (при этом индуцированное соответствие

между классами эквивалентности атомов и клеточными разбиениями (возможно, пустых) связных поверхностей будет взаимно однозначным). Искомая замкнутая поверхность либо совпадает с поверхностью $\bar{P}$ (см. Определение 1.2) (если имеются чёрные кольца, т.е. атом либо седловой, либо отвечающий точке локального максимума), либо $\bar{P} := \emptyset$ (если нет чёрных колец, т.е. атом отвечает точке локального минимума). По седловому атому $(\bar{P}, K)^\#$ одномерный остов клеточного разбиения поверхности $\bar{P}$ строится так: в центр каждого чёрного диска помещаем вершину разбиения, а через каждую вершину атома проводим ребро разбиения, соединяющее центры чёрных дисков, примыкающих к данной вершине “с двух сторон”. Это разбиение поверхности $\bar{P}$ совпадает с разбиением на ручки, отвечающим соответствующей функции Морса $\bar{f}$ на $\bar{P}$, где функция Морса $\bar{f}$ получена из f продолжением на диски так, чтобы $\bar{f}$ имела ровно по одной критической точке в каждом диске: локальный максимум (минимум) в центре белого (чёрного) диска. Минимаксному атому, отвечающему точке локального максимума, сопоставляется клеточное разбиение двумерной сферы $\bar{P} = S^2$ с ровно двумя клетками: нульмерной и двумерной. Минимаксному атому, отвечающему точке локального минимума, сопоставляется пустое клеточное разбиение пустой поверхности $\bar{P} = \emptyset$.

Обратная операция — построение седлового атома $(\bar{P}, K)^\#$ по абстрактному многограннику (т.е. по клеточному разбиению замкнутой поверхности) называется операцией “усечение”, см. 1.4 и рис. 1.

Рис. 1

При построенном соответствии между (ориентированными) атомами и клеточными разбиениями связных (ориентированных) (возможно, пустых) поверхностей, вершины седлового атома находятся во взаимно-однозначном соответствии с ребрами соответствующего клеточного разбиения, а белые (соотв. чёрные) кольца седлового атома находятся во взаимно-однозначном соответствии с гранями (соотв. вершинами) клеточного разбиения.

Ниже под графом мы понимаем абстрактный граф, в котором могут быть петли и кратные ребра.

Определение 1.6. Седловой ориентированный атом может быть определен также как *ориентированный f -граф*. Иногда его называют также *ориентированной хордовой диаграммой*. Определение следующее.

(А) Конечный связный граф Γ , некоторые ребра которого ориентированы, называется *ориентированным f -графом*, если все его вершины имеют степень 3, причём к каждой его вершине примыкает ровно два ориентированных полу-ребра, из которых одно входит в вершину, а другое выходит из него. Отметим, что эта вершина может быть началом и концом одного и того же ориентированного ребра, если оно является петлей.

(Б) Пусть $(P, K)^\#$ — седловой ориентированный атом, см. Определение 1.3. Около каждой вершины графа K проходит ровно два отрезка белых граничных окружностей. Соединим эту вершину двумя простыми дугами с этими отрезками, см. рис. 2. Граф, получающийся объединением ориентированных белых граничных окружностей поверхности P с указанными дугами, называется *ориентированным f -графом* (построенным по белым клеткам) данного ориентированного седлового атома. При этом ориентация белых граничных окружностей индуцирована ориентацией поверхности P (с помощью внешней нормали к её границе).

Рис. 2

Замечание 1.7. Если седловой атом интерпретировать как окрестность седлового критического уровня функции Морса (см. Определение 1.2), то его ориентированный f -граф является объединением граничных окружностей, на которых значение функции превышает критическое значение, с отрезками сепаратрис векторного поля $\text{grad } f$, идущими из критических точек до “верхнего” края поверхности.

Замечание 1.8. Допуская некоторую вольность изложения, иногда вместо выражения “класс изоморфности атомов” будем говорить просто “атом”, а вместо выражения “класс изоморфности ориентированных атомов” будем иногда говорить просто “ориентированный атом” (или “атом” для краткости). В каждом параграфе терминология будет фиксирована и уточнена в его начале. Например, в формулировках утверждений в §6–9 под ориентированным атомом понимается класс изоморфности пар $(\bar{P}, K)^\#$, а в доказательствах — пара $(\bar{P}, K)^\#$.

1.2 Максимально симметричные атомы

Ниже (Определение 2.6) определяется группа симметрий $\text{Aut}(X)$ ориентированного седлового атома $X = (\bar{P}, K)^\#$, см. Определение 1.4.A, а также вводится понятие *максимально симметричного* ориентированного седлового атома. На языке карт (см. Определение 1.5) такие атомы — это *правильные* конечные карты [K50, с.419], [B27, с.269] (см. также [KM, §8.1]). Дадим ещё две эквивалентные формулировки этого определения.

Определение 1.9. Максимально симметричный ориентированный седловой атом может быть также определён как *регулярное разветвлённое накрытие* $\beta: \bar{P} \rightarrow S^2$ (см. Определение 3.1) некоторой замкнутой поверхности $\bar{P}$ над двумерной сферой с тремя точками ветвления $y_0, y_1, y_2 \in S^2$, так что порядок ветвления в любой точке $x \in \beta^{-1}(y_1)$ равен 2. Будем считать, что $S^2 = \bar{\mathbb{C}}$ — пополненная комплексная плоскость, $y_0 = -1, y_1 = 0, y_2 = 1 \in \bar{\mathbb{C}}$. Два таких разветвлённых накрытия $\beta_1: \bar{P}_1 \rightarrow S^2$ и $\beta_2: \bar{P}_2 \rightarrow S^2$ считаются *эквивалентными*, если имеется гомеоморфизм $h: \bar{P}_1 \rightarrow \bar{P}_2$, такой что $\beta_1 = \beta_2 \circ h$.

По регулярному разветвлённому накрытию $\beta: \bar{P} \rightarrow S^2$ из 1.9 однозначно построим максимально симметричный седловой ориентированный атом $(\bar{P}, K)^\#$ следующим образом. Рассмотрим на сфере мнимую окружность $i\mathbb{R} \subset \bar{\mathbb{C}} = S^2$ и покрасим полусферу $\{\text{Re } z > 0\} \subset S^2 \setminus i\mathbb{R}$ в белый цвет, а полусферу $\{\text{Re } z < 0\} \subset S^2 \setminus i\mathbb{R}$ в чёрный цвет. Пусть $K = \beta^{-1}(i\mathbb{R})$. Тогда оснащённая пара $(\bar{P}, K)^\#$ с раскраской и ориентацией, индуцированными при отображении β из раскраски и ориентации пары $(S^2, i\mathbb{R})$, является седловым ориентированным атомом (в смысле Определения 1.4.A), который мы и сопоставим разветвлённому накрытию β . Это даёт взаимно-однозначное соответствие между классами эквивалентности регулярных разветвлённых накрытий из 1.9 и классами изоморфности максимально симметричных ориентированных седловых атомов.

Определение 1.10. Максимально симметричный ориентированный седловой атом может быть эквивалентным образом определён как тройка (G, a, b) , где G — конечная группа, $a, b \in G$ — её образующие, причём $b^2 = 1 \neq b$. Отметим, что задание такой тройки равносильно заданию такого *копредставления* конечной группы G с двумя образующими, в котором вторая образующая нетривиальна и имеет порядок 2 (т.е. заданию такого эпиморфизма $\mu: \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2 \rightarrow G$, что $\mu(\mathbb{Z}_2) \neq \{1\}$). Две такие тройки (G_1, a_1, b_1) и (G_2, a_2, b_2) считаются *эквивалентными*, если имеется изоморфизм $j: G_1 \rightarrow G_2$, такой что $j(a_1) = a_2, j(b_1) = b_2$.

Опишем тройку (G, a, b) , отвечающую максимально симметричному седловому ориентированному атому $X = (\bar{P}, K)^\#$. Положим $G = \text{Aut}(X)$, $a = a_e, b = b_A$, см. Определение 2.6 и Утверждение 2.8. Как известно, это сопоставление определяет взаимно-однозначное соответствие между классами изоморфности максимально симметричных ориентированных седловых атомов и классами эквивалентности копредставлений конечных групп с двумя образующими, где вторая образующая имеет порядок 2 (см. на эту тему [B27], [KM], [MS] и [S2006]).

Известно, что задание тройки (G, a, b) эквивалентно заданию графа Кэли [C1878a], [C1878b], [KM, §3.3] группы G с образующими a, b . Отметим, что граф Кэли совпадает с f -графом (см. Определение 1.6) ориентированного атома, отвечающего тройке (G, a, b) .

Следующая классификация максимально симметричных ориентированных атомов рода $g \leq 2$ была получена (в эквивалентной переформулировке в терминах карт и копредставлений групп) в работах Коксетера [KM], [K48], [K50] и Трельфалля [T32].

Теорема 1.11 (см. Теоремы 1.13, 1.14, 1.17). *Максимально симметричные ориентированные атомы рода $g \leq 2$ классифицируются так.*

При $g = 0$ существуют две бесконечные серии C_n, D_n , $n \geq 1$, где n — сложность атома, и пять особых случаев P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 , отвечающих платоновым телам, см. Теорему 1.13.

При $g = 1$ имеются три бесконечные серии $T_{(s,t)}^\square, T_{(s,t)}^\triangle, T_{(s,t)}^\blacktriangle$, $s > 0, t \geq 0$, описанные в Теореме 1.14 (торические ориентированные атомы квадратного, треугольного и шестиугольного типов, соответственно).

При $g = 2$ имеется ровно 10 классов изоморфности максимально симметричных ориентированных атомов, перечисленные в Теореме 1.17.

В теории автоморфных функций были обнаружены следующие два атома рода 3. Отвечающие им правильные карты состоят из 24 семиугольников (карта Клейна [K1879, с.461-560]) и из 12 восьмиугольников (карта Дика [D1880, с.188 и 510]), соответственно. Эти и другие примеры максимально симметричных атомов можно получить из списков известных правильных конечных карт, см., например, [KM, табл. 8]. Классификация правильных карт на ориентированной поверхности рода 3 получена в работе [Sh59], на поверхности рода 4 — в работе [G69], на поверхностях рода 5 и 6 — в работе [BG89], на поверхности рода 7 — в статье [G78]. Классификация правильных карт на ориентированных поверхностях рода, не превышающего 15, представлена в статье [CD2001].

Настоящая работа мотивирована следующими проблемами, поставленными А.В.Болсиновым и А.Т.Фоменко в работе “Некоторые актуальные нерешенные задачи по топологии интегрируемых гамильтоновых систем” [BF1, задачи 7 и 23]: “Как устроены максимально симметричные 2-атомы, группа симметрий которых является простой, т.е. не содержит нетривиальных нормальных делителей? Такие атомы интересны тем, что их уже нельзя профакторизовать (свернуть) до меньшего максимально симметричного атома.” Задача 23, сформулированная А.В.Болсиновым и А.Т.Фоменко, звучит так: “Построить теорию лиувиллевых накрытий интегрируемых гамильтоновых систем. Мы скажем, что одно лиувиллево слоение покрывает другое лиувиллево слоение, если соответствующее непрерывное отображение $f: Q_1^3 \rightarrow Q_2^3$ (здесь Q_1^3 и Q_2^3 означают трёхмерные изоповерхности многообразия интегрируемых систем с двумя степенями свободы) переводит слои Лиувилля в слои Лиувилля и является обычным накрытием над дополнением к особым слоям слоения Лиувилля. Не исключено, что на этом пути удастся обнаружить интересные примеры, когда одна известная интегрируемая система лиувиллево покрывает другую известную интегрируемую систему. Выяснить: что такое универсальная покрывающая интегрируемая система с двумя степенями свободы (для определённого класса, например, для систем с данным числом особых слоев)? Сколько существует таких универсальных покрывающих интегрируемых систем? Остальные должны получаться из них факторизацией. Ясно, что классифицировать имеет смысл в первую очередь универсальные покрывающие системы.”

Вариантом этих двух проблем является следующие две задачи: 1) описать “неприводимые” максимально симметричные атомы, см. Определение 3.5

и Следствие 3.6, т.е. не являющиеся накрытиями никаких других (им не изоморфных) максимально симметричных атомов (а потому все остальные максимально симметричные атомы являются их накрытиями); 2) для любых (или хотя бы для неприводимых) максимально симметричных атомов описать все накрывающие их максимально симметричные атомы (или хотя бы достаточно широкий класс таких накрывающих атомов). В первой части работы (§2,3) мы уточним, какие именно накрытия здесь имеются в виду, и приведём их свойства (Утверждения 2.4, 2.5, 2.8, 3.3 и Следствие 3.4).

Во второй части настоящей работы (§4–8) частично решаются две упомянутые выше задачи. Более точно, определяются и изучаются *отображения типа примитивизации* (§5–6) — это такие накрытия между максимально симметричными ориентированными атомами (в смысле Определения 1.3), при которых прообраз любой белой граничной окружности связан. В терминах правильных карт такие накрытия называются *вполне разветвлёнными* [W78]. На самом деле, вместо неприводимых атомов мы вводим и изучаем более широкий класс атомов, названных нами *примитивными атомами*. Примитивные атомы отличаются от неприводимых атомов следующим: все максимально симметричные атомы являются накрытиями примитивных атомов при помощи отображений типа примитивизации.

Первая задача — описание примитивных максимально симметричных ориентированных атомов (в смысле Определения 1.4.A) — решается нами, например, в следующих частных случаях: 1) такие атомы отобраны из известных серий, см. 1.4, включающих сферические (т.е. рода 0) и торические (т.е. рода 1) атомы, см. пример 5.2; 2) найдены все примитивные максимально симметричные ориентированные атомы с не более чем шестью белыми клетками, см. Теорему 7.11; 3) найдены достаточные условия несуществования таких атомов с данным числом S белых клеток и данным числом d сторон любой белой клетки, а также перечислены такие атомы при $d \geq S - 2$, см. Теоремы 7.1, 7.4, 1.18.

Вторая задача — описание отображений типа примитивизации над данным (не обязательно примитивным) максимально симметричным ориентированным атомом — решается нами в Теореме 4.15 и Следствиях 5.7, 6.1, 6.2, причём в Теореме 4.15 классифицируются накрытия более общего вида. Эти результаты применены к бесконечным сериям атомов 1.4 и к атомам из Теоремы 7.11, см. Следствия 6.4–6.6, примеры 6.3, 6.7, 6.8 и Утверждения 7.5, 8.1–8.6. В [W78] дан алгоритм для получения аналогичной классификации вполне разветвлённых накрытий (т.е. отображений типа примитивизации) над данной правильной картой. Аналог этого алгоритма в терминах копредставлений групп использовался в [G69], [BG89], [G78] для классификации правильных карт рода 4–7. Однако, в отличие от нашей работы, эти алгоритмы применимы лишь к отдельным атомам, а не к бесконечным семействам атомов.

В третьей части работы (§8–9) перечисляются все максимально симметричные ориентированные атомы следующих типов:

- атомы сложности $n \leq 30$ (§9),
- атомы, имеющие не более 6 белых колец (§8),
- атомы сложности p или $2p$, где p — простое число (§9).

Отметим, что описание (в терминах правильных карт и копредставлений групп) максимально симметричных ориентированных атомов с двумя белыми кольцами имеется в работе Браханы [B27, с.280], а с числом белых колец, не превышающем 5, — в работе Гарбе [G69].

В частности, в настоящей работе доказаны следующие теоремы.

Теорема А (см. Теорему 4.15). Пусть Y — максимально симметричный ориентированный атом и H — конечная абелева группа. Тогда симметричные разветвлённые накрытия $f: X \rightarrow Y$ с группой монодромии H (см. Определение 4.10) классифицируются наборами

$$(l, m, q, r, c_1, \dots, c_{2g}), \quad l, m \in \text{Aut}(H), \quad q, r, c_1, \dots, c_{2g} \in H,$$

удовлетворяющими условиям 4–6 в Теореме 4.15 ниже, где g — род атома Y , и наборы рассматриваются с точностью до преобразований $(l, m, q, r, c_1, \dots, c_{2g}) \mapsto (\lambda l \lambda^{-1}, \lambda m \lambda^{-1}, \lambda(q), \lambda(r), \lambda(c_1), \dots, \lambda(c_{2g}))$, $\lambda \in \text{Aut}(H)$.

Теорема Б (см. Теорему 9.2). Пусть n — простое число или $n \in \{1, 4, 2p\}$, где p — простое число, $p \equiv 3 \pmod{4}$ и $p \neq 3$. Тогда A_n, B_n, C_n, D_n (см. 1.4) исчерпывают собой список всех классов изоморфности максимально симметричных ориентированных атомов сложности n (т.е. любой максимально симметричный ориентированный атом сложности n принадлежит одному из перечисленных классов изоморфности ориентированных атомов).

1.3 Интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы

Атомы в том виде, как было сформулировано в Определении 1.2 выше, впервые возникли в теории интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Понятие атома было введено А.Т.Фоменко [F1], [F2], [F3], [F4]. Затем атомы и связанные с ними проблемы активно изучались в работах А.Т.Фоменко и Х.Цишанга [FZ], [FZ1], А.Т.Фоменко и А.В.Болсинова [BF], [BF1], [BFR], А.Т.Фоменко и А.В.Браилова [BrF], а также в работах А.А.Ошемкова [O], [O1], [O2], [O3], [O4], Е.А.Кудрявцевой [Ku], [Ku2], А.В.Браилова [B], Ю.А.Браилова и Е.А.Кудрявцевой [BK], Н.В.Коровиной [Ko]. Интегрируемая система с двумя степенями свободы определяет в “невыврожденном” (боттовском) случае так называемое слоение Лиувилля 4-мерного симплектического многообразия M^4 , а также каждой трёхмерной изоэнергетической поверхности $Q_h^3 = \{H = h = \text{const}\}$, где H — функция Гамильтона соответствующей гамильтоновой системы. Двумерными слоями общего положения являются торы Лиувилля, а особыми слоями — двумерные и одномерные комплексы, соответствующие перестройкам торов Лиувилля. Трёхмерная окрестность U в Q_h^3 особого слоя слоения Лиувилля вместе со слоением Лиувилля на U называется трёхмерным атомом. Оказывается, на U определено естественное расслоение Зейферта, слои которого являются окружностями, лежащими в слоях Лиувилля. В общем случае у этого расслоения Зейферта есть особые слои, т.е. оно не является локально тривиальным. Базой этого расслоения Зейферта на U является двумерная поверхность P с краем, расслоенная на одномерные окружности и особые одномерные графы. Окружности являются проекциями торов слоения Лиувилля на базу P , а особые графы — проекциями особых слоев слоения Лиувилля. Эта поверхность P является (двумерным) атомом в смысле Определения 1.2.

Таким образом, сформулированная выше проблема классификации симметрий (двумерных) атомов напрямую связана с описанием симметрий интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Естественно, аналогичные задачи стоят и для гамильтоновых систем с многими степенями свободы.

1.4 Некоторые важные серии максимально симметричных ориентированных атомов

Напомним, что для каждого натурального n существуют следующие 4 класса изоморфности максимально симметричных ориентированных атомов сложности n , которые обозначим A_n, B_n, C_n, D_n , см. рис. 3,4. Ориентированные хордовые диаграммы ориентированных атомов этих классов показаны на рис. 5. **Рис.3,4,5**

Замечание 1.12. Допуская некоторую вольность изложения, иногда вместо выражения “ориентированный атом класса изоморфности A_n ” говорят “ориентированный атом A_n ” или просто “атом A_n ”, и аналогично для классов изоморфности B_n, C_n, D_n , см. Замечание 1.8.

Названные выше серии ориентированных атомов были обнаружены в теории гамильтоновых систем А.В. Болсиновым и А.Т. Фоменко [BF] (серии C_n, D_n), Ю.А. Браиловым и Е.А. Кудрявцевой [BK] (серии A_n, B_n). В терминах правильных карт эти атомы описаны также в [B27], [KM].

Ориентированные атомы классов C_n и D_n имеют род 0, группу симметрий

$$\text{Aut}(C_n) = \text{Aut}(D_n) = \mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_2,$$

изоморфную группе симметрий правильного n -угольника, $D_n = C_n^*$, причём C_n состоит из 2 белых n -угольных клеток и n чёрных двуугольных клеток.

Любой ориентированный атом класса A_n имеет род $g = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$, циклическую группу симметрий

$$\text{Aut}(A_n) = \mathbb{Z}_{2n},$$

и состоит из одной белой $2n$ -угольной клетки и из одной либо двух чёрных клеток ($2n$ -угольника при чётном n , или двух n -угольников при нечётном n). Любой ориентированный атом класса B_n имеет род $g = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$, абелеву группу симметрий

$$\text{Aut}(B_n) = \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_2,$$

и состоит из двух белых n -угольных клеток и из одной либо двух чёрных клеток ($2n$ -угольника при нечётном n , или двух n -угольников при чётном n).

Отметим, что имеются следующие совпадения классов изоморфности ориентированных атомов:

$$A_1 = D_1, \quad B_1 = C_1, \quad B_2 = C_2 = D_2,$$

а остальные классы A_n, B_n, C_n, D_n попарно различны.

Кроме того, имеется 6 классов изоморфности максимально симметричных ориентированных атомов P_i , $1 \leq i \leq 6$, см. рис. 6 и 7, отвечающих пяти классическим правильным многогранникам (платоновым телам) и правильному псевдо-многограннику (кеплерову псевдо-додекаэдру [K1619]), где ориентированные атомы получаются из этих многогранников операциями “усечение”, см. рис. 1. Эти ориентированные атомы имеют группы симметрий **Рис.6,7**

$$\text{Aut}(P_1) = \mathcal{A}_4, \quad \text{Aut}(P_2) = \text{Aut}(P_3) = \Sigma_4, \quad \text{Aut}(P_4) = \text{Aut}(P_5) = \text{Aut}(P_6) = \mathcal{A}_5.$$

Первые пять атомов имеют род 0, а шестой — род 4. Сложность n_i атома класса P_i равна числу рёбер соответствующего многогранника, $1 \leq i \leq 6$, т.е. $n_1 = 6$, $n_2 = n_3 = 12$, $n_4 = n_5 = n_6 = 30$ для классов изоморфности ориентированных атомов, отвечающих тетраэдру, кубу и октаэдру, а также додекаэдру, икосаэдру и псевдо-додекаэдру, соответственно. Число S_i белых клеток (число S'_i чёрных клеток) атома P_i равно числу граней (вершин) соответствующего правильного многогранника (т.е. $S_1 = S'_1 = 4$, $S_2 = S'_3 = 6$, $S_3 = S'_2 = 8$,

$S_4 = S'_5 = S_6 = S'_6 = 12$, $S_5 = S'_4 = 20$). Ориентированные атомы классов P_i и P_{i+1} двойственны друг другу, $i = 2, 4$, а атомы классов P_1 и P_6 двойственны сами себе, см. Определение 1.4.Б. Ориентированные хордовые диаграммы этих ориентированных атомов показаны на рис. 8 и 9.

Рис.8,9

Теорема 1.13 ([KM], 5.1 и 8.1). *Классы изоморфности сферических максимально симметричных ориентированных атомов исчерпываются двумя бесконечными сериями C_n, D_n , $n \geq 1$, где n — сложность атома, и пятью особыми случаями P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 , отвечающими платоновым телам, см. выше. При этом $C_2 = D_2$, а остальные указанные классы изоморфности попарно различны.* $\square$

Опишем три бесконечных серии $T_{(s,t)}^\square, T_{(s,t)}^\Delta, T_{(s,t)}^\blacktriangle$, $s > 0, t \geq 0$, классов изоморфности торических максимально симметричных ориентированных атомов. Белые клетки атомов первой серии (соответственно второй и третьей серий) являются квадратами (соответственно треугольниками и шестиугольниками). Отметим, что чёрные клетки атомов первой серии (соответственно второй и третьей серий) являются квадратами (соответственно шестиугольниками и треугольниками). Эти серии будем называть *сериями квадратного, треугольного и шестиугольного типов*, соответственно.

Опишем серию $T_{(s,t)}^\square$ классов изоморфности торических ориентированных атомов квадратного типа. Эта серия параметризована парой целых чисел s, t , таких что $s > 0, t \geq 0$. При этом $s^2 + t^2 = S$, где S — количество белых клеток атома. Рассмотрим на ориентированной евклидовой плоскости стандартную целочисленную решётку. Рассмотрим разбиение плоскости на квадраты со стороной $1/\sqrt{2}$, которые раскрасим в шахматном порядке в белый и чёрный цвета так, что центры белых квадратов (клеток) находятся в узлах целочисленной решётки, см. рис. 10. Рассмотрим факторпространство плоскости по подрешётке, порождённой парой целочисленных векторов (s, t) и $(-t, s)$, где числа s, t указаны выше. Поскольку разбиение плоскости на белые и чёрные квадраты инвариантно относительно сдвигов плоскости на целочисленные вектора, полученное факторпространство имеет структуру ориентированного атома. Этот ориентированный атом — торический и максимально симметричный, так как группа сдвигов на вектора указанной подрешётки является нормальной подгруппой в группе симметрий указанного разбиения плоскости на белые и чёрные квадраты (т.е. в группе, порождённой сдвигами на целочисленные вектора и поворотом на угол $\pi/2$ вокруг начала координат), см. пункт 3 Следствия 3.4. Итак, описанный ориентированный атом назовём *торическим максимально симметричным ориентированным атомом квадратного типа* (s, t) , и обозначим его класс эквивалентности через $T_{(s,t)}^\square$. Любой атом этого класса имеет сложность $n = 2(s^2 + t^2)$, ровно $S = s^2 + t^2$ белых и $S' = s^2 + t^2$ чёрных двумерных клеток. Максимально симметричный ориентированный атом, отвечающий целочисленному вектору (t, s) (вместо (s, t)) получается из описанного выше ориентированного атома заменой ориентации. Отвечающая атому $T_{(2,1)}^\square$ карта на торе имеется в работе Хеффтера [H1891, с.491], она состоит из 5 квадратов.

Рис.10

Опишем серию $T_{(s,t)}^\Delta$ классов изоморфности торических ориентированных атомов треугольного типа. Эта серия параметризована парой целых чисел s, t , таких что $s > 0, t \geq 0$. При этом $2(s^2 + st + t^2) = S$, где S — количество белых клеток атома. Рассмотрим стандартное замощение ориентированной евклидовой плоскости равносторонними треугольниками со стороной 1. Вершины этих треугольников образуют решётку, в которой выберем следующий базис e_1, e_2 . Векторы этого базиса единичные, угол между ними равен $\pi/3$, и определяемая этим базисом ориентация плоскости положительна. Определим

теперь “шахматное” разбиение плоскости на белые треугольники и чёрные шестиугольники, см. рис. 11, получающееся из указанного разбиения плоскости на треугольники операцией “усечение”, см. рис. 1. Эта операция аналогична построению атомов $P_1, \dots, P_5$ по платоновым телам. Отметим, что узлы исходной треугольной решётки являются центрами чёрных шестиугольников (клеток). Рассмотрим теперь подрешётку, порождённую векторами $se_1 + te_2$ и $-te_1 + (s+t)e_2$, см. рис. 12, где числа s, t указаны выше. Поскольку разбиение плоскости на белые треугольники и чёрные шестиугольники инвариантно относительно сдвигов плоскости на целочисленные вектора, полученное факторпространство имеет структуру ориентированного атома. Этот ориентированный атом — торический и максимально симметричный, так как группа сдвигов на вектора указанной подрешётки является нормальной подгруппой в группе симметрий указанного разбиения плоскости на белые треугольники и чёрные шестиугольники (т.е. в группе, порождённой сдвигами на целочисленные вектора и поворотом на угол $\pi/3$ вокруг начала координат), см. пункт 3 Следствия 3.4. Итак, описанный ориентированный атом назовём *торическим максимально симметричным ориентированным атомом треугольного типа* (s, t) , и обозначим его класс изоморфности через $T_{(s,t)}^\Delta$. Любой атом этого класса имеет сложность $n = 3(s^2 + st + t^2)$, ровно $S = 2(s^2 + st + t^2)$ белых и $S' = s^2 + st + t^2$ чёрных двумерных клеток. Максимально симметричный ориентированный атом, отвечающий целочисленному вектору (t, s) (вместо (s, t)) получается из описанного выше ориентированного атома заменой ориентации.

Рис.11

Рис.12

Опишем теперь серию $T_{(s,t)}^\Delta$ классов изоморфности торических ориентированных атомов шестиугольного типа. Эта серия параметризована парой целых чисел s, t , таких что $s > 0, t \geq 0$. При этом $s^2 + st + t^2 = S$, где S — количество белых клеток атома. Ориентированные атомы класса $T_{(s,t)}^\Delta$ получаются из описанных выше ориентированных атомов класса $T_{(s,t)}^\Delta$ заменой раскраски двумерных клеток — белых треугольников на чёрные, а чёрных шестиугольников на белые. Любой атом этого класса имеет сложность $n = 3(s^2 + st + t^2)$, ровно $S = s^2 + st + t^2$ белых и $S' = 2(s^2 + st + t^2)$ чёрных двумерных клеток. Как и выше, ориентированные атомы шестиугольного типа (t, s) получаются из ориентированных атомов шестиугольного типа (s, t) заменой ориентации. В работе Хивуда [H1890] имеется карта, состоящая из 7 шестиугольников и отвечающая атому $T_{(2,1)}^\Delta$, и доказано, что эту карту невозможно раскрасить менее чем семью красками.

Классы изоморфности описанных выше торических ориентированных атомов образуют полный список классов изоморфности торических максимально симметричных ориентированных атомов, полученный Г.С.М. Коксетером [K48], [K50] в эквивалентной формулировке в терминах карт и копредставлений групп.

Теорема 1.14 (Коксетер [K48], с.25, [K50], с.421). *Классы изоморфности торических максимально симметричных ориентированных атомов исчерпываются тремя бесконечными сериями $T_{(s,t)}^\square, T_{(s,t)}^\Delta, T_{(s,t)}^\blacktriangle$, $s > 0, t \geq 0$, описанными выше (торические ориентированные атомы квадратного, треугольного и шестиугольного типов, соответственно). При этом классы из различных серий различны, а разным парам (s, t) каждой серии отвечают различные классы изоморфности ориентированных атомов.* $\square$

Обозначение 1.15. Для любого максимально симметричного ориентированного атома X введём следующие обозначения. Пусть $n = n(X)$ — сложность атома X , т.е. количество его вершин, $g = g(X)$ — его род. Пусть $S = S(X)$ — количество белых двумерных клеток атома X , $d = d(X)$ — число сторон любой белой клетки, $S' = S'(X)$ — количество чёрных двумерных клеток, а

$d' = d'(X)$ — число сторон любой чёрной клетки. Пару чисел (d, d') назовём *комбинаторным типом* атома X (он также называется *типом* соответствующей правильной карты, а также *типом Шлефли* соответствующего абстрактного правильного многогранника, принятое обозначение $\{d, d'\}$).

Выше приведены теоремы Г.С.М. Коксетера 1.13 и 1.14 классификации максимально симметричных ориентированных атомов рода $g = 0$ и 1 (сферических и торических). В обоих случаях имеется бесконечное количество попарно не изоморфных максимально симметричных ориентированных атомов. Однако при любом $g \geq 2$ имеется лишь конечное число классов изоморфности максимально симметричных ориентированных атомов рода g (Теорема 1.16). Это следует из того, что, согласно соотношениям (27) и $S + S' - n = 2 - 2g$, для максимально симметричных ориентированных атомов рода $g \geq 2$ четвёрка (S, S', d, d') может принимать лишь конечное число значений (зависящее от g). Этот же факт следует и из неравенства Гурвица на порядок группы симметрий правильных карт рода g , см. [S2006].

Теорема 1.16. *Для любого натурального числа $g \geq 2$ имеется лишь конечное число классов изоморфности максимально симметричных ориентированных атомов рода g .* $\square$

Перечислим классы изоморфности максимально симметричных ориентированных атомов рода 2. Согласно результату В. Трельфалля [Т32], таких классов ровно 10 и, в обозначениях Утверждений 8.1, 8.2, 8.4, 8.6, они имеют следующий вид:

1. A_4 ($S = S' = 1, d = d' = 8$), см. Введение и Утверждение 8.1;
2. A_5 ($S = 1, S' = 2, d = 10, d' = 5$) и двойственный ему класс $B_5 = K_2^{5,1}$ ($S = 2, S' = 1, d = 5, d' = 10$), см. Введение и Утверждения 8.1, 8.2;
3. $B_6 = K_2^{6,1}$ ($S = S' = 2, d = d' = 6$), см. Введение и Утверждения 8.1, 8.2;
4. $O_2^{8,3,2} = K_2^{8,3}$ ($S = 2, S' = 4, d = 8, d' = 4$) и двойственный ему класс $O_4^{8,1,1}$ ($S = 4, S' = 2, d = 4, d' = 8$), см. Утверждения 8.2 и 8.4;
5. $O_4^{12,2,0}$ ($S = 4, S' = 6, d = 6, d' = 4$) и двойственный ему класс $O_6^{12,1,0}$ ($S = 6, S' = 4, d = 4, d' = 6$), см. Утверждения 8.4 и 8.6;
6. $P_2^{24,0}$ ($S = 6, S' = 16, d = 8, d' = 3$) и двойственный ему класс $(P_2^{24,0})^*$ ($S = 16, S' = 6, d = 3, d' = 8$), см. Утверждение 8.6.

Выше в каждом из пунктов 2,4,5,6 приведена пара двойственных друг другу классов ориентированных атомов, см. Определение 1.4.Б. Каждый из классов ориентированных атомов в пунктах 1,3 двойствен самому себе.

Теорема 1.17 (Трельфалль [Т32], с.44). *Классы изоморфности максимально симметричных ориентированных атомов рода 2 исчерпываются описанными выше десятью случаями. Эти десять классов изоморфности имеют попарно различные комбинаторные типы (d, d') . В частности, эти десять классов попарно различны и отражаемы (см. Определение 1.4.Б).* $\square$

Опишем ещё одну бесконечную серию $K_S^{n,f}$ ориентированных атомов, $n = \frac{S(S-1)}{2}$. Рассмотрим примитивные (см. Определение 5.1) максимально симметричные ориентированные атомы, имеющие ровно $S \geq 2$ белых клеток, являющихся $(S-1)$ -угольниками (а потому белые клетки являются попарно смежными). Граф смежности белых клеток (см. Определение 1.4.В) такого атома имеет S вершин и не имеет петель и кратных рёбер, а каждая его вершина имеет степень $S-1$. Такой граф единствен — это полный граф K_S .

Следующее утверждение было доказано в [JJ] в контексте правильных карт.

Теорема 1.18. Пусть $S \in \mathbb{N}$, $S \geq 2$.

(А) Число различных примитивных максимально симметричных ориентированных атомов, у которых граф смежности белых клеток есть полный граф K_S , равно $\frac{\varphi(p^l-1)}{l}$, если $S = p^l$, где p — простое число, $l \in \mathbb{N}$ и φ — функция Эйлера, и равно 0 в противном случае. Более точно, существует взаимно-однозначное соответствие между максимально симметричными ориентированными атомами с графом смежности K_S , $S = p^l$, и неприводимыми многочленами над $\mathbb{Z}_p$ степени l , корни которых являются образующими мультипликативной группы конечного поля из S элементов.

(Б) При этом, если $S > 3$ и $S \not\equiv 3 \pmod{4}$, то каждый такой атом имеет S белых и S чёрных клеток, комбинаторный тип $(S-1, S-1)$, см. обозначение 1.15, а род атома равен $\frac{S(S-5)}{4} + 1$. Если же $S > 3$ и $S \equiv 3 \pmod{4}$, то каждый такой атом имеет S белых и $2S$ чёрных клеток, комбинаторный тип $(S-1, \frac{S-1}{2})$, а род атома равен $\frac{S(S-7)}{4} + 1$. Сложность атома равна $\frac{S(S-1)}{2}$.

(В) Пусть $f(t) = t^l + c_{l-1}t^{l-1} + \dots + c_0$ — неприводимый многочлен над $\mathbb{Z}_p$, корень которого является образующей мультипликативной группы поля из $S = p^l$ элементов, $n = \frac{S(S-1)}{2}$. Обозначим через $K_S^{n,f}$ примитивный максимально симметричный ориентированный атом с графом смежности K_S , отвечающий многочлену f , см. (А). Обозначим $\bar{f}(t) = t^l + \frac{c_1}{c_0}t^{l-1} + \dots + \frac{c_{l-1}}{c_0}t + \frac{1}{c_0}$ и $f^*(t) = t^l - \frac{c_1}{c_0}t^{l-1} + \dots + (-1)^{l-1}\frac{c_{l-1}}{c_0}t + (-1)^l\frac{1}{c_0}$. Тогда

1. ориентированный атом $K_S^{n,\bar{f}}$ получается из ориентированного атома $K_S^{n,f}$ заменой ориентации;
2. если $S > 3$ и $S \not\equiv 3 \pmod{4}$, то ориентированный атом $K_S^{n,f}$ двойствен ориентированному атому K_S^{n,f^*} (см. Определение 1.4.Б).

Для малых значений $S \in \{p^l \mid p \text{ простое}, l \in \mathbb{N}\}$ имеем следующие значения для количества $N_K(S)$ (а также для рода $g_K(S)$ и сложности $n_K(S)$) примитивных максимально симметричных ориентированных атомов с графом смежности K_S :

S	2	3	4	5	7	8	9	11	13	16	17	19	23	25	27
N_K	1	1	1	2	2	2	2	4	4	2	8	6	10	4	4
g_K	0	0	0	1	1	7	10	12	27	45	52	58	93	126	109
n_K	1	3	6	10	21	28	36	55	78	120	136	171	253	300	351

В §7 для полноты изложения мы приведём доказательство Теоремы 1.18, а также отберём из серии $K_S^{n,f}$ все неприводимые ориентированные атомы.

В итоге, среди ориентированных атомов описанных выше серий неприводимы лишь следующие: $P_1, \dots, P_6$, A_{2^l} при $l \geq 0$, и $K_{2^l}^{2^{l-1}(2^l-1),f}$ при $l \geq 1$, где $f \in \mathbb{Z}_2[t]$ как в Теореме 1.18. Этот список включает атомы $D_1 = A_1$, $T_{(1,0)}^\square = A_2$, $B_1 = C_1 = A_1^* = K_2^{1,t+1}$ и исчерпывает все неприводимые максимально симметричные ориентированные атомы сложности $n \leq 30$. Отметим, что некоторые атомы X допускают накрытия $X \rightarrow Y_1$ и $X \rightarrow Y_2$ над различными (не изоморфными друг другу) неприводимыми атомами Y_1, Y_2 . Например, ориентированный атом $B_4 = T_{(1,1)}^\square$ допускает как отображение примитивизации $B_4 \rightarrow B_1$, так и неразветвлённое накрытие $B_4 \rightarrow A_2 = T_{(1,0)}^\square$.

2 Накрытия и симметрии атомов

Всюду далее в статье рассматриваются только ориентированные седловые атомы. В данном параграфе ориентированный атом понимается как оснащённая пара $(\bar{P}, K)^\#$, см. Замечание 1.8.

Определение 2.1. (А) Если атом рассматривается как поверхность $(P, K)^\#$ с краем (с клеточным разбиением и с шахматной раскраской двумерных клеток), см. Определение 1.3, то *накрытием* (ориентированного) атома $(P_2, K_2)^\#$ (ориентированным) атомом $(P_1, K_1)^\#$ будем называть обычное (сохраняющее ориентацию) накрытие поверхностей $P_1 \rightarrow P_2$, переводящее граф K_1 в граф K_2 и сохраняющее цвета колец.

(Б) Всюду далее в настоящей работе под (ориентированным) атомом будем понимать описанное выше клеточное разбиение $(\bar{P}, K)^\#$ замкнутой (ориентированной) поверхности с шахматной раскраской двумерных клеток, см. Определение 1.4.А. В этом случае под *накрытием* (ориентированных) атомов понимается (сохраняющее ориентацию) *разветвлённое накрытие* замкнутых поверхностей $\bar{P}_1 \rightarrow \bar{P}_2$, переводящее граф K_1 в граф K_2 и сохраняющее цвета двумерных клеток, с ветвлениями в “центрах” двумерных клеток (см. Определение 2.2 ниже).

Пусть X, Y — ориентированные (седловые) атомы, см. Определение 1.4.А, т.е. двумерные ориентированные связные замкнутые поверхности с заданными на них разбиениями на клетки с положительным количеством одномерных клеток (рёбер), причём двумерные клетки двух типов (“белые” и “чёрные”) и клетки одного типа не имеют общих рёбер, а каждая вершина разбиения имеет степень 4 и к ней примыкают 1 или 2 белые и 1 или 2 чёрные клетки. Как следует определить морфизм $\mathcal{F}: X \rightarrow Y$, чтобы атомы образовали категорию? Естественно потребовать, чтобы морфизм $\mathcal{F}$ являлся классом эквивалентности $\mathcal{F} = [f]$ отображения f , удовлетворяющего следующим условиям:

- $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение;
- f является клеточным и сохраняет типы (т.е. цвета) двумерных клеток;
- отображение f является разветвлённым накрытием, сохраняющим ориентацию,

где два таких отображения называются эквивалентными, если они гомотопны в классе клеточных разветвлённых накрытий.

Гомотопируя f в классе клеточных разветвлённых накрытий, мы можем добиться, чтобы точками ветвления полученного разветвлённого накрытия f_0 были центры двумерных клеток, причём на каждом (ориентированном) ребре введен параметр на отрезке $[0; 1]$, и любая двумерная клетка получается приклеиванием замкнутого единичного круга по границе к одномерному остову согласно замкнутому пути, идущему с постоянной скоростью по ребрам этого пути, и при f_0 радиусы двумерных клеток переходят в радиусы с сохранением расстояний. Разветвлённое накрытие f_0 с указанными свойствами определено однозначно, его мы будем называть *правильным*. Таким образом, $\mathcal{F} = [f] = [f_0]$ и мы приходим к следующему определению.

Определение 2.2. *Морфизмом ориентированных атомов* называется сохраняющее ориентацию клеточное разветвлённое накрытие $f: X \rightarrow Y$, точки ветвления которого находятся в центрах двумерных клеток клеточного разбиения, рассматриваемое с точностью до гомотопии в классе таких разветвлённых накрытий.

Замечание 2.3. Поскольку каждый морфизм имеет единственного правильного представителя, в дальнейшем мы будем отождествлять морфизмы ориентированных атомов с правильными разветвлёнными накрытиями.

Утверждение 2.4. Пусть Y — ориентированный атом, X — связное топологическое пространство, и $f: X \rightarrow Y$ — конечнолистное разветвлённое

накрытие, точки ветвления которого находятся в центрах двумерных клеток атома Y . Тогда на X существует единственная структура атома, для которой $f: X \rightarrow Y$ — морфизм.

Утверждение 2.5 (Единственность морфизма). Пусть X, Y — ориентированные атомы и $f, g: X \rightarrow Y$ — морфизмы. Предположим, что существует одномерная клетка $e \subset X$, такая что $f(e) = g(e)$. Тогда $f = g$.

Доказательство. Следует из связности атома X и “жёсткости” клеточных отображений. $\square$

Определение 2.6. Пусть X — ориентированный атом. Морфизм $f: X \rightarrow X$ назовем *симметрией* ориентированного атома X . Группу симметрий обозначим $\text{Aut}(X)$. Ориентированный атом X назовем *максимально симметричным*, если

- для любой его нульмерной клетки найдется симметрия атома, действующая как поворот на π вокруг этой клетки;
- для любой двумерной клетки e существует симметрия атома, сохраняющая эту клетку и действующая как элементарный поворот клетки e .

Замечание 2.7. Ориентированный атом X является максимально симметричным тогда и только тогда, когда группа его симметрий транзитивно действует на множестве ребер атома X .

Утверждение 2.8. Пусть X — ориентированный атом, $e \subset X$ — его двумерная белая клетка, $A \in \bar{e}$ — вершина клетки. Если существуют симметрии $a_e, b_A: X \rightarrow X$, такие что $a = a_e$ действует как (элементарный) поворот на клетке e , $b = b_A$ действует как центральная симметрия (т.е. “полуоборот”) с центром в A , то X — максимально симметричный атом.

Доказательство. Рассмотрим множество E_2 двумерных белых клеток атома X , таких что имеется симметрия атома, действующая как элементарный поворот на этой клетке. Рассмотрим множество E_0 нульмерных клеток (вершин) атома X , для каждой из которых есть симметрия атома, действующая как центральная симметрия с центром в этой вершине. Тогда $e \in E_2$ и $A \in E_0$. Множества E_0, E_2 инвариантны относительно $\text{Aut}(X)$. В частности, выполнены два свойства:

1. если $A_1 \in \bar{e}_1$ и $A_1 \in E_0$, $e_1 \in E_2$, то все вершины $A_i \in \bar{e}_1$ принадлежат E_0 ;
2. если $A_1 \in \bar{e}_1$ и $A_1 \in E_0$, $e_1 \in E_2$, то белая клетка e_2 , полученная из e_1 центральной симметрией с центром в точке A_1 , принадлежит E_2 .

Из этих свойств и связности атома следует, что E_0 совпадает со множеством всех вершин атома, а E_2 совпадает со множеством всех белых клеток атома X . Так элементарный поворот вокруг любой чёрной клетки можно представить в виде композиции $a_e \circ b_A$ для некоторой белой двумерной клетки e и её вершины $A \in \bar{e}$, то атом X будет симметричным по определению. $\square$

3 Регулярные разветвлённые накрытия атомов

В данном параграфе ориентированный атом тоже понимается как оснащённая пара $(\bar{P}, K)^\#$, см. Замечание 1.8.

Определение 3.1. (А) Пусть $f: X \rightarrow Y$ — накрытие линейно связных топологических пространств, $x_0 \in X$ и $y_0 = f(x_0)$. Говорят, что накрытие f *отвечает* подгруппе $\pi = f_{\#}(\pi_1(X, x_0)) \subset \pi_1(Y, y_0)$. Пусть $\text{Aut}(f^{-1}(y_0))$ — группа биекций множества $f^{-1}(y_0)$. Обозначим через $\Omega(Y, y_0)$ пространство замкнутых кривых (т.е. петель) в Y с концами в точке y_0 . Гомоморфизмом монодромии накрытия f называется гомоморфизм $\rho: \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \text{Aut}(f^{-1}(y_0))$, переводящий гомотопический класс $[\gamma] \in \pi_1(Y, y_0)$ любой петли $\gamma \in \Omega(Y, y_0)$ в биекцию множества $f^{-1}(y_0)$, сопоставляющую любой точке $x \in f^{-1}(y_0)$ конец кривой $\tilde{\gamma}$ на X , выходящей из точки x и являющейся поднятием кривой γ при накрытии f . Образ $H \subset \text{Aut}(f^{-1}(y_0))$ этого гомоморфизма называется *группой монодромии* накрытия f , образ элемента $[\gamma]$ — *монодромией* при обходе вдоль петли γ , а индуцированный эпиморфизм $\rho: \pi_1(Y, y_0) \rightarrow H$ — *эпиморфизмом монодромии*. Накрытие называется *регулярным*, если подгруппа π нормальна. *Изоморфизмом* накрытий $f_1: X_1 \rightarrow Y$ и $f_2: X_2 \rightarrow Y$ называется такой гомеоморфизм $a: X_1 \rightarrow X_2$, что $f_1 = f_2 \circ a$. *Автоморфизмом* накрытия f называется его изоморфизм с самим собой. Для регулярного накрытия f выполнено $\pi = \ker \rho$, и монодромия при обходе вдоль любой петли (однозначно) продолжается до автоморфизма накрытия, а потому группа монодромии допускает естественные изоморфизмы $H \simeq \text{Aut}(f) \simeq \pi_1(Y, y_0)/\pi$, где $\text{Aut}(f)$ — группа автоморфизмов накрытия f , называемая в этом случае *группой регулярного накрытия* f .

(Б) Пусть $f: X \rightarrow Y$ — разветвлённое накрытие линейно связного топологического пространства X над поверхностью Y , и пусть $B \subset Y$ — множество точек ветвления. Предположим, что B дискретно. Разветвлённое накрытие f называется *регулярным*, если соответствующее накрытие $f|_{X \setminus f^{-1}(B)}: X \setminus f^{-1}(B) \rightarrow Y \setminus B$ регулярно. *Группа монодромии* и *эпиморфизм монодромии разветвлённого накрытия* f (соотв. *монодромия при обходе вдоль петли*, *изоморфизм*, *автоморфизм* и *изоморфизм разветвлённых накрытий*, а также *группа регулярного разветвлённого накрытия*) определяются как соответствующие понятия для соответствующего накрытия $f|_{X \setminus f^{-1}(B)}$.

Замечание 3.2. Из теории накрытий известно, что два накрытия $f_1: X_1 \rightarrow Y$ и $f_2: X_2 \rightarrow Y$ изоморфны тогда и только тогда отвечающие им подгруппы $\pi_1, \pi_2 \subset \pi_1(Y, y_0)$ сопряжены. Поэтому для регулярных накрытий $f_1: X_1 \rightarrow Y$ и $f_2: X_2 \rightarrow Y$ следующие утверждения равносильны:

- накрытия f_1 и f_2 изоморфны;
- накрытия f_1 и f_2 отвечают одной и той же подгруппе $\pi_1 = \pi_2 \subset \pi_1(Y, y_0)$;
- соответствующие эпиморфизмы монодромии $\rho_i: \pi_1(Y, y_0) \rightarrow H_i$, $i = 1, 2$, изоморфны, т.е. существует изоморфизм $\lambda: H_1 \rightarrow H_2$, такой что $\lambda\rho_1 = \rho_2$.

Пусть X — ориентированный атом и $G = \text{Aut}(X)$ — группа его симметрий. Под симметриями ориентированного атома здесь мы понимаем правильные разветвлённые накрытия $X \rightarrow X$ (см. Замечание 2.3), которые, очевидно, являются гомеоморфизмами. Пусть $H \subset G$ — подгруппа, свободно действующая на вершинах атома X .

Утверждение 3.3. При указанных выше условиях справедливы следующие утверждения:

1. факторпространство $Y = X/H$ имеет единственную структуру ориентированного атома, для которой проекция $f: X \rightarrow Y$ является морфизмом;
2. проекция f является регулярным разветвлённым накрытием с ветвлениями в центрах двумерных клеток разбиения X , и её группа монодромии изоморфна H ;

3. $H \triangleleft G$ — нормальна тогда и только тогда, когда для любого $g \in G$ имеется $\bar{g} \in \text{Aut}(Y)$ со свойством $f \circ g = \bar{g} \circ f$; при выполнении хотя бы одного из этих условий отображение $\lambda: G \rightarrow \text{Aut}(Y)$, $\lambda(g) = \bar{g}$, $g \in G$, является гомоморфизмом и $\ker \lambda = H$, а потому λ индуцирует мономорфизм $G/H \hookrightarrow \text{Aut}(Y)$;
4. если X является максимально симметричным, то $H \triangleleft G$ тогда и только тогда, когда Y является максимально симметричным;
5. если X и Y являются максимально симметричными атомами, то имеется изоморфизм $G/H \rightarrow \text{Aut}(Y)$, переводящий классы смежности $aH, bH \in G/H$ стандартных образующих $a = a_e, b = b_A$ группы G в стандартные образующие группы $\text{Aut}(Y)$, см. Утверждение 2.8;
6. если X — максимально симметричен, то любой морфизм $f': X \rightarrow Y'$ является регулярным разветвлённым накрытием, причём его группой накрытия является некоторая подгруппа $H' \subset G$, свободно действующая на вершинах X ;
7. если Y — максимально симметричный ориентированный атом, то для любых двух морфизмов $f_1, f_2: X \rightarrow Y$ существует единственная симметрия $g \in \text{Aut}(Y)$, такая что $f_2 = g \circ f_1$;
8. если $H \triangleleft G$ — нормальна, то X максимально симметричен тогда и только тогда, когда Y максимально симметричен и $\text{Aut}(Y) \simeq G/H$.

Доказательство. 1) Группа симметрий $\text{Aut}(X)$ свободно действует на множестве ребер атома X по Утверждению 2.5, а подгруппа H свободно действует на множестве вершин атома X , поэтому подгруппа H свободно действует на подмножестве X_0 , где X_0 получается из X выкалыванием центров двумерных клеток. Тогда на $Y_0 = X_0/H$ имеется граф, являющийся образом одномерного остова атома X при проекции $f|_{X_0}: X_0 \rightarrow Y_0$, а дополнение к этому графу распадается на проколотые двумерные клетки, на которых индуцирована раскраска и ориентация. Это и задаёт структуру ориентированного атома на Y . То, что f является морфизмом, следует из построения структуры атома на Y .

2) Из того, что группа H свободно действует на X_0 , следует, что проекция $f|_{X_0}: X_0 \rightarrow Y_0$ является регулярным накрытием и что H изоморфна группе монодромии этого накрытия.

3) Подгруппа H нормальна тогда и только тогда, когда любая симметрия $g \in G = \text{Aut}(X)$ определяет корректное отображение $\bar{g}: X/H \rightarrow X/H$ по формуле $\bar{g}(Hx) = Hg(x)$, $x \in X$. Отображение $\bar{g}$ является симметрией атома Y . Поэтому задано отображение $\lambda: G \rightarrow \text{Aut}(Y)$, $\lambda(g) = \bar{g}$, $g \in G$. Оно является гомоморфизмом, так как для любых $g_1, g_2 \in G$, $x \in X$ выполнено $\bar{g}_1 \bar{g}_2(Hx) = Hg_1 g_2(x) = Hg_1(g_2(x)) = \bar{g}_1(Hg_2(x)) = \bar{g}_1(\bar{g}_2(Hx))$. Пусть $x \in X$ — внутренняя точка некоторого ребра атома X . Тогда для любого $g \in \ker \lambda$ существует такое $h \in H$, что $g(x) = h(x)$. Так как G свободно действует на множестве ребер атома X по Утверждению 2.5, то $g = h \in H$. Значит, $\ker \lambda \subset H$. Обратно, если $g \in H$, то $\bar{g}(Hx) = Hg(x) = Hx$, откуда $g \in \ker \lambda$. Поэтому $\ker \lambda = H$. Значит, λ индуцирует мономорфизм $G/H \hookrightarrow \text{Aut}(Y)$.

4) Пусть X максимально симметричен и $H \triangleleft G$. По Замечанию 2.7 G действует транзитивно на множестве ребер атома X , а потому образ мономорфизма $G/H \hookrightarrow \text{Aut}(Y)$ действует транзитивно на множестве ребер атома Y . Значит, по Замечанию 2.7, атом Y максимально симметричен.

Пусть X и Y — максимально симметричные атомы. Пусть $g \in \text{Aut}(X)$ и e — одномерная клетка в X . Тогда $f(e)$ и $f(g(e))$ — одномерные клетки в Y . Так как Y максимально симметричен, то существует единственная симметрия

$\bar{g}_e \in \text{Aut}(Y)$, такая что $\bar{g}_e(f(e)) = f(g(e))$. По Утверждению 2.5 имеет место равенство морфизмов $\bar{g}_e \circ f = f \circ g$. Поскольку f сюръективно, то морфизм $\bar{g}_e$ не зависит от выбора ребра e , обозначим его как $\bar{g}$. Пусть $g \in G$ и $h \in H$, покажем, что $g \circ h \circ g^{-1} \in H$. Для этого достаточно проверить, что $f \circ g \circ h \circ g^{-1} = f$. В самом деле,

$$f \circ g \circ h \circ g^{-1} = \bar{g} \circ f \circ h \circ g^{-1} = \bar{g} \circ f \circ g^{-1} = \bar{g} \circ \overline{g^{-1}} \circ f = \bar{g} \circ \bar{g}^{-1} \circ f = f.$$

Таким образом, H — нормальная подгруппа G .

5) По предыдущему пункту $H \triangleleft G$, а по пункту 3 имеется мономорфизм $G/H \hookrightarrow \text{Aut}(Y)$. Группа G транзитивно действует на рёбрах атома X , значит действие G/H на Y , индуцированное действием G на X , также транзитивно на рёбрах атома Y . Из Утверждения 2.5 следует, что мономорфизм $G/H \hookrightarrow \text{Aut}(Y)$ является эпиморфизмом. Осталось заметить, что индуцированное действие элемента $aH \in G/H$ на белой клетке $f(e) \subset Y$ является элементарным поворотом, а индуцированное действие симметрии $bH \in G/H$ на Y является поворотом вокруг вершины $f(A) \in Y$.

6) Определим подмножество симметрий $H' = \{h \in \text{Aut}(X) \mid f' \circ h = f'\}$. Тогда H' является подгруппой в G : если $f' \circ h_1 = f'$ и $f' \circ h_2 = f'$, то $f' \circ h_1 \circ h_2 = f' \circ h_2 = f'$. Группа H' свободно действует на множестве вершин атома X , так как f' не имеет ветвлений в вершинах атома. Пусть e — ребро атома Y' . Группа H' транзитивно действует на множестве ребер атома X , проектирующихся на e при разветвлённом накрытии f' , поскольку для любой пары ребер e', e'' атома X , таких что $f'(e') = f'(e'') = e$, имеется симметрия $h \in \text{Aut}(X)$, переводящая e' в e'' , а значит $f' \circ h(e') = f'(e') = e$, следовательно, $f' \circ h = f'$ в силу Утверждения 2.5, т.е. $h \in H'$.

7) Пусть e — некоторое ребро атома X . Так как атом Y максимально симметричен, существует симметрия $g \in \text{Aut}(Y)$, переводящая ребро $f_1(e)$ в ребро $f_2(e)$, т.е. $f_2(e) = g \circ f_1(e)$. Тогда по Утверждению 2.5 $f_2 = g \circ f_1$. Симметрия g единственна, так как f_1 сюръективно.

8) Необходимость следует из пунктов 4 и 5. Докажем достаточность. Пусть атом Y максимально симметричен, $H \triangleleft G$ и $G/H = \text{Aut}(Y)$. Покажем, что атом X максимально симметричен. Пусть e_1, e_2 — два ребра атома X . В силу максимальной симметричности атома Y существует симметрия $\bar{g} \in \text{Aut}(Y)$, переводящая ребро $f(e_1)$ в ребро $f(e_2)$. В группе симметрий G найдется элемент g , отображающийся в $\bar{g}$ при проекции $G \rightarrow G/H = \text{Aut}(Y)$, т.е. удовлетворяющий соотношению $f \circ g = \bar{g} \circ f$. Симметрия g переводит ребро e_1 в ребро e'_2 , при этом $f(e'_2) = f(g(e_1)) = \bar{g}(f(e_1)) = f(e_2)$, т.е. ребра e_2 и e'_2 проектируются в одно ребро атома Y . Так как разветвлённое накрытие f регулярно, существует симметрия $h \in H$, такая что $h(e'_2) = e_2$. Тогда симметрия $h \circ g$ переводит ребро e_1 в ребро e_2 . Таким образом, группа G транзитивно действует на множестве ребер атома X и атом X максимально симметричен. $\square$

Следствие 3.4. Пусть X — максимально симметричный ориентированный атом, $G = \text{Aut}(X)$ — группа его симметрий (т.е. морфизмов $X \rightarrow X$, понимаемых как правильные разветвлённые накрытия, см. Замечание 2.3 и текст перед 3.3), и пусть $H \subset G$ — подгруппа, свободно действующая на вершинах атома X . Тогда справедливы следующие утверждения:

1. факторпространство $Y = X/H$ имеет единственную структуру ориентированного атома, для которой проекция $f: X \rightarrow Y$ является морфизмом;
2. проекция f является регулярным разветвлённым накрытием с ветвлениями в центрах двумерных клеток разбиения X , и её группа монодромии изоморфна H ;

3. $H \triangleleft G$ тогда и только тогда, когда Y является максимально симметричным;
4. если Y является максимально симметричным, то $\text{Aut}(Y) \simeq G/H$ и для любых двух морфизмов $f_1, f_2: X \rightarrow Y$ существует единственная симметрия $g \in \text{Aut}(Y)$, такая что $f_2 = g \circ f_1$;
5. любой морфизм $f': X \rightarrow Y'$ является регулярным разветвлённым накрытием, причём его группой накрытия является некоторая подгруппа $H' \subset G$, свободно действующая на множестве вершин атома X ;
6. (свойство эквивариантности f) Y максимально симметричен тогда и только тогда, когда для любого элемента $g \in \{a, b\} \subset \text{Aut}(X)$ (здесь a, b — образующие группы $\text{Aut}(X)$ симметрий атома X , см. Утверждение 2.8), а значит, для любого $g \in \text{Aut}(X)$, существует непрерывное отображение $\bar{g}: Y \rightarrow Y$, такое что $f \circ g = \bar{g} \circ f$. $\square$

Определение 3.5. Максимально симметричный ориентированный атом X назовём *приводимым*, если существует максимально симметричный ориентированный атом Y и морфизм $X \rightarrow Y$, не являющийся изоморфизмом.

Следствие 3.6. Максимально симметричный ориентированный атом X неприводим тогда и только тогда, когда любая нормальная подгруппа его группы симметрий $\text{Aut}(X)$ содержит элемент $b = b_A$, см. Утверждение 2.8.

4 Симметричные разветвлённые накрытия атомов

В данном параграфе ориентированный атом тоже понимается как оснащённая пара $(\bar{P}, K)^\#$, см. Замечание 1.8.

Целью настоящего параграфа является описание всех максимально симметричных ориентированных атомов, являющихся разветвлёнными накрытиями с данной группой монодромии (см. Определение 4.10) над фиксированным максимально симметричным ориентированным атомом.

Пусть X — максимально симметричный ориентированный атом и $H \triangleleft \text{Aut}(X)$ — нормальная подгруппа, свободно действующая на вершинах атома X . (Это равносильно тому, что подгруппа H нормальна и не содержит “полуоборот” $b = b_A$, см. Утверждение 2.8.) Тогда X/H тоже является максимально симметричным атомом по пункту 3 Следствия 3.4.

Определение 4.1. Пусть Y — ориентированный атом. Морфизм $f: X \rightarrow Y$, являющийся композицией проекции $X \rightarrow X/H$ и любого изоморфизма $X/H \rightarrow Y$ ориентированных атомов, назовём *симметричным разветвлённым накрытием*.

Симметричные разветвлённые накрытия регулярны по пункту 5 Следствия 3.4. Важность симметричных разветвлённых накрытий вытекает из следующего утверждения, показывающего, что симметричные разветвлённые накрытия — это в точности морфизмы между максимально симметричными ориентированными атомами.

Следствие 4.2. Пусть X, Y — максимально симметричные ориентированные атомы. Тогда

1. любой морфизм $f: X \rightarrow Y$ является симметричным разветвлённым накрытием;

2. если $f_1, f_2: X \rightarrow Y$ — морфизмы, то существует $g \in \text{Aut}(Y)$, такой что $f_2 = g \circ f_1$.

Доказательство. Было доказано в пунктах 6 и 7 Утверждения 3.3. $\square$

Следствие 4.3 (Единственность симметричного разветвлённого накрытия). Пусть $f_1: X_1 \rightarrow Y$ и $f_2: X_2 \rightarrow Y$ — симметричные разветвлённые накрытия и атомы X_1 и X_2 изоморфны. Тогда разветвлённые накрытия f_1 и f_2 изоморфны, т.е. существует изоморфизм $g: X_1 \rightarrow X_2$, такой что $f_1 = f_2 \circ g$.

Доказательство. Пусть $g_0: X_1 \rightarrow X_2$ — изоморфизм атомов X_1 и X_2 . Фиксируем некоторое ребро e атома X_1 . Положим $e' = g_0(e)$ и пусть ребро e'' атома X_2 проектируется в ребро $f_1(e)$ при отображении f_2 . Так как атом X_2 максимально симметричен, существует $h \in \text{Aut}(X_2)$, переводящее ребро e' в ребро e'' . Композиция $g = h \circ g_0$ является изоморфизмом атомов X_1 и X_2 , при этом $f_2 \circ g(e) = f_2(e'') = f_1(e)$, откуда в силу Утверждения 2.5 $f_1 = f_2 \circ g$. $\square$

Следствие 3.4 можно “обратить” следующим образом:

Следствие 4.4. Пусть Y — максимально симметричный ориентированный атом, X — связное топологическое пространство и $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

1. f — конечнолистное разветвлённое накрытие, точки ветвления которого находятся в центрах двумерных клеток атома Y ;
2. разветвлённое накрытие f регулярно;
3. (свойство эквивариантности f) для любого элемента $g \in \{a, b\} \subset \text{Aut}(Y)$ (здесь a, b — образующие группы $\text{Aut}(Y)$ симметрий атома Y , см. Утверждение 2.8), а значит, для любого $g \in \text{Aut}(Y)$, существует непрерывное отображение $\tilde{g}: X \rightarrow X$, такое что $f \circ \tilde{g} = g \circ f$.

Тогда атом X (см. Утверждение 2.4) максимально симметричен, а f — симметричное разветвлённое накрытие.

Замечание 4.5. (А) Эквивариантность f в Следствии 4.4 понимается по отношению к действиям (на X и Y) группы, состоящей из таких гомеоморфизмов $\bar{g}$ пространства X , что для любых $x_1, x_2 \in X$ со свойством $f(x_1) = f(x_2)$ выполнено $f \circ \bar{g}(x_1) = f \circ \bar{g}(x_2)$. Эта группа действует на X естественным образом, а на Y рассматривается индуцированное действие при проекции $f: X \rightarrow Y$, т.е. гомеоморфизм $\bar{g}$ на X индуцирует симметрию $g \in \text{Aut}(Y)$, такую что $g(f(x)) = f(\bar{g}(x))$, $x \in X$.

(Б) Свойство эквивариантности достаточно проверять для образующих $a, b \in \text{Aut}(Y)$, так как из выполнения этого свойства для элементов $g, h \in \text{Aut}(Y)$ следует его выполнение для элемента $g^{-1}h$. Действительно, $(g^{-1}h) \circ f = g^{-1} \circ h \circ f = g^{-1} \circ f \circ (\tilde{g}\tilde{h}^{-1}) = g^{-1} \circ g \circ f \circ (\tilde{g}^{-1}\tilde{h}) = f \circ (\tilde{g}^{-1}\tilde{h})$.

Доказательство. Существование и единственность структуры атома на X вытекает из Утверждения 2.4. Так как разветвлённое накрытие является регулярным, то Y изоморфен X/H , и f является композицией проекции $X \rightarrow X/H$ и изоморфизма $X/H \rightarrow Y$, где $H \subset \text{Aut}(X)$ — некоторая подгруппа группы симметрий атома X . Покажем, что H нормальна в $G = \text{Aut}(X)$. Пусть $g \in \text{Aut}(X)$. Тогда по пункту 7 Утверждения 3.3 существует единственная симметрия $\bar{g} \in \text{Aut}(Y)$, такая что $\bar{g} \circ f = f \circ g$. Отображение $f_*: G \rightarrow \text{Aut}(Y)$, сопоставляющее элементу g элемент $\bar{g}$, является гомоморфизмом групп и $H = \ker f_* \triangleleft G$. Из условия 3 следует, что f_* — эпиморфизм, так что $\text{Aut}(Y) \simeq G/H$. Тогда X максимально симметричен в силу пункта 8 Утверждения 3.3. Разветвлённое накрытие f является симметричным по определению. $\square$

Пусть Y — ориентированный атом и Y_0 получается из Y выкалыванием центров двумерных клеток, $y_0 \in Y_0$ — некоторая фиксированная точка (например, вершина атома). Для любого $g \in \text{Aut}(Y)$ и любого пути γ , соединяющего в Y_0 точку y_0 с $g(y_0)$, рассмотрим изоморфизм $g_\# : \pi_1(Y_0, y_0) \rightarrow \pi_1(Y_0, g(y_0))$, который индуцирован отображением g , и изоморфизм $\gamma_\# : \pi_1(Y_0, g(y_0)) \rightarrow \pi_1(Y_0, y_0)$, который определяется формулой $[\omega] \mapsto [\gamma \cdot \omega \cdot \gamma^{-1}]$, $\omega \in \Omega(Y_0, g(y_0))$. Получаем автоморфизм

$$\gamma_\# \circ g_\# \in \text{Aut}(\pi_1(Y_0, y_0)), \quad \gamma_\# \circ g_\#([\omega]) = [\gamma \cdot (g \circ \omega) \cdot \gamma^{-1}], \quad \omega \in \Omega(Y_0, y_0). \quad (1)$$

Замечание 4.6. Этот автоморфизм имеет следующее простое описание. Рассмотрим группу

$$\widetilde{\text{Aut}}(Y) := \{(g, [\gamma]) \mid g \in \text{Aut}(Y), [\gamma] \in \pi_1(Y_0, y_0, g(y_0))\}$$

с операцией $(g_1, [\gamma_1]) \cdot (g_2, [\gamma_2]) = (g_1 g_2, [\gamma_1 \cdot (g_1 \circ \gamma_2)])$. Группа $\pi_1(Y_0, y_0)$ является подгруппой этой группы и совпадает с ядром канонического эпиморфизма $\lambda_Y : \widetilde{\text{Aut}}(Y) \rightarrow \text{Aut}(Y)$. Формула (1) определяет гомоморфизм

$$\widetilde{\psi} : \widetilde{\text{Aut}}(Y) \rightarrow \text{Aut}(\pi_1(Y_0, y_0)), \quad (g, [\gamma]) \mapsto \gamma_\# \circ g_\# = \text{Ad}_{(g, [\gamma])}|_{\pi_1(Y_0, y_0)},$$

или действие группы $\widetilde{\text{Aut}}(Y)$ на её подгруппе $\pi_1(Y_0, y_0) = \ker \lambda_Y$, где $\text{Ad}_x(y) = x y x^{-1}$. Рассмотрим класс $(\gamma_\# \circ g_\#) \text{Inn}(\pi_1(Y_0, y_0)) \in \text{Out}(\pi_1(Y_0, y_0))$ автоморфизма $\gamma_\# \circ g_\#$ в группе $\text{Out}(\pi_1(Y_0, y_0)) = \text{Aut}(\pi_1(Y_0, y_0)) / \text{Inn}(\pi_1(Y_0, y_0))$ внешних автоморфизмов группы $\pi_1(Y_0, y_0)$, где для любой группы G группа её внутренних автоморфизмов равна $\text{Inn}(G) := \{\text{Ad}_g \in \text{Aut}(G) \mid g \in G\}$. Заметим, что для любого другого пути γ' , соединяющего y_0 с $g(y_0)$, выполнено $\gamma'_\# \circ g_\# = \text{Ad}_{[\gamma' \cdot \gamma^{-1}]} \circ \gamma_\# \circ g_\#$, так что класс $(\gamma_\# \circ g_\#) \text{Inn}(\pi_1(Y_0, y_0))$ не зависит от выбора пути γ . Таким образом, для любого ориентированного атома Y мы получаем гомоморфизм

$$\psi : \text{Aut}(Y) \rightarrow \text{Out}(\pi_1(Y_0, y_0)), \quad g \mapsto (\gamma_\# \circ g_\#) \text{Inn}(\pi_1(Y_0, y_0)).$$

Беря композицию ψ с естественным гомоморфизмом $\text{Out}(\pi_1(Y_0, y_0)) \rightarrow \text{Aut}(H_1(Y_0; \mathbb{Z}))$, получаем гомоморфизм

$$\bar{\psi} : \text{Aut}(Y) \rightarrow \text{Aut}(H_1(Y_0; \mathbb{Z})). \quad (2)$$

Утверждение 4.7. Пусть Y — максимально симметричный ориентированный атом, X — связное топологическое пространство, $f : X \rightarrow Y$ — разветвлённое накрытие с ветвлениями в центрах двумерных клеток, и $f_0 = f|_{X_0} : X_0 \rightarrow Y_0$ — соответствующее неразветвлённое накрытие, где $X_0 = f^{-1}(Y_0)$. Обозначим $\pi = (f_0)_\#(\pi_1(X_0, x_0)) \subset \pi_1(Y_0, y_0)$, $f_0(x_0) = y_0$. Тогда следующие утверждения равносильны:

- отображение f является симметричным разветвлённым накрытием;
- для любого элемента $g \in \{a, b\} \subset \text{Aut}(Y)$, а значит, для любого $g \in \text{Aut}(Y)$ (см. Замечание 4.5.Б), и для любого пути γ , соединяющего в Y_0 точку y_0 с $g(y_0)$, выполнено $\gamma_\# \circ g_\#(\pi) = \pi$;
- для любого $g \in \text{Aut}(Y)$ и любого автоморфизма $\eta \in \text{Aut}(\pi_1(Y_0, y_0))$, такого, что $\psi(g) = \eta \cdot \text{Inn}(\pi_1(Y_0, y_0))$, выполнено $\eta(\pi) = \pi$;
- f регулярно (т.е. π нормальна) и для любого элемента $g \in \{a, b\} \subset \text{Aut}(Y)$, а значит, для любого $g \in \text{Aut}(Y)$ (см. Замечание 4.5.Б), существует путь γ , соединяющий в Y_0 точку y_0 с $g(y_0)$, такой что $\gamma_\# \circ g_\#(\pi) = \pi$;

- f регулярно (т.е. π нормальна) и для любого элемента $g \in \{a, b\} \subset \text{Aut}(Y)$, а значит, для любого $g \in \text{Aut}(Y)$ (см. Замечание 4.5.Б), существует автоморфизм $\eta \in \text{Aut}(\pi_1(Y_0, y_0))$, такой что $\eta(\pi) = \pi$ и $\psi(g) = \eta \cdot \text{Inn}(\pi_1(Y_0, y_0))$.

Доказательство. Пусть f является симметричным разветвлённым накрытием. Рассмотрим произвольную симметрию $g \in \text{Aut}(Y)$ атома Y и путь γ , соединяющий в Y_0 точки y_0 и $g(y_0)$. Пусть $\tilde{\gamma}$ — поднятие пути γ в X_0 , соединяющее точку x_0 с точкой x_1 , $f(x_1) = g(y_0)$. Согласно Следствию 4.3 существует симметрия $\tilde{g} \in \text{Aut}(X)$ атома X , такая что $f \circ \tilde{g} = g \circ f$. При этом мы можем считать, что $\tilde{g}(x_0) = x_1$ (иначе мы можем рассмотреть вместо $\tilde{g}$ композицию $h \circ \tilde{g}$, где симметрия $h \in H$ переводит точку $\tilde{g}(x_0)$ в точку x_1 , такая симметрия существует, так как точки $\tilde{g}(x_0)$ и x_1 лежат в одном слое и f является симметричным разветвлённым накрытием). Пусть $\omega \in \Omega(Y_0, y_0)$ — представитель гомотопического класса $[\omega] \in \pi$ и $\tilde{\omega}$ — его поднятие в X_0 с началом в точке x_0 . Тогда $\tilde{\omega} \in \Omega(X_0, x_0)$. Путь $\tilde{\gamma} \cdot (\tilde{g} \circ \tilde{\omega}) \cdot \tilde{\gamma}^{-1} \in \Omega(X_0, x_0)$ является поднятием пути $\gamma \cdot (g \circ \omega) \cdot \gamma^{-1}$. Следовательно,

$$\gamma_{\#} \circ g_{\#}([\omega]) = [\gamma \cdot (g \circ \omega) \cdot \gamma^{-1}] = f_{\#}[\tilde{\gamma} \cdot (\tilde{g} \circ \tilde{\omega}) \cdot \tilde{\gamma}^{-1}] \in \pi.$$

Таким образом, подгруппа $\pi \subset \pi_1(Y_0, y_0)$ инвариантна относительно преобразования $\gamma_{\#} \circ g_{\#}$.

Докажем достаточность. В силу Следствия 4.4 утверждение будет доказано, если для любой симметрии $g \in \text{Aut}(Y)$ мы сможем построить отображение $\tilde{g}: X \rightarrow X$, такое что $f \circ \tilde{g} = g \circ f$. Рассмотрим произвольную симметрию $g \in \text{Aut}(Y)$ и путь γ в Y_0 , соединяющий y_0 с $g(y_0)$. Пусть x — некоторая точка в X_0 и $\tilde{\gamma}_x$ — произвольный путь в X_0 , соединяющий x_0 с x . Пусть $\tilde{\gamma}'_x$ — поднятие пути $\gamma \cdot (g \circ f \circ \tilde{\gamma}_x)$ с началом в точке x_0 . Обозначим другой конец пути $\tilde{\gamma}'_x$ через x' и положим $\tilde{g}_0(x) = x'$.

Покажем, что таким образом корректно определяется отображение $\tilde{g}_0: X_0 \rightarrow X_0$. Пусть $\tilde{\delta}_x$ — какой-нибудь другой путь, соединяющий в X_0 точки x_0 и x . Точно так же обозначим через $\tilde{\delta}'_x$ поднятие пути $\gamma \cdot (g \circ f \circ \tilde{\delta}_x)$ с началом в точке x_0 и концом x'' , пусть дополнительно $\tilde{\delta}''_x$ есть поднятие пути $\gamma \cdot (g \circ f \circ \tilde{\delta}_x)$ с концом в точке x' . Тогда $\tilde{\gamma}'_x \cdot (\tilde{\delta}''_x)^{-1}$ есть поднятие пути $\gamma \cdot (g \circ f \circ \tilde{\omega}) \cdot \gamma^{-1}$, где $\tilde{\omega} = \tilde{\gamma}_x \cdot \tilde{\delta}_x^{-1}$. Так как $[f \circ \tilde{\omega}] \in \pi$, то по условию утверждения $[\gamma \cdot (g \circ f \circ \tilde{\omega}) \cdot \gamma^{-1}] = \gamma_{\#} \circ g_{\#}([f \circ \tilde{\omega}]) \in \pi$ и $\tilde{\gamma}'_x \cdot (\tilde{\delta}''_x)^{-1} \in \Omega(X_0, x_0)$. Следовательно, поднятия $\tilde{\delta}'_x$ и $\tilde{\delta}''_x$ совпадают, откуда $x' = x''$.

Отображение $\tilde{g}: X \rightarrow X$ получается продолжением на X отображения $\tilde{g}_0$.

Равносильность последних четырёх условий непосредственно вытекает из определения отображений $\gamma_{\#}$, $g_{\#}$ и $\psi(g)$. $\square$

Замечание 4.8. (А) Опишем группу $\widetilde{\text{Aut}}(Y)$ из Замечания 4.6 как подгруппу группы $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$, совпадающую с $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$ в случае максимально симметричного ориентированного атома Y . Пусть ориентированный атом $Y = (\bar{P}, K)^{\#}$ получен из пары $(P, K)^{\#}$ (см. Определение 1.3) приклеиванием кругов к граничным окружностям (см. Определение 1.4 и нижеследующий текст). Пусть $\Gamma \subset P$ — ориентированная хордовая диаграмма (т.е. f -граф) ориентированного атома $(P, K)^{\#}$, см. Определение 1.6.Б. Можно считать, что точка y_0 является вершиной графа Γ , а автоморфизмы ориентированного атома Y сохраняют f -граф Γ (и являются его автоморфизмами). Рассмотрим “комбинаторный” путь $\gamma = \gamma_1 \dots \gamma_N$ на графе Γ , соединяющий вершину y_0 с вершиной $g(y_0)$, где каждый путь γ_i имеет концы в вершинах графа Γ и является монотонным движением по некоторому ребру, $1 \leq i \leq N$. Любой такой путь γ однозначно задаётся последовательностью $(w_1, \dots, w_N)$, $w_i \in \{\tilde{a}, \tilde{a}^{-1}, \tilde{b}\}$, $1 \leq i \leq N$ (т.е. словом в алфавите $\{\tilde{a}, \tilde{a}^{-1}, \tilde{b}\}$), где $w_i = \tilde{b}$ если γ_i проходит по неориентированному ребру

f -графа Γ , и $w_i = \tilde{a}$ (соотв. $\tilde{a}^{-1}$) если γ_i проходит по ориентированному ребру в направлении ориентации ребра (соотв. в направлении, противоположном ориентации ребра). В этом случае будем писать $\gamma = \gamma_{Y, (w_1, \dots, w_N)}$. Сопоставим паре (g, γ) элемент $W = W_\gamma = w_1 \dots w_N \in \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2 = \langle \tilde{a}, \tilde{b} \mid \tilde{b}^2 \rangle$. Это сопоставление задаёт мономорфизм групп $\widetilde{\text{Aut}(Y)} \hookrightarrow \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$. Если два слова $(w_1, \dots, w_N)$ и $(w'_1, \dots, w'_{N'})$ определяют один и тот же элемент $W = W'$ группы $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$, то кривые $\gamma_{Y, (w_1, \dots, w_N)}, \gamma_{Y, (w'_1, \dots, w'_{N'})}$ имеют одинаковые концы и гомотопны относительно концов, поэтому такие кривые мы не будем различать и будем писать $\gamma_{Y, W}$ вместо $\gamma_{Y, (w_1, \dots, w_N)}$.

(Б) В группе $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$ рассмотрим подгруппу соотношений $R_Y = \{V \in \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2 \mid \gamma_{Y, V}(1) = y_0\}$. Тогда $g(y_0) = y_0$ в том и только том случае, когда $W_\gamma \in R_Y$. Поэтому мономорфизм групп $\widetilde{\text{Aut}(Y)} \hookrightarrow \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$ приводит к мономорфизму их подгрупп $\pi_1(Y_0, y_0) \hookrightarrow R_Y$. Если при помощи этих мономорфизмов отождествить группы $\widetilde{\text{Aut}(Y)}, \pi_1(Y_0, y_0)$ с соответствующими подгруппами групп $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2, R_Y$, то, согласно Замечанию 4.6, автоморфизм $\tilde{\psi}(g, [\gamma]) = \gamma_\# \circ g_\#$ совпадает с ограничением автоморфизма $\text{Ad}_{W_\gamma}|_{R_Y}$ на подгруппу группы R_Y — образ мономорфизма $\pi_1(Y_0, y_0) \hookrightarrow R_Y$.

(В) Пусть ориентированный атом Y максимально симметричен. Тогда мономорфизм $\widetilde{\text{Aut}(Y)} \hookrightarrow \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$ является изоморфизмом. Композиция его обратного и канонического эпиморфизма $\lambda_Y: \widetilde{\text{Aut}(Y)} \rightarrow \text{Aut}(Y)$ совпадает с эпиморфизмом $\mu_Y: \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Aut}(Y)$, определённым на образующих формулами $\tilde{a} \mapsto a = a_e, \tilde{b} \mapsto b = b_A$, см. Утверждение 2.8. При этом подгруппа соотношений $R_Y = \ker \mu_Y$ нормальна, и $\mu_Y(W_\gamma) = g$.

Следствие 4.9. Пусть Y — максимально симметричный ориентированный атом, $\rho: \pi_1(Y_0, y_0) \rightarrow H$ — некоторый эпиморфизм в конечную группу H и $f: X \rightarrow Y$ — отвечающее подгруппе $\ker \rho \triangleleft \pi_1(Y_0, y_0)$ регулярное разветвлённое накрытие, см. Определение 3.1. Тогда следующие условия равносильны:

1. f является симметричным разветвлённым накрытием;
2. (свойство эквивариантности ρ) для любого элемента $g \in \{a, b\} \subset \text{Aut}(Y)$, а значит, для любого $g \in \text{Aut}(Y)$ (см. Замечание 4.5.Б), и для некоторого (а значит, любого) пути γ , соединяющего в Y_0 точку y_0 с $g(y_0)$, корректно определён автоморфизм $F(g, \gamma) \in \text{Aut}(H)$, такой что $\rho \circ \gamma_\# \circ g_\# = F(g, \gamma) \circ \rho$, где автоморфизм $\gamma_\# \circ g_\#$ определяется формулой (1);
3. для любого элемента $g \in \{a, b\} \subset \text{Aut}(Y)$, а значит, для любого $g \in \text{Aut}(Y)$ (см. Замечание 4.5.Б), и для некоторого (а значит, любого) пути γ , соединяющего в Y_0 точку y_0 с $g(y_0)$, выполнено $\gamma_\# \circ g_\#(\ker \rho) = \ker \rho$.

Доказательство. Эквивалентность условий 1 и 3 доказана в Утверждении 4.7, так как подгруппа $\ker \rho$ отождествляется с $(f_0)_\#(\pi_1(X_0, x_0))$.

Покажем эквивалентность условий 2 и 3. Предположим, что имеется автоморфизм $F(g, \gamma) \in \text{Aut}(H)$, такой что $\rho \circ \gamma_\# \circ g_\# = F(g, \gamma) \circ \rho$. Тогда для любого $\alpha \in \ker \rho$ имеем $\rho \circ \gamma_\# \circ g_\#(\alpha) = F(g, \gamma) \circ \rho(\alpha) = 0$, то есть $\gamma_\# \circ g_\#(\alpha) \in \ker \rho$ и $\gamma_\# \circ g_\#(\ker \rho) = \ker \rho$.

С другой стороны, пусть $\gamma_\# \circ g_\#(\ker \rho) = \ker \rho$. Тогда на факторпространстве $\pi_1(Y_0, y_0)/\ker \rho$ индуцируется автоморфизм $F(g, \gamma)$, задаваемый формулой $F(g, \gamma)(\alpha \ker \rho) = (\gamma_\# \circ g_\#(\alpha)) \ker \rho$ для любого $\alpha \ker \rho \in \pi_1(Y_0, y_0)/\ker \rho$. Но $\pi_1(Y_0, y_0)/\ker \rho \simeq H$, то есть можно считать, что $F(g, \gamma) \in \text{Aut}(H)$. Равенство $\rho \circ \gamma_\# \circ g_\# = F(g, \gamma) \circ \rho$ следует из определения гомоморфизма $F(g, \gamma)$. $\square$

Определение 4.10. Согласно Определениям 3.1 и 4.1, группу H в Следствии 4.9 назовем *группой монодромии* симметричного разветвлённого накрытия f , эпиморфизм $\rho: \pi_1(Y_0, y_0) \rightarrow H$ — *эпиморфизмом монодромии* этого разветвлённого накрытия, а элемент $\rho([\gamma]) \in H$ — *монодромией* при обходе вдоль петли $\gamma \in \Omega(Y_0, y_0)$.

Замечание 4.11. (А) Эквивариантность ρ в Следствии 4.9 означает, что эпиморфизм $\rho: \pi_1(Y_0, y_0) \rightarrow H$ эквивариантен относительно действий группы $\widetilde{\text{Aut}}(Y) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$ на группах $\pi_1(Y_0, y_0)$ и H автоморфизмами, определёнными формулами

$$\tilde{\psi}: \widetilde{\text{Aut}}(Y) \rightarrow \text{Aut}(\pi_1(Y_0, y_0)), \quad (g, [\gamma]) \mapsto \gamma_{\#} \circ g_{\#},$$

$$\tilde{\psi}_{\rho}: \widetilde{\text{Aut}}(Y) \rightarrow \text{Aut}(H), \quad (g, [\gamma]) \mapsto F(g, \gamma),$$

см. Замечания 4.6 и 4.8. Рассмотрим естественные отождествления $\text{Aut}(X) \simeq (\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2)/R_X$ и $\text{Aut}(Y) \simeq (\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2)/R_Y$, см. Замечание 4.8.В. Тогда группа монодромии $H \subset \text{Aut}(X)$ отождествляется с нормальной подгруппой $R_Y/R_X \subset (\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2)/R_X$, см. Определения 3.1 и 4.1. Для любой петли $\gamma \in \Omega(Y_0, y_0)$ рассмотрим такое слово $W \in R_Y \subset \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$ в алфавите $\{\tilde{a}, \tilde{a}^{-1}, \tilde{b}\}$, что $[\gamma] = [\gamma_{Y,W}] \in \pi_1(Y_0, y_0)$, см. Замечание 4.8.А. Из Определения 3.1 гомоморфизма монодромии регулярного разветвлённого накрытия следует, что

$$\rho([\gamma]) = \rho([\gamma_{Y,W}]) = \lambda_X(\mu_X(W), [\gamma_{X,W}]) = \mu_X(W) \in H \subset \text{Aut}(X),$$

где $\lambda_X: \widetilde{\text{Aut}}(X) \rightarrow \text{Aut}(X)$ и $\mu_X: \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Aut}(X)$ — канонические эпиморфизмы, см. Замечание 4.8.В. Из эквивариантности ρ и Замечания 4.8.Б имеем

$$\tilde{\psi}_{\rho}: \widetilde{\text{Aut}}(Y) \rightarrow \text{Aut}(H), \quad (\mu_Y(V), [\gamma_{Y,V}]) \mapsto \text{Ad}_{\mu_X(V)}|_H, \quad V \in \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2.$$

Поэтому в случае абелевой группы H определён индуцированный гомоморфизм

$$\overline{\psi}_{\rho}: \text{Aut}(Y) \rightarrow \text{Aut}(H), \quad \mu_Y(V) \mapsto \text{Ad}_{\mu_X(V)}|_H, \quad V \in \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2.$$

(Б) Свойство эквивариантности в Следствиях 4.4, 4.9 и Утверждении 4.7 достаточно проверять для образующих a_e, b_A группы $\text{Aut}(Y)$, см. Замечание 4.5.Б.

(В) Пусть $g \in \text{Aut}(Y)$ и пути γ, γ' соединяют в Y_0 точки y_0 и $g(y_0)$. Обозначим $\omega = \gamma' \gamma^{-1} \in \Omega(Y_0, y_0)$. Тогда $\gamma'_{\#} \circ g_{\#} = \text{Ad}_{[\omega]} \circ \gamma_{\#} \circ g_{\#}$, где $\text{Ad}_{[\omega]} \in \text{Aut}(\pi_1(Y_0, y_0))$ действует по формуле $[\delta] \mapsto [\omega \delta \omega^{-1}]$. Поэтому в Следствии 4.9 при проверке эквивариантности относительно элемента g можно рассматривать только один из путей γ , соединяющих y_0 с $g(y_0)$.

(Г) Пусть Y — максимально симметричный ориентированный атом и Γ — его f -граф, см. Определение 1.6. Тогда Γ гомотопически эквивалентен пространству Y_0 и $\pi_1(\Gamma) \simeq \pi_1(Y_0)$. Поэтому симметричные разветвлённые накрытия над Y описываются как эквивариантные эпиморфизмы $\pi_1(\Gamma) \rightarrow H$ (относительно действия группы $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$ на $\pi_1(Y_0, y_0)$ и подходящего её действия на H).

Для каждого элемента $g \in \text{Aut}(Y)$ фиксируем путь γ_g из y_0 в $g(y_0)$ и обозначим $\psi^*(g) = (\gamma_g)_{\#} \circ g_{\#} \in \text{Aut}(\pi_1(Y_0, y_0))$. Определим отображение

$$\chi: \text{Aut}(Y) \times \text{Aut}(Y) \rightarrow \pi_1(Y_0, y_0),$$

сопоставляющее паре $g, h \in \text{Aut}(Y)$ элемент $\chi(g, h) = [\gamma_g] \cdot [g \circ \gamma_h] \cdot [\gamma_{gh}^{-1}]$. Пусть $\rho: \pi_1(Y_0, y_0) \rightarrow H$ — эпиморфизм, задающий симметричное разветвлённое накрытие $f: X \rightarrow Y$, см. Следствие 4.9. Тогда, согласно Следствию 4.9, автоморфизм $\psi^*(g)$ индуцирует автоморфизм $\psi_{\rho}^*(g) = F(g, \gamma_g) \in \text{Aut}(H)$.

Утверждение 4.12. *Группа симметрий $\text{Aut}(X)$ изоморфна группе $H \rtimes_{\psi^*, \rho \circ \chi} \text{Aut}(Y)$, состоящей из пар (h, g) , $h \in H$, $g \in \text{Aut}(Y)$ с умножением*

$$(h_1, g_1) \cdot (h_2, g_2) = (h_1 \psi_\rho^*(g_1)(h_2) \rho(\chi(g_1, g_2)), g_1 g_2),$$

$h_1, h_2 \in H$, $g_1, g_2 \in \text{Aut}(Y)$.

Доказательство. Возьмём произвольное $x_0 \in X$, такое что $f(x_0) = y_0$. Рассмотрим отображение $\Phi: \text{Aut}(X) \rightarrow H \times \text{Aut}(Y)$, $\Phi(g) = (\phi(g), p(g))$, где $p: \text{Aut}(X) \rightarrow \text{Aut}(Y)$ — естественный эпиморфизм, а $\phi: \text{Aut}(X) \rightarrow H$ задаётся следующим образом. Пусть $\tilde{\gamma}$ — путь в X_0 , соединяющий некоторую точку $x \in X_0$ с точкой $g(x_0)$, причём $f \circ \tilde{\gamma} = \gamma_{p(g)}$. Тогда $f(x) = y_0$, и существует единственный элемент $h \in H$, такой что $h(x_0) = x$. Полагаем $\phi(g) = h$.

Пусть $g_1, g_2 \in \text{Aut}(X)$. Тогда $p(g_1 g_2) = p(g_1) p(g_2)$. Посмотрим, как связаны элементы $\phi(g_1)$, $\phi(g_2)$ и $\phi(g_1 g_2)$. Пусть $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\gamma}_1$, $\tilde{\gamma}_2$ — пути в X_0 , такие что $f \circ \tilde{\gamma} = \gamma_{p(g_1 g_2)}$, $f \circ \tilde{\gamma}_1 = \gamma_{p(g_1)}$ и $f \circ \tilde{\gamma}_2 = \gamma_{p(g_2)}$, которые соединяют, соответственно, точки x и $g_1 g_2(x_0)$, x_1 и $g_1(x_0)$, x_2 и $g_2(x_0)$. Пусть $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \Omega(Y_0, y_0)$ — такие представители гомотопических классов $[\omega], [\omega_1], [\omega_2] \in \pi_1(Y_0, y_0)$, что $\rho([\omega]) = \phi(g_1 g_2)$, $\rho([\omega_1]) = \phi(g_1)$, $\rho([\omega_2]) = \phi(g_2)$. Пусть $\tilde{\omega}, \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$ — пути в X_0 , удовлетворяющие условиям $f \circ \tilde{\omega} = \omega$, $f \circ \tilde{\omega}_1 = \omega_1$, $f \circ \tilde{\omega}_2 = \omega_2$ и соединяющие точку x_0 с точками x, x_1, x_2 , соответственно. Рассмотрим в X_0 путь

$$\tilde{\omega}_1 \tilde{\gamma}_1 \cdot (g_1 \circ (\tilde{\omega}_2 \tilde{\gamma}_2)) \cdot \tilde{\gamma}^{-1} \tilde{\omega}^{-1}.$$

Этот путь замкнут и гомотопический класс его образа при отображении f равен

$$\begin{aligned} & [\omega_1 \gamma_{p(g_1)} \cdot (p(g_1) \circ \omega_2) \cdot (p(g_1) \circ \gamma_{p(g_2)}) \cdot \gamma_{p(g_1 g_2)}^{-1} \omega^{-1}] = \\ & [\omega_1] \cdot [\gamma_{p(g_1)} \cdot (p(g_1) \circ \omega_2) \cdot \gamma_{p(g_1)}^{-1}] \cdot [\gamma_{p(g_1)} \cdot (p(g_1) \circ \gamma_{p(g_2)}) \cdot \gamma_{p(g_1 g_2)}^{-1}] \cdot [\omega^{-1}] = \\ & [\omega_1] \cdot (\psi^* \circ p(g_1)[\omega_2]) \cdot \chi(p(g_1), p(g_2)) \cdot [\omega^{-1}]. \end{aligned}$$

Так как исходный путь в X_0 замкнут, то этот класс принадлежит $\ker \rho$. Поэтому, применяя к нему гомоморфизм ρ , мы получим равенство

$$\begin{aligned} 1 &= \rho([\omega_1]) \cdot (\rho \circ \psi^* \circ p(g_1)[\omega_2]) \cdot \rho(\chi(p(g_1), p(g_2))) \cdot \rho([\omega^{-1}]) = \\ & \phi(g_1) \cdot (F(p(g_1), \gamma_{p(g_1)}) \circ \rho([\omega_2])) \cdot \rho(\chi(p(g_1), p(g_2))) \cdot \phi(g_1 g_2)^{-1} = \\ & \phi(g_1) \cdot (\psi_\rho^* \circ p(g_1)(\phi(g_2))) \cdot \rho(\chi(p(g_1), p(g_2))) \cdot \phi(g_1 g_2)^{-1}, \end{aligned}$$

откуда

$$\phi(g_1 g_2) = \phi(g_1) \cdot (\psi_\rho^* \circ p(g_1)(\phi(g_2))) \cdot \rho(\chi(p(g_1), p(g_2))).$$

Таким образом, отображение Φ согласовано с умножением в $\text{Aut}(X)$ и в $H \rtimes_{\psi^*, \rho \circ \chi} \text{Aut}(Y)$, т.е. является гомоморфизмом.

Проверим, что Φ — изоморфизм. Для этого построим обратное отображение $\Psi: H \times \text{Aut}(Y) \rightarrow \text{Aut}(X)$. Пусть даны $h \in H$ и $g \in \text{Aut}(Y)$. Пусть $x_h \in f^{-1}(y_0)$ такое, что $h(x_0) = x_h$. Рассмотрим путь $\tilde{\gamma}_g$ в X_0 , началом которого является точка x_h и для которого верно равенство $f(\tilde{\gamma}_g) = \gamma_g$. Пусть $x \in X_0$ — другой конец пути $\tilde{\gamma}_g$. Построим симметрию $\tilde{g} \in \text{Aut}(X)$ следующим образом. Для любой точки $x' \in X_0$ рассмотрим произвольный путь $\tilde{\gamma}'$ в X_0 , соединяющий x_0 с x' . Пусть $\gamma' = f \circ \tilde{\gamma}'$. Рассмотрим поднятие $\tilde{\gamma}''$ пути $g \circ \gamma'$, которое своим началом имеет точку x . Положим $\Psi(g, h)(x') = x''$, где x'' — конец пути $\tilde{\gamma}''$.

Очевидно, что $\Phi \circ \Psi(g, h) = (g, h)$. Так как группы $\text{Aut}(X)$ и $H \rtimes_{\psi^*, \rho \circ \chi} \text{Aut}(Y)$ конечны и имеют одинаковое число элементов, то Φ и Ψ — изоморфизмы. $\square$

Когда группа монодромии H регулярного разветвлённого накрытия над Y абелева, эпиморфизм монодромии $\rho: \pi_1(Y_0, y_0) \rightarrow H$ (см. Определение 4.10) сводится к эпиморфизму

$$\bar{\rho}: H_1(Y_0; \mathbb{Z}) \rightarrow H. \quad (3)$$

Следствие 4.13. Пусть Y — максимально симметричный ориентированный атом, H — конечная абелева группа, $\bar{\rho}: H_1(Y_0; \mathbb{Z}) \rightarrow H$ — некоторый эпиморфизм и $f: X \rightarrow Y$ — регулярное разветвлённое накрытие, отвечающее подгруппе $\ker \bar{\rho} \subset H_1(Y_0; \mathbb{Z})$ (см. Определение 3.1). Тогда f является симметричным разветвлённым накрытием (см. Определение 4.1) в том и только том случае, когда эпиморфизм $\bar{\rho}$ эквивариантен (относительно действия (2) группы $\text{Aut}(Y)$ на $H_1(Y_0; \mathbb{Z})$ и некоторого действия группы $\text{Aut}(Y)$ на H), т.е. существует гомоморфизм групп

$$\overline{\psi_\rho}: \text{Aut}(Y) \rightarrow \text{Aut}(H),$$

такой что $\bar{\rho}(\bar{\psi}(g)) = \overline{\psi_\rho}(g) \circ \bar{\rho}$ для любого элемента $g \in \{a, b\} \subset \text{Aut}(Y)$, а значит, для любого $g \in \text{Aut}(Y)$ (см. Замечания 4.5.Б и 4.11.Б). Гомоморфизм $\overline{\psi_\rho}$ назовем сквозным (левым) действием группы $\text{Aut}(Y)$ на группе монодромии H . $\square$

Обозначение 4.14. Пусть Y — максимально симметричный ориентированный атом рода $g \geq 0$, имеющий S белых и S' чёрных клеток. Пусть $e \subset Y$ — белая клетка атома Y , $e' \subset Y$ — чёрная клетка атома Y , $A \in \bar{e} \cap \bar{e}'$ — их общая вершина, такая, что граница клетки e' содержит начальное полуребро положительно ориентированного кругового обхода вдоль границы клетки e из вершины A . Пусть $a = a_e, b = b_A \in \text{Aut}(Y)$ — соответствующие образующие группы $\text{Aut}(Y)$, см. Утверждение 2.8. Пусть $h_1, \dots, h_S, h'_1, \dots, h'_{S'} \in \text{Aut}(Y)$ — такой набор симметрий атома, что $h_1(e), \dots, h_S(e), h'_1(e'), \dots, h'_{S'}(e')$ — набор всех белых и всех чёрных клеток атома Y . Пусть Y_0 — пространство, получаемое из Y выкалыванием центров двумерных клеток, $[\alpha] \in H_1(Y_0; \mathbb{Z})$ — класс гомологий положительно ориентированной петли α вокруг центра клетки e , $[\beta] \in H_1(Y_0; \mathbb{Z})$ — вокруг центра клетки e' . Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$ — набор замкнутых путей на атоме Y , не проходящих через центры двумерных клеток и задающих набор образующих группы $H_1(Y; \mathbb{Z})$.

Теорема 4.15. Пусть Y — максимально симметричный ориентированный атом и H — конечная абелева группа. Тогда симметричные разветвлённые накрытия $f: X \rightarrow Y$ с группой монодромии H (см. Определение 4.10) классифицируются наборами

$$(l, m, q, r, c_1, \dots, c_{2g}), \quad l, m \in \text{Aut}(H), \quad q, r, c_1, \dots, c_{2g} \in H, \quad (4)$$

удовлетворяющими условиям 4–6 ниже, где g — род атома Y , и наборы рассматриваются с точностью до преобразований

$$(l, m, q, r, c_1, \dots, c_{2g}) \mapsto (\lambda l \lambda^{-1}, \lambda m \lambda^{-1}, \lambda(q), \lambda(r), \lambda(c_1), \dots, \lambda(c_{2g})), \quad (5)$$

$\lambda \in \text{Aut}(H)$. При этом, в обозначениях 4.14, $q = \bar{\rho}([\alpha])$ и $r = \bar{\rho}([\beta])$ — монодромии при обходе вокруг центров клеток e, e' , $c_k = \bar{\rho}([\gamma_k])$ — монодромия при обходе вдоль кривой γ_k , $1 \leq k \leq 2g$ (см. Определение 4.10), $m = \overline{\psi_\rho}(a)$ и $l = \overline{\psi_\rho}(b)$ — сквозные действия симметрий $a, b \in \text{Aut}(Y)$ на группе H (см. Следствие 4.13), и выполнены формулы Замечания 4.17 ниже.

Более точно, в обозначениях 4.14, выполнены следующие утверждения.

(А) Пусть $\bar{\rho}: H_1(Y_0; \mathbb{Z}) \rightarrow H$ — эпиморфизм и $f: X \rightarrow Y$ — симметричное разветвлённое накрытие с эпиморфизмом монодромии $\bar{\rho}$, см. Определение 4.10 и (3). Пусть $\overline{\psi_\rho}: \text{Aut}(Y) \rightarrow \text{Aut}(H)$ — сквозное действие группы симметрий $\text{Aut}(Y)$ на группе H , см. Следствие 4.13. Тогда автоморфизмы $m = \overline{\psi_\rho}(a)$, $l = \overline{\psi_\rho}(b) \in \text{Aut}(H)$ и элементы

$$q = \bar{\rho}([\alpha]), \quad r = \bar{\rho}([\beta]), \quad c_1 = \bar{\rho}([\gamma_1]), \dots, c_{2g} = \bar{\rho}([\gamma_{2g}]) \in H \quad (6)$$

удовлетворяют следующим условиям:

1. $m(q) = q, \quad lm^{-1}(r) = r;$
2. $\left(\prod_{i=1}^S \overline{\psi}_\rho(h_i)(q)\right) \prod_{j=1}^{S'} \overline{\psi}_\rho(h'_j)(r) = 1 \in H;$
3. $\bar{\rho}([h_i \circ \alpha]) = \overline{\psi}_\rho(h_i)(q), \quad \bar{\rho}([h'_j \circ \beta]) = \overline{\psi}_\rho(h'_j)(r), \quad \bar{\rho}([\gamma_k]) = c_k, \quad 1 \leq i \leq S, \quad 1 \leq j \leq S', \quad 1 \leq k \leq 2g;$
4. $S + S' + 2g$ элементов $\overline{\psi}_\rho(h_1)(q), \dots, \overline{\psi}_\rho(h_S)(q), \overline{\psi}_\rho(h'_1)(r), \dots, \overline{\psi}_\rho(h'_{S'})(r), c_1, \dots, c_{2g} \in H$ порождают группу H ;
5. $m(\bar{\rho}([h_i \circ \alpha])) = \bar{\rho}([a \circ h_i \circ \alpha]), \quad m(\bar{\rho}([h'_j \circ \beta])) = \bar{\rho}([a \circ h'_j \circ \beta]), \quad m(c_k) = \bar{\rho}([a \circ \gamma_k]);$
 $l(\bar{\rho}([h_i \circ \alpha])) = \bar{\rho}([b \circ h_i \circ \alpha]), \quad l(\bar{\rho}([h'_j \circ \beta])) = \bar{\rho}([b \circ h'_j \circ \beta]), \quad l(c_k) = \bar{\rho}([b \circ \gamma_k]),$
 $1 \leq i \leq S, \quad 1 \leq j \leq S', \quad 1 \leq k \leq 2g.$

При этом набор $(l, m, q, r, c_1, \dots, c_{2g})$ определён симметричным разветвлённым накрытием f (не зависимо от выбора эпиморфизма монодромии $\bar{\rho}$) с точностью до преобразований (5). Если два симметричных разветвлённых накрытия с группой монодромии H изоморфны (см. Определение 3.1), то отвечающие им наборы получаются друг из друга такими преобразованиями.

(Б) Пусть элементы $q, r, c_1, \dots, c_{2g} \in H$ и автоморфизмы $l, m \in \text{Aut}(H)$ удовлетворяют следующему условию:

6. существует гомоморфизм $\psi_\rho: \text{Aut}(Y) \rightarrow \text{Aut}(H)$, определённый на образующих $a, b \in \text{Aut}(Y)$ формулами $\psi_\rho(a) = m, \quad \psi_\rho(b) = l$ (в частности, $l^2 = \psi_\rho(b^2) = \text{id}_H$).

Пусть выполнены также условия 4, 5 выше, где в условии 5 через $\bar{\rho}: H_1(Y_0; \mathbb{Z}) \rightarrow H$ обозначен гомоморфизм групп, определённый на образующих $[h_1 \circ \alpha], \dots, [h_S \circ \alpha], [h'_1 \circ \beta], \dots, [h'_{S'} \circ \beta], [\gamma_1], \dots, [\gamma_{2g}]$ группы $H_1(Y_0; \mathbb{Z})$ формулами из свойства 3 выше. Тогда выполнено (6) и существует симметричное разветвлённое накрытие $f: X \rightarrow Y$, для которого гомоморфизмы $\bar{\rho}, \psi_\rho$ являются эпиморфизмом монодромии и сквозным действием на группе монодромии, соответственно.

Любые два таких разветвлённых накрытия изоморфны. Для любого $\lambda \in \text{Aut}(H)$ набор $(\lambda l \lambda^{-1}, \lambda m \lambda^{-1}, \lambda(q), \lambda(r), \lambda(c_1), \dots, \lambda(c_{2g}))$ также удовлетворяет условиям 4–6, а отвечающее этому набору симметричное разветвлённое накрытие изоморфно разветвлённому накрытию f .

Замечание 4.16. В силу Теоремы 4.15, сопоставление симметричному разветвлённому накрытию $f: X \rightarrow Y$ с абелевой группой монодромии H соответствующего набора (4) по формулам из Теоремы 4.15.А задаёт взаимно-однозначное соответствие между классами изоморфности симметричных накрытий над Y с группой монодромии H (см. Следствие 4.3) и наборами (4), удовлетворяющими условиям 4–6 и рассматриваемыми с точностью до преобразований (5).

Замечание 4.17. Степень симметричного разветвлённого накрытия $f: X \rightarrow Y$ из Теоремы 4.15 равна $k := |H|$, а порядки ветвления в центрах белых (соотв. чёрных) клеток равны порядку $|\langle q \rangle|$ элемента q (соотв. порядку $|\langle r \rangle|$ элемента r) в группе H . При этом, в обозначениях 4.14, ориентированный атом X имеет род $g = \frac{n - \frac{S}{|\langle q \rangle|} - \frac{S'}{|\langle r \rangle|}}{2} k + 1$, сложность kn , $S[H : \langle q \rangle] = S \frac{k}{|\langle q \rangle|}$ белых клеток и $S'[H : \langle r \rangle] = S' \frac{k}{|\langle r \rangle|}$ чёрных клеток, причём каждая его белая клетка имеет $d|\langle q \rangle|$ сторон, а каждая его чёрная клетка имеет $d'|\langle r \rangle|$ сторон, где n — сложность атома Y , d — число сторон любой его белой клетки, а d' — число сторон любой его чёрной клетки. Здесь числом сторон двумерной клетки называется количество ребер, инцидентных этой клетке.

Доказательство Теоремы 4.15. Пусть $f_1: X_1 \rightarrow Y$ — симметричное разветвлённое накрытие, изоморфное f (возможно, совпадающее с f). Пусть $\rho_1: \pi_1(Y_0, y_0) \rightarrow H_1$ — его эпиморфизм монодромии. Согласно Определению 3.1 и Замечанию 3.2, существует изоморфизм $\lambda: H \rightarrow H_1$, такой что $\lambda\rho = \rho_1$. В частности, группа монодромии H_1 абелева и изоморфна H , а потому эпиморфизм монодромии сводится к эпиморфизму $\bar{\rho}_1: H_1(Y; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1$, и выполнено $\lambda\bar{\rho} = \bar{\rho}_1$. Значит, $\overline{\psi_{\rho_1}}(g) \circ \bar{\rho}_1 = \bar{\rho}_1 \circ (\bar{\psi}(g)) = (\lambda\bar{\rho}) \circ (\bar{\psi}(g)) = \lambda \circ (\overline{\psi_{\rho}}(g)) \circ \bar{\rho} = \lambda \circ (\overline{\psi_{\rho}}(g)) \circ \lambda^{-1} \circ \bar{\rho}_1, g \in \text{Aut}(Y)$. Из единственности сквозного действия получаем $\overline{\psi_{\rho_1}}(g) = \lambda \circ (\overline{\psi_{\rho}}(g)) \circ \lambda^{-1}, g \in \text{Aut}(Y)$. Отсюда следует, что при $H_1 = H$ набор, отвечающий согласно (A) разветвлённому накрытию f_1 , получен преобразованием (5) из набора (4). Это доказывает последнее утверждение в (A). Так как автоморфизм $\lambda \in \text{Aut}(H)$ — любой, это доказывает также последнее утверждение в (B). Докажем остальные утверждения.

(A) Докажем свойства 1–5.

3) В силу эквивариантности эпиморфизма монодромии $\bar{\rho}: H_1(Y_0; \mathbb{Z}) \rightarrow H$ (см. Следствие 4.13), для любой симметрии $h \in \text{Aut}(Y)$ и любой петли $\gamma \in \Omega(Y_0)$ выполнено

$$\overline{\psi_{\rho}}(h)(\bar{\rho}([\gamma])) = (\overline{\psi_{\rho}}(h)) \circ \bar{\rho}([\gamma]) = \bar{\rho} \circ (\bar{\psi}(h))([\gamma]) = \bar{\rho}([h \circ \gamma]) \in H. \quad (7)$$

Отсюда и из (6) получаем свойство 3: $c_k = \bar{\rho}([\gamma_k]), 1 \leq k \leq 2g$,

$$\overline{\psi_{\rho}}(h_i)(q) = \overline{\psi_{\rho}}(h_i)(\bar{\rho}([\alpha])) = \bar{\rho}([h_i \circ \alpha]), \quad 1 \leq i \leq S,$$

$$\overline{\psi_{\rho}}(h'_j)(r) = \overline{\psi_{\rho}}(h'_j)(\bar{\rho}([\beta])) = \bar{\rho}([h'_j \circ \beta]), \quad 1 \leq j \leq S'.$$

1) Так как симметрия a переводит клетку e в себя, то индуцированный автоморфизм гомологий $\psi(a) \in \text{Aut}(H_1(Y_0; \mathbb{Z}))$ сохраняет класс гомологий $[\alpha] \in H_1(Y_0; \mathbb{Z})$ петли α , т.е. $\psi(a)([\alpha]) = [a \circ \alpha] = [\alpha]$. Отсюда и из (7) имеем

$$m(q) = \overline{\psi_{\rho}}(a)(\bar{\rho}([\alpha])) = \bar{\rho}([a \circ \alpha]) = \bar{\rho}([\alpha]) = q.$$

Для доказательства второго соотношения заметим, что симметрия $ba^{-1} \in \text{Aut}(Y)$ сохраняет клетку e' (и действует на ней элементарным поворотом), а потому $[ba^{-1} \circ \beta] = \bar{\psi}(ba^{-1})([\beta]) = [\beta]$. Отсюда и из (7) имеем

$$lm^{-1}(r) = \overline{\psi_{\rho}}(ba^{-1})(\bar{\rho}([\beta])) = \bar{\rho}([ba^{-1} \circ \beta]) = \bar{\rho}([\beta]) = r.$$

4) Так как группа $H_1(Y_0; \mathbb{Z})$ порождена элементами $[h_i \circ \alpha], [h'_j \circ \beta], [\gamma_k]$ ($1 \leq i \leq S, 1 \leq j \leq S', 1 \leq k \leq 2g$), а $\bar{\rho}: H_1(Y_0; \mathbb{Z}) \rightarrow H$ — эпиморфизм, то группа H порождена элементами $\bar{\rho}([h_i \circ \alpha]) = \overline{\psi_{\rho}}(h_i)(q), \bar{\rho}([h'_j \circ \beta]) = \overline{\psi_{\rho}}(h'_j)(r), \bar{\rho}([\gamma_k]) = c_k$. Последние равенства следуют из доказанного выше свойства 3.

2) Рассмотрим ориентированные клетки $h_i(e), h'_j(e')$ как 2-цепи $h_i(e), h'_j(e') \in C_2(Y)$ на атоме $Y = (\bar{P}, K)^{\#}$ (точнее, на клеточном комплексе $(\bar{P}, K)$, см. Определение 1.4.A). Так как $h_1(e), \dots, h_S(e), h'_1(e'), \dots, h'_{S'}(e')$ — набор всех белых и всех чёрных (т.е. всех двумерных) клеток атома Y , то фундаментальный класс $[\bar{P}] \in H_2(Y) = Z_2(Y) \subset C_2(Y)$ замкнутой поверхности $\bar{P}$ равен

$$[\bar{P}] = \left[\sum_{i=1}^S h_i(e) + \sum_{j=1}^{S'} h'_j(e') \right] \in H_2(Y) = Z_2(Y).$$

Здесь $[x]$ обозначает класс гомологий 2-цикла $x \in Z_2(Y)$. Поясним, что поскольку поверхность $\bar{P}$ замкнута, то граница этой 2-цепи равна $\partial[\bar{P}] = 0 \in B_1(Y) \subset Z_1(Y_0)$. Поясним также, что 1-границы на атоме Y являются в то же время 1-циклами на поверхности Y_0 , полученной прокалыванием поверхности Y в центрах двумерных клеток. С другой стороны, так как $\partial e = \alpha$,

$\partial e' = \beta \in B_1(Y) \subset Z_1(Y_0)$, то граница слагаемого $h_i(e)$ равна $\partial(h_i(e)) = h_i \circ \alpha$, а граница слагаемого $h'_j(e')$ равна $\partial(h'_j(e')) = h'_j \circ \beta$. Поэтому из свойства 3 имеем

$$\left(\prod_{i=1}^S \overline{\psi_\rho}(h_i)(q) \right) \prod_{j=1}^{S'} \overline{\psi_\rho}(h'_j)(r) = \bar{\rho} \left(\sum_{i=1}^S [h_i \circ \alpha] + \sum_{j=1}^{S'} [h'_j \circ \beta] \right) = \bar{\rho}(\partial[\bar{P}]) = \bar{\rho}(0) = 1 \in H.$$

Здесь $[x]$ обозначает класс гомологий цикла $x \in Z_1(Y_0)$.

5) Из (7) имеем

$$\begin{aligned} m(\bar{\rho}([h_i \circ \alpha])) &= \overline{\psi_\rho}(a)(\bar{\rho}([h_i \circ \alpha])) = \bar{\rho}([a \circ h_i \circ \alpha]), \\ m(\bar{\rho}([h'_j \circ \beta])) &= \overline{\psi_\rho}(a)(\bar{\rho}([h'_j \circ \beta])) = \bar{\rho}([a \circ h'_j \circ \beta]), \\ l(\bar{\rho}([h_i \circ \alpha])) &= \overline{\psi_\rho}(b)(\bar{\rho}([h_i \circ \alpha])) = \bar{\rho}([b \circ h_i \circ \alpha]), \\ l(\bar{\rho}([h'_j \circ \beta])) &= \overline{\psi_\rho}(b)(\bar{\rho}([h'_j \circ \beta])) = \bar{\rho}([b \circ h'_j \circ \beta]), \\ m(c_k) &= \overline{\psi_\rho}(a)(\bar{\rho}([\gamma_k])) = \bar{\rho}([a \circ \gamma_k]), \quad l(c_i) = \overline{\psi_\rho}(b)(\bar{\rho}([\gamma_k])) = \bar{\rho}([b \circ \gamma_i]), \end{aligned}$$

$1 \leq i \leq S, 1 \leq j \leq S', 1 \leq k \leq 2g$.

(Б) Шаг 1. В силу свойств 3 и 4, гомоморфизм $\bar{\rho}: H_1(Y_0; \mathbb{Z}) \rightarrow H$ является эпиморфизмом. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — симметричное разветвлённое накрытие с эпиморфизмом монодромии $\bar{\rho}$, см. Определение 4.10 и (3). Пусть $\widetilde{\psi_\rho}: \text{Aut}(Y) \rightarrow \text{Aut}(H)$ — сквозное действие группы симметрий ориентированного атома Y на группе монодромии H (см. Следствие 4.13). Осталось проверить, что гомоморфизмы $\overline{\psi_\rho}, \widetilde{\psi_\rho}: \text{Aut}(Y) \rightarrow \text{Aut}(H)$ совпадают. Так как группа $\text{Aut}(Y)$ порождена симметриями a, b , то достаточно проверить, что $m := \overline{\psi_\rho}(a) = \widetilde{\psi_\rho}(a) =: \tilde{m}$ и $l := \overline{\psi_\rho}(b) = \widetilde{\psi_\rho}(b) =: \tilde{l}$. В силу свойств 3 и 4, достаточно показать, что автоморфизмы m и $\tilde{m}$ (соотв. l и $\tilde{l}$) одинаково действуют на каждом из элементов $\bar{\rho}([h_i \circ \alpha]), \bar{\rho}([h'_j \circ \beta]), c_k \in H$.

Шаг 2. Из свойства 3 для $h_i = \text{id}_Y = h'_j$, имеем (6). Поэтому, в силу (А), выполнены аналоги свойств 1–5 для $\tilde{m}, \tilde{l}, \widetilde{\psi_\rho}$.

Шаг 3. В силу свойства 5 и его аналога для $\tilde{m}$ и $\tilde{l}$ (см. шаг 2), имеем $m(\bar{\rho}([h_i \circ \alpha])) = \bar{\rho}([a \circ h_i \circ \alpha]) = \tilde{m}(\bar{\rho}([h_i \circ \alpha]))$, $m(\bar{\rho}([h'_j \circ \beta])) = \bar{\rho}([a \circ h'_j \circ \beta]) = \tilde{m}(\bar{\rho}([h'_j \circ \beta]))$, $m(c_k) = \bar{\rho}([a \circ \gamma_k]) = \tilde{m}(c_k)$;

$l(\bar{\rho}([h_i \circ \alpha])) = \bar{\rho}([b \circ h_i \circ \alpha]) = \tilde{l}(\bar{\rho}([h_i \circ \alpha]))$, $l(\bar{\rho}([h'_j \circ \beta])) = \bar{\rho}([b \circ h'_j \circ \beta]) = \tilde{l}(\bar{\rho}([h'_j \circ \beta]))$, $l(c_k) = \bar{\rho}([b \circ \gamma_k]) = \tilde{l}(c_k)$; $1 \leq i \leq S, 1 \leq j \leq S', 1 \leq k \leq 2g$. $\square$

Следствие 4.18. Пусть Y — сферический максимально симметричный ориентированный атом и H — конечная абелева группа. Тогда симметричные разветвлённые накрытия $f: X \rightarrow Y$ с группой монодромии H (см. Определение 4.10) классифицируются четверками (l, m, q, r) , состоящими из пары автоморфизмов $l, m \in \text{Aut}(H)$ и пары элементов $q, r \in H$, удовлетворяющими условиям 4–6 из Теоремы 4.15, где в условии 5 через $\bar{\rho}: H_1(Y_0; \mathbb{Z}) \rightarrow H$ обозначен гомоморфизм групп, определённый на образующих $[h_1 \circ \alpha], \dots, [h_S \circ \alpha], [h'_1 \circ \beta], \dots, [h'_{S'} \circ \beta]$ группы $H_1(Y_0; \mathbb{Z})$ формулами из свойства 3 выше, причём в условиях 3–5 $g = 0$, а элементы $c_1, \dots, c_{2g}$ и кривые $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$ отсутствуют. При этом выполнены свойства 1 и 2 из 4.15, причём $m = \overline{\psi_\rho}(a)$, $l = \overline{\psi_\rho}(b) \in \text{Aut}(H)$ — сквозные действия симметрий a, b на группе H , $q = \bar{\rho}([\alpha])$, $r = \bar{\rho}([\beta]) \in H$ — монодромии при обходе вокруг центров клеток e, e' . Выполнены формулы Замечания 4.17. $\square$

Следствие 4.19. Пусть Y — максимально симметричный ориентированный атом и H — конечная абелева группа. Симметричные разветвлённые накрытия $f: X \rightarrow Y$ над Y с группой монодромии H (см. Определение 4.10), для

которых группа H порождена элементами $\bar{\rho}([h_i \circ \alpha])$, $\bar{\rho}([h'_j \circ \beta])$, $1 \leq i \leq S$, $1 \leq j \leq S'$ (например, если Y сферический или H порождена элементом $q := \bar{\rho}([\alpha])$), а сквозное действие симметрии $a \in \text{Aut}(Y)$ на H является тождественным преобразованием $m := \bar{\psi}_\rho(a) = \text{id}_H$ (например, если H порождена элементом $q := \bar{\rho}([\alpha])$), классифицируются наборами $(l, q, r, c_1, \dots, c_{2g})$, состоящими из автоморфизма $l \in \text{Aut}(H)$ и элементов $q, r, c_1, \dots, c_{2g} \in H$, удовлетворяющими следующим условиям:

1. $l^2 = \text{id}_H$, $l(r) = r$;
2. $r^{S'} q^{S/2} (l(q))^{S/2} = 1 \in H$ при чётном S , $r^{S'} q^S = 1 \in H$ при нечётном S ;
3. три элемента $r, q, l(q)$ порождают группу H ;
4. $l = \text{id}_H$ если нет шашечного разбиения белых клеток атома Y , см. Определение 1.4.B (например, для любого сферического Y , кроме случая $S = 8$, $S' = 6$ усечённого октаэдра $Y = P_3$ и случая $S = 2t$, $S' = 2$ ориентированного атома $Y = D_{2t}$);
5. $c_i = \bar{\rho}([a \circ \gamma_i])$, $l(c_i) = \bar{\rho}([b \circ \gamma_i])$, $1 \leq i \leq 2g$,

где в последнем условии через $\bar{\rho}: H_1(Y_0; \mathbb{Z}) \rightarrow H$ обозначен гомоморфизм, определённый на образующих $[h_1 \circ \alpha], \dots, [h_S \circ \alpha]$, $[h'_1 \circ \beta], \dots, [h'_{S'} \circ \beta]$, $[\gamma_1], \dots, [\gamma_{2g}]$ группы $H_1(Y_0; \mathbb{Z})$ формулами

$$\bar{\rho}([h_i \circ \alpha]) := l^{n_i}(q), \quad \bar{\rho}([h'_j \circ \beta]) := r, \quad \bar{\rho}([\gamma_k]) := c_k, \quad (8)$$

$1 \leq i \leq S$, $1 \leq j \leq S'$, $1 \leq k \leq 2g$, и n_i равно сумме показателей степеней образующей b в каком-либо разложении элемента $h_i \in \text{Aut}(Y)$ по образующим a, b группы $\text{Aut}(Y)$, см. обозначения в 4.14.

При этом $l = \bar{\psi}_\rho(b) \in \text{Aut}(H)$ — сквозное действие симметрии b на группе H , $q = \bar{\rho}([\alpha])$ и $l(q) = \bar{\rho}([b \circ \alpha])$ — монодромии при обходе вокруг центров белых клеток, $r = \bar{\rho}([\beta])$ — монодромия при обходе вокруг центров чёрных клеток, $c_k = \bar{\rho}([\gamma_k])$ — монодромии при обходе вдоль кривых γ_k , $1 \leq k \leq 2g$, и выполнены формулы Замечания 4.17.

Доказательство. Шаг 1. Покажем сначала, что для любого $l \in \text{Aut}(H)$, удовлетворяющего $l^2 = \text{id}_H$ и условию 4 настоящего следствия, существует гомоморфизм $\bar{\psi}_\rho: \text{Aut}(Y) \rightarrow \text{Aut}(H)$, определённый на образующих a, b группы $\text{Aut}(Y)$ формулами $\bar{\psi}_\rho(a) = \text{id}_H$, $\bar{\psi}_\rho(b) = l$, см. обозначения в 4.14. Отсюда будет, в частности, следовать, что для любой симметрии $g \in \text{Aut}(Y)$ и любого разложения g в композицию образующих a, b группы $\text{Aut}(Y)$ и их обратных, выполнено $\bar{\psi}_\rho(g) = l^n \in \{\text{id}_H, l\}$, где $n \in \mathbb{Z}$ равно сумме показателей степеней образующей b в данном разложении. При $l = \text{id}_H$ утверждение очевидно. Пусть $l \neq \text{id}_H$, а потому имеется шашечное разбиение белых клеток, см. Определение 1.4.B (по условию 4 настоящего следствия). Рассмотрим ориентированную хордовую диаграмму ориентированного атома Y , построенную по белым клеткам, см. Определение 1.6. Существование шашечного разбиения белых клеток означает, что множество несущих окружностей хордовой диаграммы можно разбить на два подмножества так, что любая хорда соединяет окружности разных подмножеств. Так как любая симметрия $g \in \text{Aut}(Y)$ сохраняет шашечное разбиение, она переводит каждое из подмножеств либо в себя, либо в другое подмножество. Определим отображение $\varphi: \text{Aut}(Y) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ формулой $\varphi(g) := 0$ в первом случае, и $\varphi(g) := 1$ во втором случае, $g \in \text{Aut}(Y)$. Очевидно, φ — гомоморфизм, причём $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 1$ (так как при индуцированном действии $\text{Aut}(Y)$ на хордовой диаграмме симметрия a сохраняет окружность, отвечающую клетке

e , а симметрия b переводит в себя хорду, отвечающую вершине A , и переставляет местами концы этой хорды). Определим отображение $I: \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Aut}(H)$ формулой $I(0) := \text{id}_H$, $I(1) := l$, оно является гомоморфизмом в силу условия $l^2 = \text{id}_H$. Положим $\bar{\psi}_\rho := I \circ \varphi$. Тогда $\bar{\psi}_\rho(a) = I(\varphi(a)) = I(0) = \text{id}_H$, $\bar{\psi}_\rho(b) = I(\varphi(b)) = I(1) = l$ и $\bar{\psi}_\rho(\text{Aut}(Y)) = \{\text{id}_H, l\}$.

Шаг 2. Аналогично (8), для любой белой клетки $h_i(e)$ (соотв. чёрной клетки $h'_j(e')$) атома Y фиксируем какое-либо разложение симметрии $h_i \in \text{Aut}(Y)$ (соотв. $h'_j \in \text{Aut}(Y)$) по образующим a, b , и пусть n_i (соотв. n'_j) равно сумме показателей степеней образующей b в данном разложении, см. обозначения в 4.14, $1 \leq i \leq S$, $1 \leq j \leq S'$.

Пусть $(l, m = \text{id}_H, q, r, c_1, \dots, c_{2g})$ удовлетворяет условиям 4–6 из Теоремы 4.15. Тогда, в силу Теоремы 4.15, выполнены и остальные свойства из этой теоремы. Покажем, что $(l, q, r, c_1, \dots, c_{2g})$ удовлетворяет условиям 1–5 настоящего следствия.

1) Имеем $l^2 = \text{id}_H$ из свойства 6 Теоремы 4.15, а $l(r) = r$ из свойства 1 Теоремы 4.15.

5) Из свойства 5 в Теореме 4.15 получаем условие 5 настоящего следствия.

3) По свойству 6 Теоремы 4.15 имеется гомоморфизм $\bar{\psi}_\rho: \text{Aut}(Y) \rightarrow \text{Aut}(H)$ со свойствами $\bar{\psi}_\rho(a) = \text{id}_H$ и $\bar{\psi}_\rho(b) = l$. Пусть $\bar{\rho}: H_1(Y_0; \mathbb{Z}) \rightarrow H$ — гомоморфизм, определённый на образующих $[h_1 \circ \alpha], \dots, [h_S \circ \alpha], [h'_1 \circ \beta], \dots, [h'_{S'} \circ \beta], [\gamma_1], \dots, [\gamma_{2g}]$ группы $H_1(Y_0; \mathbb{Z})$ формулами из свойства 3 Теоремы 4.15 (а потому удовлетворяют (8)). По предположению настоящего следствия группа H порождена элементами $\bar{\psi}_\rho(h_i)(q) = l^{n_i}(q)$, $\bar{\psi}_\rho(h'_j)(r) = l^{n'_j}(r)$, $1 \leq i \leq S$, $1 \leq j \leq S'$. Вместе с доказанным выше условием 1 настоящего следствия это показывает, что элементы $q, l(q), r = l(r) \in H$ порождают группу H .

4) Предположим, что $l \neq \text{id}_H$. Тогда $l(q) \neq q$, поскольку при $l(q) = q$ группа H порождена элементами q, r в силу доказанного выше условия 3 настоящего следствия, а потому свойства $l(r) = r$ и $l(q) = q$ дают $l = \text{id}_H$. Так как вершины клетки e имеют вид $A_k = a^k(A)$, $k \in \mathbb{Z}$, то вершины клетки $h_i(e)$ имеют вид $A'_k = h_i(a^k(A))$, $k \in \mathbb{Z}$. Так как A — общая вершина белых клеток $e, b(e)$, то $A'_k = h_i(a^k(A))$ — общая вершина белых клеток $h_i(a^k(e)) = h_i(e)$ и $h_i(a^k(b(e))) =: h_{i'}(e)$ (для некоторого $i' \in [1; S]$). Отметим, что $h_{i'}^{-1} \circ h_i \circ a^k \circ b(e) = e$, а потому $h_{i'}^{-1} \circ h_i \circ a^k \circ b = a^p$ для некоторого $p \in \mathbb{Z}$, откуда $h_{i'} = h_i \circ a^k \circ b \circ a^{-p}$. Поэтому $\bar{\psi}_\rho(h_{i'}) = (\bar{\psi}_\rho(h_i)) \circ l = l \circ (\bar{\psi}_\rho(h_i))$ (в силу абелевости подгруппы $\bar{\psi}_\rho(\text{Aut}(Y)) = \{\text{id}_H, l\} \simeq \mathbb{Z}_2$). Отсюда и из условия $l^2 = \text{id}_H$ следует, что элементы $\bar{\psi}_\rho(h_i)(q) = l^{n_i}(q)$ и $\bar{\psi}_\rho(h_{i'})(q) = l(\bar{\psi}_\rho(h_i)(q)) = l(l^{n_i}(q))$ оба принадлежат множеству $\{q, l(q)\}$ и различны (в силу $l(q) \neq q$, см. выше). Поэтому сопоставление любой белой клетке $h_i(e)$ элемента $\bar{\psi}_\rho(h_i)(q) = l^{n_i}(q) \in \{q, l(q)\} \subset H$ определяет шашечное разбиение белых клеток атома Y , см. Определение 1.4.В. При этом $\bar{\psi}_\rho = I \circ \varphi$, где φ, I — гомоморфизмы из шага 1.

2) В силу свойства 2 в Теореме 4.15 и доказанного выше условия 1 настоящего следствия, имеем $\left(\prod_{i=1}^S l^{n_i}(q)\right) \prod_{j=1}^{S'} r = 1 \in H$. Если $l = \text{id}_H$, то последнее равенство даёт $q^S r^{S'} = 1 \in H$. Если при этом S чётно, то последнее равенство равносильно равенству $q^{S/2} (l(q))^{S/2} r^{S'} = 1 \in H$. Пусть $l \neq \text{id}_H$. Тогда, по доказательству условия 4 выше, сопоставление любой белой клетке $h_i(e)$ элемента $\bar{\psi}_\rho(h_i)(q) = l^{n_i}(q) \in \{q, l(q)\}$ даёт шашечное разбиение белых клеток атома Y , $1 \leq i \leq S$. Значит, по доказанному на шаге 1, симметрия b осуществляет биекцию между множеством белых клеток $h_i(e)$ со свойством $\bar{\psi}_\rho(h_i)(q) = l^{n_i}(q) = q$ и множеством белых клеток $h_{i'}(e)$ со свойством $\bar{\psi}_\rho(h_{i'})(q) = l^{n_{i'}}(q) = l(q)$, $1 \leq i \leq S$, откуда S чётно и указанные множества состоят из одинакового количества $\frac{S}{2}$ белых клеток. Поэтому приведённое выше равенство даёт $q^{S/2} (l(q))^{S/2} r^{S'} = 1 \in H$.

Шаг 3. Пусть теперь набор $(l, q, r, c_1, \dots, c_{2g})$ удовлетворяет условиям 1–5

настоящего следствия. Докажем, что набор $(l, m = \text{id}_H, q, r, c_1, \dots, c_{2g})$ удовлетворяет условиям 4–6 из Теоремы 4.15. Отсюда, в силу Теоремы 4.15(Б), будут автоматически следовать остальные свойства из этой теоремы.

6) Условие 6 Теоремы 4.15 вытекает из условий 1 и 4 настоящего следствия, как показано на шаге 1. Поэтому существует гомоморфизм $\overline{\psi}_\rho: \text{Aut}(Y) \rightarrow \text{Aut}(H)$, такой, что для любой симметрии $g \in \text{Aut}(Y)$ и любого разложения элемента g по образующим a, b группы $\text{Aut}(Y)$ выполнено $\overline{\psi}_\rho(g) = l^n$, где $n \in \mathbb{Z}$ равно сумме показателей степеней образующей b в данном разложении. При этом из $l^2 = \text{id}$ и $\overline{\psi}_\rho(b) = l$ имеем $\overline{\psi}_\rho(\text{Aut}(Y)) = \{\text{id}_H, l\} \subset \text{Aut}(H)$.

5) Пусть $\bar{\rho}: H_1(Y_0; \mathbb{Z}) \rightarrow H$ — гомоморфизм, определённый на образующих $[h_1 \circ \alpha], \dots, [h_S \circ \alpha], [h'_1 \circ \beta], \dots, [h'_{S'} \circ \beta], [\gamma_1], \dots, [\gamma_{2g}]$ группы $H_1(Y_0; \mathbb{Z})$ формулами (8). Тогда выполнены формулы из свойства 3 Теоремы 4.15, в силу доказанных выше формул $\overline{\psi}_\rho(h_i)(q) = l^{n_i}(q)$ и $\overline{\psi}_\rho(h'_j)(r) = l^{n'_j}(r)$ и условия $l(r) = r$ (по условию 1 настоящего следствия). Требуемое условие эквивариантности для $c_1, \dots, c_{2g}$ следует из условия 5 настоящего следствия. Так как $m = \text{id}_H$ и $\bar{\rho}([h'_j \circ \beta]) := \overline{\psi}_\rho(h'_j)(r) = r = l(r)$, см. выше, то получаем требуемые условия эквивариантности для $1 \leq j \leq S'$. Если $l = \text{id}_H$, то $\bar{\rho}([h_i \circ \alpha]) := \overline{\psi}_\rho(h_i)(q) = l^{n_i}(q) = q = l(q)$, откуда получаем требуемые условия эквивариантности для $1 \leq i \leq S$. Пусть теперь $l \neq \text{id}_H$, а потому $l(q) \neq q$ (см. доказательство свойства 4 на шаге 2 выше). На шаге 1 мы показали, что сопоставление любой белой клетке $h_i(e)$ атома Y автоморфизма $\overline{\psi}_\rho(h_i) \in \{\text{id}_H, l\} \subset \text{Aut}(H)$ задаёт шашечное разбиение белых клеток. Поэтому сопоставление любой белой клетке $h_i(e)$ элемента $\bar{\rho}([h_i \circ \alpha]) := \overline{\psi}_\rho(h_i)(q) = l^{n_i}(q) \in \{q, l(q)\} \subset H$ тоже задаёт шашечное разбиение белых клеток. При этом симметрия a переводит множество всех белых клеток $h_i(e)$ со свойством $\bar{\rho}([h_i \circ \alpha]) = q$ в себя, а множество всех белых клеток $h_{i'}(e)$ со свойством $\bar{\rho}([h_{i'} \circ \alpha]) = l(q)$ в себя (см. шаг 1). Поэтому $\bar{\rho}([a \circ h_i \circ \alpha]) = \bar{\rho}([h_i \circ \alpha])$, $1 \leq i \leq S$. На шаге 1 мы также показали, что симметрия b переставляет эти два множества, откуда $\bar{\rho}([b \circ h_i \circ \alpha]) = l(\bar{\rho}([h_i \circ \alpha]))$, $1 \leq i \leq S$.

4) По построению гомоморфизма $\overline{\psi}_\rho$ (см. доказанное выше условие 6 из Теоремы 4.15) и условию $l(r) = r$, имеем $\overline{\psi}_\rho(h'_j)(r) = r$, $1 \leq j \leq S'$. По доказанному в предыдущем пункте, множество элементов $\overline{\psi}_\rho(h_i)(q) \in \{q, l(q)\}$, $1 \leq i \leq S$, совпадает с $\{q, l(q)\}$. По условию 3 настоящего следствия, элементы $q, l(q), r$ порождают группу H . Это даёт требуемое свойство 4 Теоремы 4.15. $\square$

5 Прimitивные максимально симметричные атомы и отображения примитивизации

В данном параграфе ориентированный атом тоже понимается как оснащённая пара $(\bar{P}, K)^\#$, см. Замечание 1.8.

Пусть X — максимально симметричный ориентированный атом. Фиксируем некоторый тип двумерных клеток атома (для определённости, выделим белые клетки).

Определение 5.1. Максимально симметричный ориентированный атом X назовем *примитивным*, если выполнено одно из двух условий:

- атом содержит не менее двух белых клеток, и любые две его различных белых клетки имеют не более одной общей вершины;
- в атоме есть лишь одна белая клетка, и атом неприводим, см. Определение 3.5.

Пример 5.2. Максимально симметричные ориентированные атомы следующих классов изоморфности (см. Введение) примитивны:

- (сферические) P_i , $1 \leq i \leq 5$, $A_1 = D_1$, $B_1 = C_1$, D_n при $n > 2$;
- (торические) $T_{(1,0)}^\square = A_2$, $T_{(s,t)}^\square$ и $T_{(s,t)}^\blacktriangle$ при $s + t > 2$, $T_{(s,t)}^\triangle$ при $s + t > 1$;
- P_6 , A_{2^l} при $l \geq 2$.

Остальные сферические и торические максимально симметричные ориентированные атомы (включая остальные атомы классов C_n, D_n), и все остальные атомы классов A_n, B_n (рода $g \geq 2$) непримитивны:

- (сферические) $B_2 = C_2 = D_2$, C_n при $n > 2$;
- (торические) $T_{(1,1)}^\square = B_4$, $T_{(2,0)}^\square$, $T_{(1,0)}^\triangle = B_3$, $T_{(1,0)}^\blacktriangle = A_3$, $T_{(1,1)}^\blacktriangle$, $T_{(2,0)}^\blacktriangle$;
- A_n при $n > 3$ и $n \notin \{2^l \mid l \in \mathbb{N}\}$, B_n при $n > 4$.

Пусть ориентированный атом X не является примитивным и содержит не менее двух белых клеток. Возьмём некоторую белую клетку $e \subset X$ и пусть $a \in \text{Aut}(X)$ — элементарный поворот клетки e . Занумеруем вершины клетки e в циклическом порядке: $A_0, \dots, A_{d-1}$, тогда $a(A_i) = A_{i+1}$. Пусть e_i — белая клетка, примыкающая к клетке e в i -ой вершине. Так как атом не примитивен, то $e_0 = e_q$ для некоторого $0 < q \leq d-1$. В силу симметричности, $e_i = e_{i+q}$ для всех i . Можно считать, что q — наименьший положительный период, так что $d = kq$. Рассмотрим преобразование $a^q \in \text{Aut}(X)$. Так как $a^q(e) = e$ и $a^q(e_i) = e_i$, то a^q есть вращение клетки e_i . Порядок элемента a^q равен k , следовательно, $a^q = (a_i^q)^{l_i}$, где $a_i \in \text{Aut}(X)$ — элементарный поворот клетки e_i , а l_i — некоторое число, взаимно простое с k . Из-за симметричности $l_0 \equiv \dots \equiv l_{q-1} \equiv l \pmod{k}$. Аналогично, $a_i^q = (a^q)^{l_i}$, откуда

$$l^2 \equiv 1 \pmod{k}.$$

Заметим, что равенство $(a')^q = (a'')^{ql}$ выполнено для любых двух смежных белых клеток e' и e'' (см. Определение 1.4.В). Поскольку X связно, рассуждая по индукции, мы получаем, что $(a')^q = a^q$ либо $(a')^q = a^{ql}$ для любой клетки $e' \subset X$.

Рассмотрим циклическую подгруппу $H = \langle a^q \rangle \subset \text{Aut}(X)$. Пусть $g \in \text{Aut}(X)$ и $g(e) = e'$. Тогда $gag^{-1} = a'$ и $ga^qg^{-1} = (a')^q$, что равно a^q либо $(a^q)^l$. Следовательно, $gHg^{-1} = H$, т.е. H — нормальная подгруппа. Так как элементы подгруппы H действуют как вращения на каждой белой клетке и поэтому не оставляют никакую вершину неподвижной, то H действует свободно на вершинах. Таким образом, мы можем рассмотреть симметричное разветвлённое накрытие

$$p_X: X \rightarrow X/H.$$

Для любого разложения $k = k_1k_2$, где $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, рассмотрим циклическую подгруппу $H_1 = \langle a^{k_2q} \rangle \subset H$ порядка k_1 . Приведённое выше рассуждение показывает, что подгруппа H_1 нормальна в $\text{Aut}(X)$. Следовательно, мы можем рассмотреть симметричное разветвлённое накрытие $p_{X,k_1}: X \rightarrow X/H_1$.

Определение 5.3. Назовём разветвлённое накрытие $X \rightarrow Y$ *отображением примитивизации*, если оно является композицией разветвлённого накрытия p_X и изоморфизма $X/H \rightarrow Y$, а ориентированный атом $X_{\text{prim}} = Y$ назовём *примитивизацией* ориентированного атома X . Назовём разветвлённое накрытие $X \rightarrow Y$ *отображением типа примитивизации*, если оно является композицией разветвлённого накрытия p_{X,k_1} и изоморфизма $X/H_1 \rightarrow Y$.

Пример 5.4. Для непримитивных ориентированных атомов из примера 5.2 (кроме атомов серии A_n с ровно одной белой клеткой) примитивизации образуют следующие 4 класса примитивных ориентированных атомов:

- (примитивизация непримитивных сферических атомов) $(B_2)_{\text{prim}} = (C_2)_{\text{prim}} = (D_2)_{\text{prim}} = (C_n)_{\text{prim}} = B_1 = C_1$ при $n > 2$,
- (примитивизации непримитивных торических атомов) $(T_{(1,1)}^\square)_{\text{prim}} = (B_4)_{\text{prim}} = (T_{(1,0)}^\Delta)_{\text{prim}} = (B_3)_{\text{prim}} = B_1 = C_1$, $(T_{(2,0)}^\square)_{\text{prim}} = D_4$, $(T_{(1,1)}^\Delta)_{\text{prim}} = D_3$, $(T_{(2,0)}^\Delta)_{\text{prim}} = P_1$;
- $(B_n)_{\text{prim}} = B_1 = C_1$ при $n > 4$.

Утверждение 5.5. Пусть X — максимально симметричный ориентированный атом, содержащий не менее двух белых клеток. Тогда

1. X_{prim} — примитивный максимально симметричный ориентированный атом;
2. если $f: X \rightarrow Y$ — симметричное разветвлённое накрытие и Y примитивен, то существует единственный морфизм $\bar{f}: X_{\text{prim}} \rightarrow Y$, такой что $f = \bar{f} \circ p_X$;
3. морфизм $f: X \rightarrow Y$ является отображением примитивизации тогда и только тогда, когда f является отображением типа примитивизации и Y примитивен.

Доказательство. 1. Пусть атом $X_{\text{prim}} = X/H$ не примитивен. Тогда в X_{prim} найдутся две двумерные белые клетки e'_1 и e'_2 , имеющие более одной общей вершины. Это означает, что существует нетривиальная симметрия $\bar{g} \in \text{Aut}(X_{\text{prim}})$, такая что $\bar{g}(e'_i) = e'_i$, $i = 1, 2$. Прообразом клеток e'_1 , e'_2 при отображении f будут соответственно двумерные белые клетки e_1 и e_2 атома X . Согласно Следствию 4.3, существует симметрия g атома X , удовлетворяющая условию $\bar{g} \circ f = f \circ g$. Так как $f \circ g(e_i) = e'_i$, то $g(e_i) = e_i$, $i = 1, 2$. Значит, g имеет вид $g = a^p$, где $a \in \text{Aut}(X)$ — элементарный поворот клетки e_1 . При этом $a^p \notin H = \langle a^q \rangle$, так как симметрия $\bar{g}$ нетривиальна. Следовательно, p не делится на q и $p = sq + t$, где $0 < t < q$. Тогда $a^t(e_i) = e_i$, $i = 1, 2$, что противоречит определению q как наименьшего положительного периода.

2. Рассмотрим в атоме X двумерные белые клетки e_1 и e_2 имеющие общую вершину A . Пусть $e'_i = f(e_i)$ — соответствующие двумерные клетки атома Y . Они также имеют общую вершину $A' = f(A)$, и других общих вершин у них нет, так как Y примитивен. Рассмотрим произвольную симметрию $g \in H$. Тогда по пункту 7 Утверждения 3.3 существует симметрия $g' \in \text{Aut}(Y)$, такая что $g' \circ f = f \circ g$. Так как $g(e_i) = e_i$, то $g'(e'_i) = e'_i$, $i = 1, 2$. При этом общая вершина A' клеток e'_1 и e'_2 должна перейти в общую вершину этих же клеток, значит, $g'(A') = A'$. Следовательно, $g' = \text{id}$, то есть $f = f \circ g$. Таким образом, отображение f можно “пропустить” через факторпространство X/H , иными словами, f разлагается в композицию $f = \bar{f} \circ p_X$, что и требовалось доказать.

3. Необходимость вытекает из определения примитивизации и первого пункта данного утверждения. Проверим достаточность. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — отображение типа примитивизации, и атом Y примитивен. Так как Y изоморфно X/H_1 , $H_1 \subset H$, то существует симметричное разветвлённое накрытие $g: Y \rightarrow X/H = X_{\text{prim}}$. С другой стороны, по второму пункту данного утверждения имеется симметричное разветвлённое накрытие $\bar{f}: X_{\text{prim}} \rightarrow Y$. Так как любое симметричное разветвлённое накрытие максимально симметричного атома над собой есть его симметрия, то отсюда следует, что Y и X_{prim} изоморфны. $\square$

Следствие 5.6. Максимально симметричные ориентированные атомы X и Y , содержащие не менее двух белых клеток, изоморфны тогда и только тогда,

когда изоморфны ориентированные атомы X_{prim} и Y_{prim} и изоморфны отображения примитивизации p_X и p_Y .

Доказательство. 1. Пусть имеется изоморфизм атомов $f: X \rightarrow Y$. В силу пункта 2 предыдущего утверждения, существует симметричное разветвлённое накрытие $\bar{f}: X_{\text{prim}} \rightarrow Y_{\text{prim}}$, удовлетворяющее условию $\bar{f} \circ p_X = p_Y \circ f$. По тем же причинам существует симметричное разветвлённое накрытие $\bar{f}^{-1}: Y_{\text{prim}} \rightarrow X_{\text{prim}}$, удовлетворяющее условию $\bar{f}^{-1} \circ p_Y = p_X \circ f^{-1}$. Тогда $\bar{f}^{-1} = \bar{f}^{-1}$, атомы X_{prim} и Y_{prim} изоморфны, как и отображения примитивизации p_X и p_Y .

2. Изоморфизм атомов X и Y немедленно следует из изоморфизма разветвлённых накрытий p_X и p_Y . $\square$

Следствие 5.7. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — симметричное разветвлённое накрытие. Следующие условия равносильны:

- f является отображением типа примитивизации;
- монодромия $\rho([\alpha])$ при обходе вокруг центра белой двумерной клетки является образующей группы H (в частности, группа монодромии H разветвлённого накрытия является циклической);
- порядок ветвления в центре любой белой клетки равен кратности разветвлённого накрытия f .

Доказательство. Докажем сначала равносильность первого и второго условий. Из первого условия следует второе, согласно Определению 5.3. Покажем, что из второго условия следует первое. Возьмём двумерную белую клетку e атома Y . Пусть $A_1, \dots, A_d$ — её вершины (в циклическом порядке). Возьмём в X двумерную клетку e' , такую что $f(e') = e$. Пусть $A'_1, \dots, A'_m$ — вершины клетки e' в циклическом порядке, причём $f(A'_1) = A_1$. Тогда $f(A'_i) = A_j$, где j — остаток деления i на d ($j = d$, если i делится на d). Рассматривая элемент $\rho([\alpha])$ как симметрию атома X , мы получаем, что $\rho([\alpha])(A'_i) = A'_{i+d}$. Так как порядок элемента $\rho([\alpha])$ равен порядку группы H , т.е. кратности накрытия, то $A'_i = A'_{i+k_1d}$, где $k_1 = |H|$, следовательно, $m = k_1d$. Иными словами, симметрия $\rho([\alpha])$ действует на клетке e' как вращение. Следовательно, $h(e') = e'$ для любого элемента $h \in H$. Рассмотрим произвольную двумерную белую клетку e'' атома X . Тогда существует симметрия $g \in \text{Aut}(X)$, такая что $g(e'') = e'$. Для любого $h \in H$ имеем

$$h(e'') = hg^{-1}(e') = g^{-1}(ghg^{-1})(e') = g^{-1}(e') = e'',$$

где равенство $ghg^{-1}(e') = e'$ следует из нормальности H как подгруппы $\text{Aut}(X)$. Таким образом, каждый элемент группы H действует как вращение на каждой белой клетке атома X , в частности это верно для симметрии $\rho([\alpha])$. Значит, $\rho([\alpha]) = (a')^{k_2q}$, где a' — симметрия, действующая как элементарный поворот клетки e' , q — минимальная положительная степень, такая что $(a')^q$ оставляет белые клетки атома X на месте. Тогда $H = \langle (a')^{k_2q} \rangle$, значит, отображение f изоморфно отображению типа примитивизации p_{X,k_1} . Если атом Y примитивен, то f есть отображение примитивизации по пункту 3 Утверждения 5.5. Таким образом, первое и второе условия равносильны.

Если монодромия $\rho([\alpha])$ при обходе вокруг центра белой двумерной клетки является образующей группы H , то регулярное действие $\rho([\alpha])$ на H имеет единственную орбиту. Это означает, что действие элемента $\rho([\alpha])$ на любом слое накрытия также имеет единственную орбиту. С другой стороны, мощность орбит относительно действия $\rho([\alpha])$ в слоях над точками, близкими к центру белой клетки, равны порядкам ветвлений в центре белой клетки. Тот факт, что порядок ветвления в центре любой белой клетки равен кратности разветвлённого

накрытия f , означает, что в центре белой клетки есть только одно ветвление и его порядок равен порядку группы монодромии. Таким образом, второе и третье условия следствия равносильны. $\square$

Утверждение 5.8. Пусть X — примитивный максимально симметричный ориентированный атом. Тогда

- (А) любые его белая и чёрная клетки имеют не более одного общего ребра;
- (Б) если две белые клетки $e_1, e_2 \subset X$ являются смежными (см. Определение 1.4.В) и инвариантны при некоторой симметрии $g \in \text{Aut}(X)$, т.е. $g(e_1) = e_1$ и $g(e_2) = e_2$, то $g = \text{id}_X$.

Доказательство. (А) Предположим, что ориентированный атом X имеет белую клетку $e \subset X$ и чёрную клетку $e' \subset X$, имеющие более одного общего ребра. Пусть $a \in \text{Aut}(X)$ — элементарный поворот клетки e . Занумеруем вершины клетки e в циклическом порядке: $A_0, \dots, A_{d-1}$, так что чёрная клетка e' содержит ребро A_0A_1 . Пусть e_i — белая клетка, примыкающая к клетке e в i -ой вершине, и пусть e'_i — чёрная клетка, примыкающая к клетке e по ребру A_iA_{i+1} , тогда $a(A_i) = A_{i+1}$ и $e' = e'_0$. Так как клетки e и e'_0 имеют более одного общего ребра, то $e'_0 = e'_q$ для некоторого $0 < q \leq d-1$. В силу симметричности атома, $e'_i = e'_{i+q}$ для всех i . Можно считать, что q — наименьший положительный период, так что $d = kq$. Итак, симметрия a^q оставляет на месте белую клетку e и все смежные с ней чёрные клетки $e'_0, \dots, e'_{d-1}$. Аналогично доказывается, что a^q оставляет на месте все белые клетки, смежные с чёрной клеткой e'_0 , и, в частности, белую клетку e_0 . Поэтому $e_0 = a^q(e_0) = e_q$, что противоречит примитивности атома X .

(Б) Так как симметрия g оставляет на месте две смежные белые клетки e_1, e_2 , то она оставляет на месте единственную (в силу примитивности атома X) общую вершину этих клеток, а потому и полурёбра, примыкающие к этой вершине. Следовательно, $g = \text{id}_X$ по Утверждению 2.5. $\square$

Замечание 5.9. Пусть X — примитивный максимально симметричный ориентированный атом, и пусть его чёрные клетки являются d' -угольниками. Пусть $\hat{\Gamma}$ — его граф смежности белых клеток, см. Определение 1.4.В. По определению, граф $\hat{\Gamma}$ не имеет петель и кратных рёбер, а также связан в силу связности атома. Пусть e' — некоторая чёрная клетка, и пусть $c \in \text{Aut}(X)$ — элементарный поворот клетки e' . Занумеруем вершины клетки e' в циклическом порядке: $B_0, \dots, B_{d'-1}$, так что $c(B_i) = B_{i+1}$. Пусть e_i — белая клетка, примыкающая к клетке e' по ребру $B_iB_{i+1} \subset \partial e'$. Тогда белые клетки $e_0, \dots, e_{d'-1}$ различны в силу Утверждения 5.8.А. Рассмотрим на графе $\hat{\Gamma}$ цикл Z длины d' , последовательно проходящий через вершины, отвечающие клеткам $e_0, \dots, e_{d'-1}$ в данном циклическом порядке. Если $d' = 1$, то $X = A_1 = D_1$ имеет одну белую клетку, что противоречит примитивности атома X . Если $d' = 2$, то $X = C_1$ имеет две белых клетки, откуда $S = 2$ и $\hat{\Gamma} = K_2$ — отрезок, а Z — единственный цикл длины 2 на этом графе. Если $d' \geq 3$, то цикл Z является простым (т.е. не имеет самопересечений, поскольку все его вершины различны), граф $\hat{\Gamma}$ имеет $S \geq d' \geq 3$ вершин, и любая его вершина имеет степень $d \geq 2$, причём при $d = 2$ выполнено $X = D_S$, $S = d'$ и $\hat{\Gamma} = Z = O_S$.

6 Классификация максимально симметричных атомов с данной примитивизацией

Начиная с данного параграфа, во всех утверждениях под ориентированным атомом понимается класс изоморфности оснащённой пары $(\bar{P}, K)^\#$, а во всех

доказательствах он понимается как оснащённая пара $(\bar{P}, K)^\#$, см. Замечание 1.8.

Пусть дан примитивный максимально симметричный ориентированный атом Y (нахождению таких атомов посвящён следующий параграф). Рассмотрим задачу классификации максимально симметричных ориентированных атомов X , таких что X_{prim} изоморфен Y . Как в 4.14, пусть $e \subset Y$ — некоторая белая двумерная клетка, $A \in \bar{e}$ — её вершина, $e' \subset Y$ — чёрная клетка, смежная с клеткой e в вершине A (см. Определение 1.4.B). Обозначим $a \in \text{Aut}(Y)$ — элементарное вращение клетки e , $b \in \text{Aut}(Y)$ — центральная симметрия в вершине A . Пусть Y_0 — пространство, получаемое из Y выкалыванием центров двумерных клеток, $[\alpha] \in H_1(Y_0; \mathbb{Z})$ — класс гомологий положительно ориентированной петли α вокруг центра клетки e , $[\beta] \in H_1(Y_0; \mathbb{Z})$ — вокруг центра клетки e' .

В силу Следствий 4.13, 4.19 и 5.7, атомы X классифицируются эквивариантными эпиморфизмами

$$\bar{\rho}: H_1(Y_0; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}_k = \mathbb{Z}/(k\mathbb{Z}),$$

такими что $\bar{\rho}([\alpha]) = q = 1 \in \mathbb{Z}_k$, где групповая операция в $\mathbb{Z}_k$ обозначается сложением, а эквивариантность равносильна условию $\overline{\psi_\rho}(g) \circ \bar{\rho} = \bar{\rho} \circ (\overline{\psi}(g))$ для любого $g \in \text{Aut}(Y)$, где $\overline{\psi_\rho}: \text{Aut}(Y) \rightarrow \text{Aut}(H)$ — некоторый гомоморфизм, названный выше сквозным. Достаточно проверить эквивариантность для образующих a и b , см. Следствие 4.13. Так как $\overline{\psi}(a)([\alpha]) = [\alpha]$ и $\bar{\rho}([\alpha]) = q = 1$ — образующая группы $\mathbb{Z}_k$, то $\overline{\psi_\rho}(a) = \text{id} \in \text{Aut}(\mathbb{Z}_k)$, т.е. сквозное действие поворота a на группе $\mathbb{Z}_k$ является тождественным автоморфизмом. Положим $\bar{\rho}([\beta]) = r \pmod{k}$. Сквозное действие симметрии b на группе $\mathbb{Z}_k$ имеет вид $x \mapsto lx$, $x \in \mathbb{Z}_k$, где

$$l^2 \equiv 1 \pmod{k},$$

причём $l = 1$, если нет шашечного разбиения белых клеток, см. Определение 1.4.B (т.е. есть цикл нечётной длины на графе смежности белых клеток атома Y , см. Определение 1.4.B). Так как вращения в белых клетках транзитивно действуют на множестве чёрных клеток, то все чёрные клетки имеют одинаковую монодромию $r = \bar{\rho}([\beta]) \in \mathbb{Z}_k$ при обходе вокруг центра. С другой стороны, b переводит чёрные клетки в чёрные клетки, следовательно,

$$rl \equiv r \pmod{k}.$$

Из Следствия 5.7 и Следствия 4.19 с циклической группой монодромии $H = \langle \bar{\rho}([\alpha]) \rangle \simeq \mathbb{Z}_k$, а также Замечания 4.17, получаем следующее утверждение.

Следствие 6.1. *Отображения типа примитивизации $f: X \rightarrow Y$ над (не обязательно примитивным) максимально симметричным ориентированным атомом Y рода $g \geq 0$ с $S \geq 2$ белыми и S' чёрными клетками классифицируются наборами $(k, l, r, c_1, \dots, c_{2g})$, $k \in \mathbb{N}$, $l, r, c_1, \dots, c_{2g} \in \mathbb{Z}_k$, удовлетворяющими следующим условиям:*

- $l^2 \equiv 1 \pmod{k}$, $rl \equiv r \pmod{k}$, $S'r + (l+1)S/2 \equiv 0 \pmod{k}$;
- $l = 1$ если нет шашечного разбиения белых клеток атома Y , см. Определение 1.4.B;
- $c_i = \bar{\rho}([a \circ \gamma_i])$, $lc_i = \bar{\rho}([b \circ \gamma_i])$, $1 \leq i \leq 2g$,

где в последнем условии через $\bar{\rho}: H_1(Y_0; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}_k$ обозначен гомоморфизм, определённый на образующих $[h_1 \circ \alpha], \dots, [h_S \circ \alpha]$, $[h'_1 \circ \beta], \dots, [h'_{S'} \circ \beta]$, $[\gamma_1], \dots, [\gamma_{2g}]$ группы $H_1(Y_0; \mathbb{Z})$ формулами

$$\bar{\rho}([h_i \circ \alpha]) := l^{n_i}, \quad \bar{\rho}([h'_j \circ \beta]) := r, \quad \bar{\rho}([\gamma_k]) := c_k, \quad 1 \leq i \leq S, \quad 1 \leq j \leq S', \quad 1 \leq k \leq 2g,$$

n_i равно сумме показателей степеней образующей b в каком-либо разложении элемента $h_i \in \text{Aut}(Y)$ по образующим a, b группы $\text{Aut}(Y)$, см. обозначения в 4.14. При этом k — степень разветвлённого накрытия f , порядки ветвления в центрах белых (соотв. чёрных) клеток равны k (соотв. $\frac{k}{\gcd(k,r)}$); сквозное действие $\bar{\psi}_\rho(b) \in \text{Aut}(\mathbb{Z}_k)$ симметрии $b \in \text{Aut}(Y)$ на группе $H = \mathbb{Z}_k$ совпадает с умножением на l ; $r = \bar{\rho}([\beta])$ — монодромия при обходе вокруг центров чёрных клеток; $c_1 = \bar{\rho}([\gamma_1]), \dots, c_{2g} = \bar{\rho}([\gamma_{2g}])$ — монодромии при обходе вдоль кривых $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$. Ориентированный атом X имеет род $g = \frac{kn - S - S' \gcd(k,r)}{2} + 1$, сложность kn , S белых клеток и $S' \gcd(k,r)$ чёрных клеток, причём каждая его белая клетка имеет kd сторон, а каждая его чёрная клетка имеет $\frac{d'k}{\gcd(k,r)}$ сторон, где n — сложность атома Y , d — число сторон любой его белой клетки, а d' — число сторон любой его чёрной клетки. $\square$

Следствие 6.2. *Отображения типа примитивизации $f: X \rightarrow Y$ над сферическим (не обязательно примитивным) максимально симметричным ориентированным атомом Y с $S \geq 2$ белыми и S' чёрными клетками классифицируются тройками (k, l, r) , $k \in \mathbb{N}$, $l, r \in \mathbb{Z}_k$, удовлетворяющими следующим условиям:*

- $l^2 \equiv 1 \pmod{k}$, $rl \equiv r \pmod{k}$, $S'r + (l+1)S/2 \equiv 0 \pmod{k}$;
- $l = 1$ если нет шашечного разбиения белых клеток атома Y , см. Определение 1.4.B (т.е. всегда, кроме случая $S = 8$, $S' = 6$ усечённого октаэдра $Y = P_3$ и случая $S = 2t$, $S' = 2$ ориентированного атома $Y = D_{2t}$, см. Теорему 1.13).

При этом k — степень разветвлённого накрытия f , порядки ветвления в центрах белых (соотв. чёрных) клеток равны k (соотв. $\frac{k}{\gcd(k,r)}$); сквозное действие $\bar{\psi}_\rho(b) \in \text{Aut}(\mathbb{Z}_k)$ симметрии $b \in \text{Aut}(Y)$ на группе $H = \mathbb{Z}_k$ совпадает с умножением на l ; $r = \bar{\rho}([\beta])$ — монодромия при обходе вокруг центров чёрных клеток. Род и сложность атома X , количество его белых и чёрных клеток, и количество сторон клеток определяются теми же формулами, что и в 6.1. $\square$

Пример 6.3. Рассмотрим сферический ориентированный атом D_S , см. Введение (граф смежности белых клеток у этого атома является циклом длины S , обозначаемый через O_S , причём $S = d'$ и $d = S' = 2$, см. Определение 1.4.B), где $S \geq 2$. Ориентированный атом максимально симметричен, а при $S \geq 3$ примитивен (так как он имеет $S \geq 2$ белых клеток и его граф смежности белых клеток не имеет кратных рёбер).

(А) Пусть S нечётно. Из Следствия 6.2 вытекает, что отображения примитивизации над ориентированным атомом D_S однозначно задаются кратностью $k \in \mathbb{N}$ отображения примитивизации, которая должна быть нечётной, причём $l \equiv 1 \pmod{k}$, $r \equiv \frac{k-S}{2} \pmod{k}$. Накрывающий ориентированный атом обозначим через O_S^{kS} . Ориентированная хордовая диаграмма ориентированного атома O_S^{kS} состоит из S ориентированных окружностей $S_1^1 \approx S_2^1 \approx \dots \approx S_S^1 = \{e^{i\phi} \mid 0 \leq \phi < 2\pi\}$ и $n = kS$ хорд, соединяющих пары точек $(e^{2\pi ji/k}, e^{\pi i + 2\pi ji/k}) \in S_u^1 \times S_{u+1}^1$ этих окружностей, $j \in \mathbb{Z}$, $0 \leq j < k$, $1 \leq u \leq S$, где $S_{S+1}^1 := S_1^1$. Ориентированный атом O_S^{kS} имеет род $g = \frac{k-1}{2}S - \gcd(S, \frac{k+S}{2}) + 1$, сложность kS , S белых и $2\gcd(S, \frac{k+S}{2})$ чёрных клеток, каждая его белая клетка является $2k$ -угольником, а каждая чёрная $\frac{kS}{\gcd(S, \frac{k+S}{2})}$ -угольником.

(Б) При чётном S , согласно Следствию 6.2, отображения типа примитивизации (являющиеся отображениями примитивизации при $S > 2$) над ориентированным атомом D_S однозначно задаются тройками (k, l, r) , где $k \in \mathbb{N}$ —

кратность отображения (типа) примитивизации, $l, r \in \mathbb{Z}_k$,

$$l^2 \equiv 1 \pmod{k}, \quad rl \equiv r \pmod{k}, \quad 2r + (l+1)S/2 \equiv 0 \pmod{k}.$$

Этот ориентированный атом обозначим через $O_S^{kS,l,r}$. Ориентированная хордовая диаграмма ориентированного атома $O_S^{kS,l,r}$ состоит из S ориентированных окружностей $S_1^1 \approx S_2^1 \approx \dots \approx S_S^1 = \{e^{i\phi} \mid 0 \leq \phi < 2\pi\}$ и $n = kS$ хорд, соединяющих пары точек $(e^{2\pi ji/k}, e^{\pi i/k + 2\pi lji/k}) \in S_u^1 \times S_{u+1}^1$ этих окружностей, $j \in \mathbb{Z}$, $0 \leq j < k$, $1 \leq u < S$, и $(e^{2\pi ji/k}, e^{\pi(2r+1)i/k + 2\pi lji/k}) \in S_S^1 \times S_1^1$, $j \in \mathbb{Z}$, $0 \leq j < k$. В частности, при $S = 2$ получаем (см. Утверждение 8.2)

$$O_2^{2k,l,r} = K_2^{2k,2k-2r-1}, \quad O_2^{2k,1,k-1} = B_{2k}, \quad O_2^{2k,k-1,0} = C_{2k}.$$

Действительно, указанная диаграмма имеет симметрию a , определяемую на множестве вершин диаграммы формулами

$$(1, j) \mapsto (1, j+1), \\ (u, j) \mapsto \left(S - u + 2, j - 2\lfloor \frac{u}{2} \rfloor + 1 - (2 - 2\lceil \frac{u}{2} \rceil)l - 2r \right), \quad 2 \leq u \leq S,$$

где (u, j) обозначает вершину $e^{\pi ij/k} \in S_u^1$, $0 \leq j < 2k$. Корректность определения симметрии следует из соотношений на k, l и r . На окружности S_1^1 симметрия a действует как элементарный поворот.

Аналогично, можно определить симметрию b по формулам

$$(1, j) \mapsto (2, j+1), \quad (2, j) \mapsto (1, j-1), \\ (u, j) \mapsto \left(S - u + 3, j - 2\lfloor \frac{u}{2} \rfloor + 1 - (2 - 2\lceil \frac{u}{2} \rceil)l - 2r \right), \quad 3 \leq u \leq S.$$

Симметрия b действует как центральная симметрия на хорде с концами $1 \in S_1^1$ и $e^{\pi i/k} \in S_2^1$.

По Утверждению 2.8 ориентированный атом, задаваемый данной хордовой диаграммой, будет максимально симметричным. Он имеет род $g = \frac{k-1}{2}S - \gcd(k, r) + 1$, сложность kS , S белых и $2\gcd(k, r)$ чёрных клеток, каждая его белая клетка является $2k$ -угольником, а каждая чёрная $\frac{kS}{\gcd(k, r)}$ -угольником.

Следствие 6.4. *Отображения типа примитивизации $f: X \rightarrow Y$ над (не обязательно примитивным, см. пример 5.2) торическим максимально симметричным ориентированным атомом $Y = T_{(s,t)}^\square$ квадратного типа (s, t) , $s > 0, t \geq 0$, см. Теорему 1.14, классифицируются четвёрками (k, l, r, c) , $k \in \mathbb{N}$, $l, r, c \in \mathbb{Z}_k$, удовлетворяющими в зависимости от s и t условиям:*

1. если $s + t$ нечётно, то k нечётно и

$$l = 1, \quad c = \frac{s+t+k}{2}, \quad s(r+1) \equiv 0 \pmod{k}, \quad t(r+1) \equiv 0 \pmod{k};$$

2. если s и t чётны, то

$$l^2 \equiv 1, \quad lr \equiv r, \quad 2c \equiv -(s+t)r, \quad \frac{s}{2}(2r+l+1) \equiv 0, \quad \frac{t}{2}(2r+l+1) \equiv 0,$$

где все сравнения рассматриваются по модулю k ;

3. если s и t нечётны и

(a) если k не делится на 4, то

$$l^2 \equiv 1, \quad lr \equiv r, \quad 2c \equiv -tr - 1 + \frac{s+1}{2}(l+1),$$

$$s \frac{l+1}{2}(r+1) \equiv 0, \quad t \frac{l+1}{2}(r+1) \equiv 0;$$

(b) если k делится на 4 и $s \equiv t \equiv 3 \pmod{4}$, то

$$l^2 \equiv 1, \quad lr \equiv r, \quad 2c \equiv -tr - 1 + \frac{s+1}{2}(l+1),$$

$$s \frac{l+1}{2}(r+1) \equiv 0, \quad t \frac{l+1}{2}(r+1) \equiv 0;$$

(c) если k делится на 4 и $s \equiv t \equiv 1 \pmod{4}$, то

$$l^2 \equiv 1, \quad lr \equiv r, \quad 2c \equiv -tr - 1 + \frac{s+1}{2}(l+1),$$

$$s \frac{l+1}{2}(r+1) \equiv \frac{l^2-1}{2}, \quad t \frac{l+1}{2}(r+1) \equiv \frac{l^2-1}{2};$$

(d) если k делится на 4 и $st \equiv 3 \pmod{4}$, то

$$l^2 \equiv 1, \quad lr \equiv r, \quad 2c \equiv -tr - 1 + \frac{s+1}{2}(l+1),$$

$$s \frac{l+1}{2}(r+1) \equiv 0, \quad t \frac{l+1}{2}(r+1) \equiv 0, \quad \frac{l^2-1}{2} \equiv 0.$$

При этом k — степень разветвлённого накрытия f ; r — монодромия при обходе вокруг центров чёрных клеток, s — монодромия при обходе вдоль одной из стандартных образующих тора; порядки ветвления в центрах белых (соотв. чёрных) клеток равны k (соотв. $\frac{k}{\gcd(k,r)}$). Ориентированный атом X имеет $\text{род } g = (s^2 + t^2)(k - \frac{1+\gcd(k,r)}{2}) + 1$, сложность $2k(s^2 + t^2)$, $s^2 + t^2$ белых клеток и $(s^2 + t^2)\gcd(k,r)$ чёрных клеток, причём каждая его белая клетка имеет $4k$ сторон, а каждая его чёрная клетка имеет $\frac{4k}{\gcd(k,r)}$ сторон.

Доказательство. Рассмотрим универсальное накрытие ориентированного атома $Y = (\bar{P}, K)^\#$ класса изоморфности $T_{(s,t)}^\square$. Пусть e_1, e_2 — ортонормированный базис индуцированного разбиения плоскости на белые и чёрные клетки, см. 1.4. Тогда атом Y получается в результате факторизации плоскости по группе движений, порождённой сдвигами на вектора $se_1 + te_2$ и $-te_1 + se_2$. Возьмём в качестве начала координат на плоскости центр одной из белых клеток. При этом центры белых клеток будут иметь координаты (x, y) , $x, y \in \mathbb{Z}$, центры чёрных клеток — координаты $(\frac{1}{2} + p, \frac{1}{2} + q)$, $x, y \in \mathbb{Z}$, а вершинами разбиения будут точки $(\frac{1}{2} + x, y)$, $(x, \frac{1}{2} + y)$, $x, y \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим двузвенную ломаную, проходящую через точки $U_1(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}), V_1(s + \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}), W_1(s + \frac{1}{6}, t - \frac{1}{6})$. Рассмотрим также ломаную, проходящую через точки $U_2(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}), V_2(\frac{1}{6}, s + \frac{1}{6}), W_2(-t + \frac{1}{6}, s + \frac{1}{6})$. При проекции $\xi: \mathbb{R}^2 \rightarrow Y$ ломаные $U_1V_1W_1$ и $U_2V_2W_2$ образуют замкнутые кривые γ_1, γ_2 , чьи классы гомологий являются образующими группы одномерных гомологий тора.

Согласно Следствию 6.1, отображения типа примитивизации над Y классифицируются наборами (k, l, r, c_1, c_2) , $k \in \mathbb{N}$, $l, r, c_1, c_2 \in \mathbb{Z}_k$, удовлетворяющими условиям

$$l^2 \equiv 1 \pmod{k}, \quad rl \equiv r \pmod{k}, \quad (s^2 + t^2)(r + (l+1)/2) \equiv 0 \pmod{k},$$

$$\bar{\rho}([a \circ \gamma_1]) = c_1, \quad \bar{\rho}([a \circ \gamma_2]) = c_2, \quad \bar{\rho}([b \circ \gamma_1]) = lc_1, \quad \bar{\rho}([b \circ \gamma_2]) = lc_2,$$

где $\bar{\rho}: H_1(Y_0; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}_k$ есть гомоморфизм монодромии из Следствия 6.1, $c_i = \bar{\rho}([\gamma_i])$, $i = 1, 2$, а автоморфизм $\bar{\psi}_\rho(a)$ группы гомологий в данном случае индуцирован вращением R_a плоскости (т.е. универсального накрытия атома Y) на $\pi/2$ вокруг точки $O(0, 0)$, и автоморфизм $\bar{\psi}_\rho(b)$ индуцирован центральной симметрией R_b в точке $(-1/2, 0)$.

Так как $R_a(U_1V_1W_1) = U_2V_2W_2$, то условие $\bar{\rho}([a \circ \gamma_1]) = c_1$ эквивалентно равенству

$$c_2 \equiv c_1 \pmod{k}.$$

Имеем $R_a(U_2V_2W_2) = U_3V_3W_3$, где точки U_3, V_3, W_3 имеют координаты $(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$, $(-s - \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$, $(-s - \frac{1}{6}, -t + \frac{1}{6})$, соответственно. Рассмотрим точки $V'_1(\frac{1}{6}, -t - \frac{1}{6})$, $U'_1(-s + \frac{1}{6}, -t - \frac{1}{6})$ и $Z(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6})$, $Z'(-s - \frac{1}{6}, -t - \frac{1}{6})$. Тогда $\xi(U'_1V'_1W_1) = \xi(U_1V_1W_1) = \gamma_1$ и гомологический класс в $H_1(Y_0; \mathbb{Z})$ проекции замкнутого контура $U_1ZU_3V_3W_3Z'U'_1V'_1$ равен $[a \circ \gamma_2] + [\gamma_1]$. Контур $U_1ZU_3V_3W_3Z'U'_1V'_1$ содержит st центров чёрных клеток и $(s+1)(t+1) - 1$ центров белых клеток, из которых, при наличии шашечного разбиения белых клеток (см. Определение 1.4.B), $\lfloor \frac{(s+1)(t+1)-1}{2} \rfloor$ принадлежат тому же классу, что и клетка с центром O , а $\lceil \frac{(s+1)(t+1)-1}{2} \rceil$ принадлежат другому классу. Применяя гомоморфизм $\bar{\rho}$ и учитывая равенство $\bar{\rho}([a \circ \gamma_2]) = c_2$, откуда мы получаем

$$c_1 + c_2 \equiv \left\lfloor \frac{(s+1)(t+1)-1}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{(s+1)(t+1)-1}{2} \right\rceil l + str \pmod{k}.$$

Заметим, что это равенство имеет смысл и при отсутствии шашечного разбиения белых клеток, если полагать $l = 1$.

Аналогичным образом мы находим ещё два уравнения, отражающие инвариантность накрытия относительно симметрии b :

$$(l+1)c_1 \equiv \frac{(s+2)(t+1)-2}{2}(l+1) + (s+1)tr \pmod{k},$$

$$(l+1)c_2 \equiv \frac{(s+1)(t+2)-2}{2}(l+1) + s(t+1)r \pmod{k}.$$

Вспоминая о равенстве $c_2 \equiv c_1$, мы приходим к системе уравнений

$$2c \equiv \left\lfloor \frac{(s+1)(t+1)-1}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{(s+1)(t+1)-1}{2} \right\rceil l + str \pmod{k}, \quad (9)$$

$$(l+1)c \equiv \frac{(s+2)(t+1)-2}{2}(l+1) + (s+1)tr \pmod{k}, \quad (10)$$

$$(l+1)c \equiv \frac{(s+1)(t+2)-2}{2}(l+1) + s(t+1)r \pmod{k}. \quad (11)$$

Случай 1: $s+t$ нечётно. Тогда шашечное разбиение белых клеток невозможно, поэтому $l \equiv 1$. Уравнения переписываются в виде

$$(s^2 + t^2)(r+1) \equiv 0 \pmod{k},$$

$$2c \equiv (st + s + t) + str \pmod{k},$$

$$2c \equiv (st + s + 2t) + (st + t)r \pmod{k},$$

$$2c \equiv (st + 2s + t) + (st + s)r \pmod{k}.$$

Вычитая из третьего и четвёртого уравнения второе, имеем

$$s(r+1) \equiv t(r+1) \equiv 0 \pmod{k},$$

откуда $2c \equiv s+t \pmod{k}$. Поскольку $s+t$ нечётно, то k не может быть чётным числом, и c равно вычету $\frac{s+t+k}{2}$. Параметр r равен $-1 + p_{\gcd(s,t,k)} \frac{k}{\gcd(s,t,k)}$, $0 \leq p < \gcd(s,t,k)$.

Случай 2: s, t чётны. Тогда уравнение (9) записывается как

$$2c \equiv \frac{st + s + t}{2}(l + 1) + str \pmod{k}. \quad (12)$$

Вычитая из уравнения (11) уравнение (10), получим равенство

$$\frac{s - t}{2}(l + 1 + 2r) \equiv 0.$$

Умножая равенство (12) на $l + 1$ и вычитая результат из равенства (10), умноженного на 2, получим

$$t(l + 1 + 2r) \equiv 0.$$

Здесь мы воспользовались тождествами $(l + 1)^2 \equiv 2(l + 1)$ и $(l + 1)r \equiv 2r$.

Так как s чётно, то $\frac{st}{2}(l + 1) + str \equiv 0$. Теперь мы можем свести соотношения (10), (11), (12) к равенствам

$$\begin{aligned} 2c &\equiv \frac{s + t}{2}(l + 1) \equiv -(s + t)r, \\ (l + 1)c &\equiv \frac{s + 2t}{2}(l + 1) + tr, \\ (l + 1)c &\equiv \frac{2s + t}{2}(l + 1) + sr, \end{aligned}$$

откуда c может быть равно $-\frac{s+t}{2}r$ или $-\frac{s+t}{2}r + \frac{k}{2}$ (если k чётно). В любом случае $(l - 1)c \equiv 0$. Таким образом,

$$0 \equiv (l - 1)c = (l + 1)c - 2c \equiv \frac{s + 2t}{2}(l + 1) + tr - \frac{s + t}{2}(l + 1) = \frac{t}{2}(l + 1 + 2r).$$

Следовательно, $\frac{s}{2}(l + 1 + 2r) \equiv 0$. Остаётся заметить, что из соотношений

$$l^2 \equiv 1, \quad lr \equiv r, \quad 2c \equiv -(s + t)r, \quad \frac{s}{2}(2r + l + 1) \equiv 0, \quad \frac{t}{2}(2r + l + 1) \equiv 0$$

вытекают исходные уравнения (10), (11), (12) и равенство $(s^2 + t^2)(r + (l + 1)/2) \equiv 0$.

Случай 3: s, t нечётны. Тогда уравнение (9) записывается как

$$2c \equiv \frac{st + s + t - 1}{2} + \frac{st + s + t + 1}{2}l + str \pmod{k}. \quad (13)$$

Точно так же, как в случае 2, получаем тождества

$$\frac{s - t}{2}(l + 1 + 2r) \equiv 0, \quad s(l + 1 + 2r) \equiv 0, \quad t(l + 1 + 2r) \equiv 0.$$

Используя их, переписываем соотношения (10), (11), (12) в виде

$$\begin{aligned} 2c &\equiv \frac{s + 1}{2}t(1 + l + 2r) + \frac{s - 1}{2} + \frac{s + 1}{2}l - tr \equiv \frac{s + 1}{2}(l + 1) - 1 - tr, \\ (l + 1)c &\equiv \frac{s + t}{2}(l + 1) + \frac{s + 1}{2}t(l + 1 + 2r) \equiv \frac{s + t}{2}(l + 1), \\ (l + 1)c &\equiv \frac{s + t}{2}(l + 1) + \frac{t + 1}{2}s(l + 1 + 2r) \equiv \frac{s + t}{2}(l + 1). \end{aligned}$$

Тогда $(l + 1)c \equiv \frac{l+1}{2}2c \equiv \frac{s+1}{2}\frac{l+1}{2}(l + 1) - \frac{l+1}{2}(1 + tr)$. Если $\frac{s+1}{2}$ чётно (т.е. $s \equiv 3 \pmod{4}$), то

$$\frac{s + 1}{2} \frac{l + 1}{2} (l + 1) \equiv \frac{s + 1}{4} (l + 1) (l + 1) \equiv (s + 1) \frac{l + 1}{2}.$$

Следовательно, $\frac{l+1}{2}(s+t) \equiv (l+1)c \equiv \frac{l+1}{2}(s+1-1-tr)$, откуда

$$t\frac{l+1}{2}(r+1) \equiv 0.$$

Так как $0 \equiv \frac{s-t}{2}(l+1+2r) \equiv \frac{s-t}{2}(l+1)(r+1) \equiv (s-t)\frac{l+1}{2}(r+1)$, то и

$$s\frac{l+1}{2}(r+1) \equiv 0.$$

Если $\frac{s-1}{2}$ чётно, (т.е. $s \equiv 1 \pmod{4}$), то

$$\frac{s+1}{2}\frac{l+1}{2}(l+1) \equiv \frac{s-1}{4}(l+1)(l+1) + \frac{l+1}{2}(l+1) \equiv (s+l)\frac{l+1}{2},$$

откуда

$$t\frac{l+1}{2}(r+1) \equiv \frac{l+1}{2}(l-1) \equiv \frac{l^2-1}{2}.$$

Следовательно,

$$s\frac{l+1}{2}(r+1) \equiv \frac{l^2-1}{2}.$$

Заметим, что если k не делится на 4, то всегда $\frac{l^2-1}{2} \equiv 0$. Другое замечание заключается в том, что исходные уравнения симметричны относительно замены переменных s и t . Наконец, несложно проверить, что из соотношений

$$\begin{aligned} l^2 &\equiv 1, \quad lr \equiv r, \quad 2c \equiv -tr - 1 + \frac{s+1}{2}(l+1), \\ s\frac{l+1}{2}(r+1) &\equiv t\frac{l+1}{2}(r+1) \equiv 0 \left(\text{соответственно, } \equiv \frac{l^2-1}{2} \right) \end{aligned}$$

следуют уравнения (10), (11), (12) и равенство $(s^2+t^2)(r+(l+1)/2) \equiv 0$. $\square$

Аналогичные утверждения верны для торических атомов треугольного и шестиугольного типов.

Следствие 6.5. *Отображения типа примитивизации $f: X \rightarrow Y$ над (не обязательно примитивным, см. пример 5.2) торическим максимально симметричным ориентированным атомом $Y = T_{(s,t)}^\Delta$ треугольного типа (s, t) , $s > 0$, $t \geq 0$, см. Теорему 1.14, классифицируются четвёрками (k, l, r, c) , $k \in \mathbb{N}$, $l, r, c \in \mathbb{Z}_k$, удовлетворяющими условиям:*

$$\begin{aligned} l^2 &\equiv 1, \quad lr \equiv r, \quad s(r+l+1) \equiv 0, \quad t(r+l+1) \equiv 0, \\ 3c &\equiv \frac{s^2+s+t^2+t}{2}(r+l+1) + (l-1)(s-t), \quad (l+1)c \equiv 0, \end{aligned}$$

где сравнения рассматриваются по модулю k .

Ориентированный атом X имеет род $g = (s^2 + st + t^2)\frac{3k-2-\gcd(k,r)}{2} + 1$, сложность $3k(s^2 + st + t^2)$, $2(s^2 + st + t^2)$ белых клеток и $(s^2 + st + t^2)\gcd(k, r)$ чёрных клеток, причём каждая его белая клетка имеет $3k$ сторон, а каждая его чёрная клетка имеет $\frac{6k}{\gcd(k,r)}$ сторон.

Доказательство. Рассмотрим универсальное накрытие ориентированного атома $Y = (\bar{P}, K)^\#$ класса изоморфности $T_{(s,t)}^\Delta$. Выберем на нём репер Oe_1e_2 с началом координат O в центре белой клетки индуцированного клеточного разбиения универсального накрытия и базисом e_1, e_2 , порождающим группу сдвигов, сохраняющих клеточное разбиение, причём угол между векторами базиса

равен $\frac{\pi}{3}$, см. 1.4. Тогда центры белых клеток будут иметь координаты (x, y) и $(x + \frac{1}{3}, y + \frac{1}{3})$, центры чёрных клеток — координаты $(x - \frac{1}{3}, y - \frac{1}{3})$, а вершины разбиения — координаты $(x + \frac{1}{6}, y - \frac{1}{3})$, $(x - \frac{1}{3}, y + \frac{1}{6})$ и $(x + \frac{1}{6}, y + \frac{1}{6})$, где $x, y \in \mathbb{Z}$. Атом Y получается при факторизации плоскости по группе сдвигов, порождённой векторами $se_1 + te_2$ и $-(s+t)e_1 + se_2$.

Рассмотрим ломаную, проходящую через точки $U_1(\frac{1}{20}, -\frac{1}{20})$, $V_1(s + \frac{1}{20}, -\frac{1}{20})$ и $W_1(s + \frac{1}{20}, t - \frac{1}{20})$, а также ломаную, проходящую через точки $U_2(0, \frac{1}{20})$, $V_2(-s, s + \frac{1}{20})$ и $W_2(-s - t, s + \frac{1}{20})$. При проекции на атом Y они переходят в замкнутые кривые γ_1 и γ_2 , чьи классы гомологий образуют базис группы $H_1(Y; \mathbb{Z})$.

По Следствию 6.1, отображения примитивизации над Y классифицируются наборами (k, l, r, c_1, c_2) , $k \in \mathbb{N}$, $l, r, c_1, c_2 \in \mathbb{Z}_k$, удовлетворяющими условиям

$$l^2 \equiv 1 \pmod{k}, \quad rl \equiv r \pmod{k}, \quad (s^2 + st + t^2)(r + l + 1) \equiv 0 \pmod{k}, \\ \bar{\rho}([a \circ \gamma_1]) = c_1, \quad \bar{\rho}([a \circ \gamma_2]) = c_2, \quad \bar{\rho}([b \circ \gamma_1]) = lc_1, \quad \bar{\rho}([b \circ \gamma_2]) = lc_2,$$

где в нашем случае $\bar{\rho}: H_1(Y_0; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}_k$ есть гомоморфизм монодромии из Следствия 6.1, $c_i = \bar{\rho}([\gamma_i])$, $i = 1, 2$, а автоморфизм $\bar{\psi}_\rho(a)$ группы гомологий индуцирован вращением R_a плоскости (т.е. универсального накрытия атома Y) на $2\pi/3$ вокруг точки $O(0, 0)$, и автоморфизм $\bar{\psi}_\rho(b)$ индуцирован центральной симметрией R_b в точке $(-1/3, 1/6)$.

Так как $R_a(U_1) = U_2$, $R_a(V_1) = V_2$ и $R_a(W_1) = W_2$, то $[a \circ \gamma_1] = [\gamma_2]$, и условие $\bar{\rho}([a \circ \gamma_1]) = c_1$ превращается в равенство

$$c_1 \equiv c_2 \pmod{k}.$$

Пусть $R_a(U_2V_2W_2) = U_3V_3W_3$. Тогда вершины полученной ломаной имеют координаты $U_3(-\frac{1}{20}, 0)$, $V_1(-\frac{1}{20}, -s)$ и $W_1(t - \frac{1}{20}, -s - t)$. Рассмотрим также точки $U'_1(t + \frac{1}{20}, -s - t - \frac{1}{20})$, $V'_1(s + t + \frac{1}{20}, -s - t - \frac{1}{20})$, $W'_1(s + t + \frac{1}{20}, -s - \frac{1}{20})$, $U'_2(s + t, -s + \frac{1}{20})$ и $V'_2(t, \frac{1}{20})$. При проекции ломаная $U'_1V'_1W'_1$ переходит в γ_1 , а ломаная $U_2V'_2U'_2$ — в γ_2 .

Замкнутый контур $U_1U_3V_3W_3U'_1V'_1W'_1U'_2V'_2U_2$ содержит $s^2 + 4st + t^2 + 4s + 2t$ центров белых клеток, причём $\frac{1}{2}(s^2 + 4st + t^2 + 3s + 3t)$ принадлежат тому же классу при шашечном разбиении белых клеток (см. Определение 1.4.B), что и точка O . Контур содержит $\frac{1}{2}(s^2 + 4st + t^2 - s + t)$ центров чёрных клеток. С другой стороны, гомологический класс проекции контура на проколотый атом Y_0 равен $[a \circ \gamma_2] + [\gamma_1] + [\gamma_2]$. Из равенства $\bar{\rho}([a \circ \gamma_2]) = c_2$ следует тождество

$$c_1 + 2c_2 \equiv \frac{1}{2}(s^2 + 4st + t^2 + 3s + 3t) + \frac{1}{2}(s^2 + 4st + t^2 + s - t)l + \frac{1}{2}(s^2 + 4st + t^2 - s + t)r. \quad (14)$$

Аналогичными рассуждениями мы приходим к тождествам

$$(l + 1)c_1 \equiv (st + s + t)(l + 1) + (st + t)r \pmod{k}, \quad (15)$$

$$(l + 1)c_2 \equiv (st + s)(l + 1) + str \pmod{k}. \quad (16)$$

Вычитая из уравнения (15) уравнение (16) и учитывая тождество $c_1 \equiv c_2$, мы получим соотношение

$$t(l + r + 1) \equiv 0 \pmod{k},$$

а также равенство $(l + 1)c_2 \equiv (l + 1)s$. Отсюда и равенства $(s^2 + st + t^2)(l + r + 1) \equiv 0$ вытекает, что $s^2(l + r + 1) \equiv 0$.

Умножая тождество (14) на $l + 1$, мы получим

$$3(l + 1)c_2 \equiv \left(\frac{s^2 + 4st + t^2 + 3s + 3t}{2} + \frac{s^2 + 4st + t^2 + s - t}{2} \right) (l + 1) + \\ (s^2 + 4st + t^2 - s + t)r \equiv (s^2 + 4st + t^2 + s + t)(l + r + 1) + s(l + 1) - 2sr \equiv \\ s(l + r + 1) + s(l + 1) - 2sr \equiv 2s(l + r + 1) - 3sr,$$

следовательно, $3(l+1)s \equiv 2s(l+r+1) - 3sr$, откуда

$$s(l+r+1) \equiv 0 \pmod{k}.$$

Введём обозначение $c = c_1 - s$. Тогда $(l+1)c \equiv 0 \pmod{k}$ и

$$\begin{aligned} 3c &\equiv \frac{s^2 + 4st + t^2 + s + t}{2}(l+r+1) - 2s + t - tl - sr \equiv \\ &\quad \frac{s^2 + t^2 + s + t}{2}(l+r+1) - s + t - tl + sl - s(l+r+1) \equiv \\ &\quad \frac{s^2 + t^2 + s + t}{2}(l+r+1) + (s-t)(l-1) \pmod{k}, \end{aligned}$$

то есть мы получаем требуемые соотношения. Остаётся заметить, что из равенств, входящих в формулировку следствия, следуют тождества (14), (15), (16) и равенство $(s^2 + st + t^2)(l+r+1) \equiv 0$. $\square$

Следствие 6.6. *Отображения типа примитивизации $f: X \rightarrow Y$ над (не обязательно примитивным, см. пример 5.2) торическим максимально симметричным ориентированным атомом $Y = T_{(s,t)}^\bullet$ шестиугольного типа (s, t) , $s > 0$, $t \geq 0$, см. Теорему 1.14, классифицируются парами (k, r) , $k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_k$, удовлетворяющими условиям:*

$$s(2r+1) \equiv 0 \pmod{k}, \quad t(2r+1) \equiv 0 \pmod{k}.$$

Ориентированный атом X имеет род $g = (s^2 + st + t^2)(\frac{3k}{2} - \frac{1+\gcd(k,r)}{2}) + 1$, сложность $3k(s^2 + st + t^2)$, $s^2 + st + t^2$ белых клеток и $2(s^2 + st + t^2)\gcd(k, r)$ чёрных клеток, причём каждая его белая клетка имеет $6k$ сторон, а каждая его чёрная клетка имеет $\frac{3k}{\gcd(k,r)}$ сторон.

Доказательство. Рассмотрим на универсальном накрытии репер Oe_1e_2 с началом координат в центре белой клетки и порождающим базисом индуцированного клеточного разбиения плоскости. Тогда центры белых клеток — это точки вида (x, y) , центры чёрных клеток имеют координаты $(x + \frac{1}{3}, y + \frac{1}{3})$ и $(x + \frac{2}{3}, y + \frac{2}{3})$, а вершины — координаты $(x, y + \frac{1}{2})$, $(x + \frac{1}{2}, y)$ и $(x + \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2})$, где $x, y \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим ломаную, проходящую через точки $U_1(\frac{1}{10}, -\frac{1}{10})$, $V_1(s + \frac{1}{10}, -\frac{1}{10})$ и $W_1(s + \frac{1}{10}, t - \frac{1}{10})$, а также ломаную, проходящую через точки $U_2(\frac{1}{10}, 0)$, $V_2(\frac{1}{10}, s)$ и $W_2(-t + \frac{1}{10}, s + t)$. Тогда атом Y получается при факторизации плоскости по группе, порождённой сдвигами на вектора $\overrightarrow{U_1W_1}$ и $\overrightarrow{U_2W_2}$. При проекции на атом Y ломаные переходят в замкнутые кривые γ_1 и γ_2 .

Так как в данном случае шашечное разбиение белых клеток (см. Определение 1.4.В) невозможно, то отображения примитивизации над Y классифицируются наборами (k, r, c_1, c_2) , $k \in \mathbb{N}$, $r, c_1, c_2 \in \mathbb{Z}_k$, удовлетворяющими условиям

$$\begin{aligned} (s^2 + st + t^2)(2r+1) &\equiv 0 \pmod{k}, \\ \bar{\rho}([a \circ \gamma_1]) &= c_1, \quad \bar{\rho}([a \circ \gamma_2]) = c_2, \quad \bar{\rho}([b \circ \gamma_1]) = lc_1, \quad \bar{\rho}([b \circ \gamma_2]) = lc_2, \end{aligned}$$

где $\bar{\rho}: H_1(Y_0; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}_k$ есть гомоморфизм монодромии из Следствия 6.1, $c_i = \bar{\rho}([\gamma_i])$, $i = 1, 2$, а автоморфизм $\bar{\psi}_\rho(a)$ группы гомологий теперь индуцирован вращением R_a плоскости (т.е. универсального накрытия атома Y) на $\pi/3$ вокруг точки $O(0, 0)$, и автоморфизм $\bar{\psi}_\rho(b)$ индуцирован центральной симметрией R_b в точке $(-1/2, 0)$.

Так же, как и в следствиях, касающихся торических атомов других типов, мы приходим к системе уравнений:

$$\begin{aligned} c_2 &\equiv c_1, \\ c_2 - c_1 - c_2 &\equiv \frac{s(s-1)}{2} + \frac{t(t-1)}{2} + (s^2 + t^2)r, \end{aligned} \quad (17)$$

$$2c_1 \equiv (st + s + 2t) + 2(st + t)r, \quad (18)$$

$$2c_2 \equiv (st + 2s + 2t) + 2(st + s + t)r. \quad (19)$$

Вычитая из равенства (19) равенство (18), получаем тождество

$$s(2r + 1) \equiv 0 \pmod{k}.$$

Уравнение (17) можно переписать как

$$c_1 \equiv -\frac{s(s-1)}{2} - \frac{t(t-1)}{2} - (s^2 + t^2)r \pmod{k}.$$

Умножая равенство на 2 и вычитая его из уравнения (18), мы получим

$$\begin{aligned} 0 &\equiv (st + s + 2t) + s(s-1) + t(t-1) + 2(st + t)r + 2(s^2 + t^2)r \equiv \\ &\quad (s^2 + st + t^2)(2r + 1) + t(2r + 1) \equiv t(2r + 1). \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что из равенств

$$s(2r + 1) \equiv t(2r + 1) \equiv 0, \quad c_1 \equiv -\frac{s(s-1)}{2} - \frac{t(t-1)}{2} - (s^2 + t^2)r$$

следуют уравнения (17), (18), (19) и равенство $(s^2 + st + t^2)(2r + 1) \equiv 0$. $\square$

Пример 6.7. Рассмотрим торический примитивный максимально симметричный ориентированный атом $Y = T_{(2,1)}^\square$ квадратного типа $(2, 1)$ (граф смежности белых клеток у этого атома равен K_5 , см. Определение 1.4.В). Отвечающая этому атому карта на торе имеется в работе Л. Хеффтера [Н1891, с.491]. Из Следствия 6.4 вытекает, что отображения примитивизации $f: X \rightarrow Y$ над атомом однозначно задаются кратностью накрытия $k \geq 1$, которая должна быть нечётной. При этом $r \equiv -1$ и $c \equiv \frac{k+3}{2}$, а порядки ветвления в центрах всех двумерных клеток равны k . Ориентированный атом X имеет род $g = 5k - 4$, сложность $10k$, 5 белых клеток и 5 чёрных клеток, причём каждая его двумерная клетка имеет $4k$ сторон.

Пример 6.8. Рассмотрим максимально симметричный ориентированный атом $Y = T_{(1,1)}^\Delta$ на торе треугольного типа $(1, 1)$ (граф смежности белых клеток у этого атома равен графу Томсена $K_{3,3}$, см. Определение 1.4.В). Из Следствия 6.5 получаем, что отображения примитивизации $f: X \rightarrow Y$ над атомом классифицируются тройками (k, l, c) , $k \in \mathbb{N}$, $l, c \in \mathbb{Z}_k$, которые удовлетворяют соотношениям

$$l^2 \equiv 1 \pmod{k}, \quad 3c \equiv (l + 1)c \equiv 0 \pmod{k}.$$

При этом $r \equiv -l - 1$, порядки ветвления в центрах белых клеток равны k , а в центрах чёрных клеток $\frac{k}{\gcd(k, l+1)}$. Ориентированный атом X имеет род $g = 3\frac{3k - \gcd(k, l+1)}{2} - 2$, сложность $9k$, 6 белых клеток и $3\gcd(k, l+1)$ чёрных клеток, причём каждая его белая двумерная клетка имеет $3k$ сторон, а чёрная — $\frac{6k}{\gcd(k, l+1)}$ сторон.

7 Нахождение примитивных максимально симметричных атомов

Как выше, во всех утверждениях под ориентированным атомом понимается класс изоморфности оснащённой пары $(\bar{P}, K)^\#$, а во всех доказательствах он понимается как оснащённая пара $(\bar{P}, K)^\#$, см. Замечание 1.8.

Теорема 7.1. *Пусть числа $d, S \in \mathbb{N}$ удовлетворяют условиям*

- $d + 1 < S < 2d$, $\frac{S}{d} \notin \{\frac{k+1}{k} \mid k \in \mathbb{N}\}$;
- для любого разложения $d = d_1 d_2$ на взаимно простые множители $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$ выполнено $d + d_1 + d_2 \geq S$.

Тогда не существует примитивного максимально симметричного ориентированного атома (см. Определение 5.1), имеющего ровно S белых клеток, являющихся d -угольниками.

Доказательство. Предположим, что X — примитивный максимально симметричный ориентированный атом, имеющий ровно S белых клеток, являющихся d -угольниками.

Шаг 1. Пусть $e = e_1$ — белая клетка, $e_2, \dots, e_{d+1}$ — смежные с ней белые клетки (см. Определение 1.4.В), $e_{d+2}, \dots, e_S$ — остальные белые клетки атома X . Покажем, что клетки $e_{d+2}, \dots, e_S$ попарно не смежны (это очевидно при $S = d + 2$).

Предположим, что клетки e_{d+2}, e_{d+3} — смежные (поэтому $d + 2 < S$). Рассмотрим симметрию $a \in \text{Aut}(X)$, переводящую e в себя и являющуюся элементарным поворотом вокруг центра клетки e . Пусть $a(e_i) = e_{\hat{a}(i)}$, $\hat{a} \in \Sigma_S$. Тогда $\hat{a}(1) = 1$, и в представлении подстановки $\hat{a}$ в виде произведения независимых циклов цикл, содержащий 2, имеет длину d , а длины остальных циклов являются делителями числа d (поскольку $a^d = \text{id}_X$, а потому $\hat{a}^d$ — тождественная подстановка). Пусть d_1, d_2 — длины двух циклов, содержащих $d + 2, d + 3$, соответственно. Покажем сначала, что их наименьшее общее кратное $\tilde{d} := \text{lcm}(d_1, d_2)$ меньше чем d . Если эти два цикла совпадают, то $d_1 = d_2 = \tilde{d} \mid d$ и $d + \tilde{d} < S$, а потому $\tilde{d} < d$ в силу предположения $S < 2d$. Если эти два цикла различны, то $\tilde{d} \mid d$ и $d + d_1 + d_2 < S$, а потому $\tilde{d} < d$ в силу второго предположения настоящего утверждения.

Имеем $a^{\tilde{d}}(e_i) = e_i$ при $i = d + 2, d + 3$. Так как симметрия $a^{\tilde{d}} \in \text{Aut}(X)$ переводит в себя каждую из смежных белых клеток e_{d+2}, e_{d+3} , а X примитивен, то $a^{\tilde{d}} = \text{id}_X$, см. Утверждение 5.8.Б. Это противоречит тому, что a — элементарный поворот клетки e , имеющий порядок $d > \tilde{d}$, см. выше.

Шаг 2. Для любой белой клетки e_i атома X обозначим через E'_i множество белых клеток, не смежных с e_i , $E_i := E'_i \cup \{e_i\}$. По построению $E_1 = \{e_1, e_{d+2}, \dots, e_S\}$. Из шага 1 следует, что $E_i \supseteq E_1$ для любого $i = d + 2, \dots, S$. Из симметричности атома X следует, что $|E_i| = |E_1| = S - d$ для любого $i = 1, \dots, S$. Поэтому $E_i = E_1$ для любого $i = d + 2, \dots, S$, откуда любые два подмножества E_i, E_j либо совпадают, либо не пересекаются, $1 \leq i, j \leq S$. Это даёт разбиение множества белых клеток $\{e_1, \dots, e_S\}$ на попарно не пересекающиеся $(S - d)$ -элементные подмножества E_i . Поэтому $(S - d) \mid S$, т.е. $k := \frac{S}{S-d} \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, откуда $\frac{S}{d} = \frac{k}{k-1}$, что противоречит первому условию. $\square$

Следствие 7.2. *Пусть p — нечётное простое число или $p = 4$, и пусть $S \in \mathbb{N}$, $p + 1 < S < 2p$, $\frac{S}{p} \notin \{\frac{k+1}{k} \mid k \in \mathbb{N}\}$, $d \in \{p, 2p\}$. Тогда любой максимально симметричный ориентированный атом X , имеющий ровно S белых*

клеток, являющихся d -угольниками, непримитивен и обладает отображением примитивизации степени $\frac{d}{2}$ на ориентированный атом $X_{\text{prim}} = D_S$. В частности, такого атома X не существует, если выполнено одно из следующих двух условий:

- (а) $d = p \neq 4$;
- (б) $p = 4$, $d \in \{4, 8\}$ и S нечётно.

Доказательство. Предположим, что X — максимально симметричный ориентированный атом, имеющий ровно S белых клеток, являющихся d -угольниками. Так как X имеет $S > 1$ белых клеток, то определена его примитивизация X_{prim} , см. Определение 5.3. При этом $d(X_{\text{prim}}) < S$, и $d(X_{\text{prim}})$ является делителем числа d , а потому $d(X_{\text{prim}}) \in \{1, 2, p\}$ (так как p простое или $p = 4$). Если $d(X_{\text{prim}}) = 1$, то $X_{\text{prim}} \in B_1 = C_1$ и $S = 2 \leq p + 1$, что противоречит условию следствия. Если $d(X_{\text{prim}}) = p$, то Теорема 7.1 приводит к противоречию с примитивностью ориентированного атома X_{prim} , см. Утверждение 5.5. Поэтому $d(X_{\text{prim}}) = 2$, откуда d чётно и $X_{\text{prim}} = D_S$. При этом степень отображения примитивизации $p_X: X \rightarrow X_{\text{prim}}$ равна $\frac{d}{2}$, откуда $\frac{d}{2}$ нечётно в случае нечётного S , согласно примеру 6.3.А. $\square$

Следующее утверждение показывает, что примитивные максимально симметричные ориентированные атомы, имеющие ровно $S \geq 2$ белых клеток, являющихся d -угольниками, классифицируются парами $(\hat{a}, \hat{b})$ подстановок $\hat{a}, \hat{b} \in \Sigma_S$ с разложениями в произведения независимых циклов вида $\hat{a} = (1)(2 \dots d+1) \dots$ и $\hat{b} = (12) \dots$ и со свойствами 1, 2, 4 ниже, рассматриваемыми с точностью до преобразования $(\hat{a}, \hat{b}) \mapsto (\sigma \hat{a} \sigma^{-1}, \sigma \hat{b} \sigma^{-1})$, где $\sigma \in \Sigma_S$ — любая подстановка со свойством $\sigma(i) = i$ при $1 \leq i \leq d+1$. Это описание примитивных максимально симметричных ориентированных атомов аналогично определению максимально симметричного ориентированного атома как копредставления конечной группы с двумя образующими, см. Определение 1.10.

Утверждение 7.3. Пусть X — примитивный максимально симметричный ориентированный атом, состоящий из S белых клеток, являющихся d -угольниками. Пусть $a = a_e, b = b_A \in \text{Aut}(X)$ — образующие группы симметрий атома, см. Утверждение 2.8, и пусть $\hat{a}, \hat{b} \in \Sigma_S$ — индуцированные подстановки множества белых клеток, отождествлённого с множеством $\{1, \dots, S\}$, так что разложения подстановок $\hat{a}, \hat{b}$ в произведения независимых циклов имеют вид $\hat{a} = (1)(2 \dots d+1) \dots$, $\hat{b} = (12) \dots$. Тогда

1. $\hat{a}^d = \hat{b}^2 = \text{id}$;
2. подгруппа $G = \langle \hat{a}, \hat{b} \rangle \subset \Sigma_S$, порождённая подстановками $\hat{a}, \hat{b}$, транзитивно действует на множестве $\{1, \dots, S\}$;
3. эпиморфизм $\text{Aut}(X) \rightarrow G$, $a \mapsto \hat{a}$, $b \mapsto \hat{b}$, является изоморфизмом, т.е. имеет тривиальное ядро;
4. $|G| = Sd$;
5. для любых $\sigma, \rho \in G$ со свойством $\sigma(\rho(1)) = \rho(1)$ выполнено $\rho^{-1}\sigma\rho \in \langle \hat{a} \rangle$.

Обратно, для любой пары подстановок $\hat{a}, \hat{b} \in \Sigma_S$ вида $\hat{a} = (1)(2 \dots d+1) \dots$ и $\hat{b} = (12) \dots$, обладающей свойствами 1, 2, 4 выше, существует единственный (с точностью до изоморфности) примитивный максимально симметричный ориентированный атом X , для которого количество белых клеток равно S и существует такая нумерация белых клеток, что образующие $a, b \in \text{Aut}(X)$ группы симметрий атома X индуцируют подстановки $\hat{a}, \hat{b} \in \Sigma_S$ множества белых клеток.

Доказательство. Проверим необходимость. Свойство 1 следует из тождества $a^d = b^2 = \text{id}_X$. Свойство 2 означает, что группа симметрий атома транзитивно действует на множестве белых клеток. Для максимально симметричного атома это верно. Свойство 3 следует из примитивности атома и Утверждения 5.8.Б.

Свойство 4 непосредственно следует из свойства 3. Для проверки свойства 5 достаточно показать, что если $\sigma(1) = 1$, где $\sigma \in G$, то $\sigma \in \langle \hat{a} \rangle$. Пусть $g \in \text{Aut}(X)$ — симметрия атома, соответствующая σ . Тогда g переводит белую клетку 2 в клетку i , смежную с клеткой 1. Следовательно, $\sigma(2) = i$, где $2 \leq i \leq d+1$. Тогда $\hat{a}^{-i}\sigma(1) = 1$, $\hat{a}^{-i}\sigma(2) = 2$, откуда $\hat{a}^{-i}\sigma = \text{id}$ и $\sigma = \hat{a}^i$.

Докажем достаточность. Группа G с выделенными образующими $\hat{a}, \hat{b}$ однозначно определяет максимально симметричный ориентированный атом X , см. Определение 1.10 и последующий текст. Возьмём произвольную белую клетку $e \in X$. Множество белых клеток отождествляется с множеством смежных классов $G/\langle \hat{a} \rangle$ посредством сопоставления $g\langle \hat{a} \rangle \mapsto g(e)$. С другой стороны, из свойств 2 и 4 следует, что отображение $G \rightarrow \{1, \dots, S\}$, $\sigma \mapsto \sigma(1)$, индуцирует биекцию $G/\langle \hat{a} \rangle \rightarrow \{1, \dots, S\}$. Таким образом, имеется взаимно однозначное соответствие между двумерными белыми клетками атома X и множеством $\{1, \dots, S\}$, задаваемое формулой $g(e) \mapsto g(1)$, $g \in G$.

Покажем, что любая симметрия $g \in G$ атома X индуцирует на множестве его белых клеток подстановку $\hat{g} \in \Sigma_S$, совпадающую с g . Для любого $i \in \{1, \dots, S\}$ фиксируем такую симметрию $g_i \in G$, что $g_i(1) = i$. Тогда для любых $g \in G$ и $i \in \{1, \dots, S\}$ имеем $\hat{g}(i) = gg_i(1) = g(g_i(1)) = g(i)$, откуда $\hat{g} = g$.

Предположим, что атом X непримитивен. Тогда существует симметрия $a^k \neq \text{id}_X$, которая оставляет на месте все белые клетки, т.е. соответствующая подстановка на множестве $\{1, \dots, S\}$ тривиальна. Но это означает, что $\hat{a}^k = \text{id}$. Противоречие с доказанным выше равенством $a^k = \hat{a}^k$. $\square$

Теорема 7.4. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $S = d + 2$, и пусть X — примитивный максимально симметричный ориентированный атом (см. Определение 5.1), имеющий ровно S белых клеток, являющихся d -угольниками. Тогда $d \in \{2, 4\}$, и X является сферическим ориентированным атомом D_4 или P_2 , см. 1.4.

Доказательство. Шаг 1. В обозначениях доказательства Теоремы 7.1, имеем разбиение белых клеток $e_1, \dots, e_S$ атома X на пары несмежных клеток, см. шаг 1 и начало шага 2 доказательства этой теоремы. В частности, S чётно. Рассмотрим единственную инволюцию $\tau \in \Sigma_S$, такую что клетки $e_i, e_{\tau(i)}$ несмежные, $1 \leq i \leq S$. Найдём её представление в виде произведения независимых циклов.

Для любой симметрии $g \in \text{Aut}(X)$ ориентированного атома X рассмотрим подстановку $\hat{g} \in \Sigma_S$ со свойством $g(e_i) = e_{\hat{g}(i)}$, $1 \leq i \leq S$. Тогда клетки $g(e_i) = e_{\hat{g}(i)}$, $g(e_{\tau(i)}) = e_{\hat{g}\tau(i)}$ несмежные, $1 \leq i \leq S$, откуда $\tau\hat{g} = \hat{g}\tau$. По построению в доказательстве Теоремы 7.1, $\hat{a} = (1)(23 \dots d+1)(d+2)$ и $\hat{b} = (12) \dots$, откуда $\tau = (1, d+2)(2, 2+x) \dots$ для некоторого $x \in [1; d-1]$. Значит,

$$\hat{a} = (1)(23 \dots d+1)(d+2), \quad \hat{b} = (12)(d+2, 2+x) \dots$$

Обозначим $G = \langle \hat{a}, \hat{b} \rangle \subset \Sigma_S$. Получаем эпиморфизм $\text{Aut}(X) \rightarrow G$, $g \mapsto \hat{g}$ (в действительности, он является изоморфизмом в силу Утверждения 5.8.Б и примитивности атома X). По доказанному выше,

$$\tau\sigma = \sigma\tau \quad \text{для любого } \sigma \in G. \quad (20)$$

Поэтому для любого $i = 0, \dots, d-1$ имеем $\tau(2+i) = \tau\hat{a}^i(2) = \hat{a}^i\tau(2) = \hat{a}^i(2+x) = 2+\bar{x}+\bar{i}$, где $\bar{y} \in [0; d-1]$ — остаток от деления числа $y \in \mathbb{N}$ на d . Так как $\tau^2 = \text{id}$,

то $2 = \tau^2(2) = \tau(2+x) = 2 + \overline{2x}$, откуда $x = \frac{d}{2}$. Это даёт разложение

$$\tau = (1, d+2)(2, 2+\frac{d}{2})(3, 3+\frac{d}{2}) \dots (\frac{d}{2}+1, d+1). \quad (21)$$

Шаг 2. Рассмотрим независимые циклы $\tau_1 = (1, d+2)$, $\tau_i = (i, i+\frac{d}{2})$, $2 \leq i \leq \frac{d}{2}+1 = \frac{S}{2}$, в разложении (21) инволюции τ . Тогда $\tau = \tau_1 \dots \tau_{S/2}$ и

$$\hat{a}^{d/2} = \tau_2 \dots \tau_{S/2} = \tau_1 \tau \in G.$$

Для любого $\sigma \in G$ рассмотрим цикл $\sigma\tau_1\sigma^{-1}$. Тогда $\sigma\tau_1\sigma^{-1}(\sigma(1)) = \sigma\tau_1(1) = \sigma\tau(1) = \tau\sigma(1)$ в силу (20). В частности, для $\sigma_i = \hat{a}^{i-2}\hat{b}$, $2 \leq i = \sigma_i(1) \leq \frac{S}{2}$, имеем $\sigma_i\tau_1\sigma_i^{-1} = \tau_i$. Отсюда и из (20) при любом $i = 2, \dots, \frac{S}{2}$ имеем инволюцию

$$\sigma_i\hat{a}^{d/2}\sigma_i^{-1} = \sigma_i(\tau_1\tau)\sigma_i^{-1} = (\sigma_i\tau_1\sigma_i^{-1})(\sigma_i\tau\sigma_i^{-1}) = \tau_i\tau \in G.$$

Шаг 3. Рассмотрим в группе G подгруппу H , порождённую построенными на шаге 2 инволюциями $\hat{a}^{d/2} = \tau_1\tau$, $\sigma_i\hat{a}^{d/2}\sigma_i^{-1} = \tau_i\tau$, $i = 2, \dots, \frac{S}{2}$. Так как инволюции $\tau_1, \dots, \tau_{S/2}$ попарно коммутируют и $\tau = \tau_1 \dots \tau_{S/2}$, то группа H абелева и имеет следующие образующие:

$$H = \langle \tau_i \mid 1 \leq i \leq \frac{S}{2} \rangle \quad \text{при } 4 \mid S, \quad H = \langle \tau_1\tau_i \mid 2 \leq i \leq \frac{S}{2} \rangle \quad \text{при } 4 \nmid S.$$

Поэтому $H \simeq (\mathbb{Z}_2)^{2k}$, где $k = [\frac{S}{4}]$. Покажем, что $k = 1$. Так как $H \subset G$, $\hat{b} \in G \setminus H$ и $\hat{b}^2 = \text{id}$, то $2|H| = 2^{2k+1}$ делит $|G| = |\text{Aut}(X)| = Sd = 8k(2k \pm 1)$. Здесь мы использовали изоморфизм $G \simeq \text{Aut}(X)$, см. шаг 1, а также равенства

$$(S, d) = (4k, 2(2k-1)) \quad \text{при } 4 \mid S, \quad (S, d) = (2(2k+1), 4k) \quad \text{при } 4 \nmid S.$$

Таким образом, $2^{2k+1} \mid 8k$, откуда $4^k \mid 4k$, а потому $4^k \leq 4k$. Так как 4^k есть произведение k четвёрок, а $4k$ есть сумма k четвёрок, то $k = 1$.

Шаг 4. Пусть $4 \mid S$. По шагу 3 имеем $(S, d) = (4, 2)$, а потому $X = D_4$.

Пусть теперь $4 \nmid S$. По шагу 3, $(S, d) = (6, 4)$. По шагу 1, $\hat{a} = (1)(2345)(6)$, $\tau = (16)(24)(35)$ и $\hat{b} = (12)(46) \dots$, откуда $\hat{b} = (12)(46)(35)$ или $\hat{b} = (12)(46)(3)(5)$. Но если $\hat{b} = (12)(46)(3)(5)$, то нетривиальная симметрия $b \in \text{Aut}(X)$ оставляет на месте две смежные белые клетки e_3, e_5 , что невозможно для примитивного атома, согласно Утверждению 5.8.Б. Таким образом, $\hat{b} = (12)(46)(35)$. Сейчас мы можем определить циклический порядок, в котором белые клетки примыкают к любой белой клетке. Например, для клетки e_2 получаем, что действие элементарного поворота этой клетки имеет вид $\hat{b}\hat{a}\hat{b}^{-1} = (1563)(2)(4)$, т.е. циклический порядок примыкания к этой клетке следующий: e_1, e_5, e_6, e_3 . Зная циклические порядки примыкания, можно однозначно восстановить клеточное разбиение примитивного ориентированного атома, а потому и сам ориентированный атом. В данном случае мы получаем ориентированный атом P_2 , усечённый куб. $\square$

Случай $S = d+1$. Докажем Теорему 1.18 классификации примитивных максимально симметричных ориентированных атомов, имеющих ровно $S \geq 2$ белых клеток, являющихся $(S-1)$ -угольниками. Граф смежности белых клеток (см. Определение 1.4.В) такого атома — это полный граф K_S .

Доказательство Теоремы 1.18. Шаг 1. Пусть X — примитивный максимально симметричный ориентированный атом, у которого граф смежности белых клеток равен K_S . Пусть $G = \text{Aut}(X)$ — группа его симметрий. Так как атом примитивен, то любая его симметрия однозначно задаётся своим действием на

множестве белых клеток (см. Утверждение 7.3), так что можно рассматривать G как подгруппу в группе подстановок Σ_S . Порядок группы G равен $S(S-1)$.

Так как любая симметрия примитивного атома, оставляющая на месте две смежные белые клетки (см. Определение 1.4.B), является тривиальной (см. Утверждение 5.8.B), то $G = \{\text{id}\} \cup C_0 \cup C_1$, где C_k , $k = 0, 1$, — симметрии атома, оставляющие на месте k белых клеток. Множество C_1 состоит из вращений белых клеток, то есть элементов a_i^k , $i = 1, \dots, S$, $k = 1, \dots, S-2$, где $a_i \in G$ — элементарное вращение i -й белой клетки. Количество элементов в подмножестве C_1 равно $S(S-2)$. Порядок любого элемента из C_1 делит $S-1$.

Количество элементов в C_0 равно $S(S-1) - S(S-2) - 1 = S-1$. Пусть $g \in C_0$. Не ограничивая общности, можно считать, что $g(1) = 2$ и что элементарное вращение клетки 1 есть подстановка вида $a_1 = (1)(23\dots S)$. Тогда элементы $g_k = a_1^k g a_1^{-k}$, $k = 0, \dots, S-2$, лежат в C_0 и все различны, так как $g_i(1) = i+2$. Таким образом, все элементы C_0 сопряжены.

Подстановка $g \in C_0$ разлагается в произведение независимых циклов. Пусть p — длина наименьшего цикла в g . Имеем $p > 1$, так как g не имеет инвариантных белых клеток. Так как g^p оставляет неподвижными не менее p белых клеток, то $g^p = \text{id}$. Следовательно, длина любого цикла в g равна p , так что порядок p элемента g делит S . Предположим, что p составное: $p = st$. Рассмотрим элемент $g' = g^s$. Он лежит в C_0 , так как $g' \neq \text{id}$ и его порядок t взаимно прост с $S-1$. Тогда он сопряжён элементу g и, таким образом, разбивается в произведение независимых циклов длины p . Однако по определению циклы элемента g' имеют длину $t < p$, и мы приходим к противоречию. Следовательно, число p — простое.

Пусть q — некоторое простое число, делящее S . Рассмотрим произвольный нетривиальный элемент g из силовой q -подгруппы группы G . Порядок элемента g равен q^t и взаимно прост с $S-1$. Следовательно, $g \in C_0$. Но порядок любого элемента в C_0 равен p , следовательно, $q = p$. Тогда $S = p^l$ для некоторого $l \in \mathbb{N}$.

Шаг 2. Заметим, что $H = \{\text{id}\} \cup C_0$ является силовой p -подгруппой группы G . Тогда центр группы H нетривиален [Ленг, теорема I.3]. Так как все нетривиальные элементы в H сопряжены и H нормальна, то H коммутативна. Следовательно, H изоморфна группе $(\mathbb{Z}_p)^l$. При этом автоморфизм $\text{Ad}_{a_1}|_H: H \rightarrow H$, $h \mapsto a_1 h a_1^{-1}$, является линейным оператором, если H рассматривать как векторное пространство над $\mathbb{Z}_p$.

Рассмотрим в G циклическую подгруппу $R = \langle a \rangle$, $a = a_1$, вращений вокруг центра первой белой клетки. Порядок подгруппы R равен $S-1$. Так как $R \cap H = \{\text{id}\}$ и H нормальна, то G есть полупрямое произведение R и H . В частности, любая симметрия атома $g \in G$ имеет вид $g = a^k h$, $0 \leq k < S-1$, $h \in H$.

Если p чётно, то симметрия $b = b_{12}$, переставляющая между собой белые клетки 1 и 2, принадлежит подгруппе H . Если же p нечётно, то $b = a^k h$, $0 < k < S-1$, $h \in H$. Так как $b^2 = \text{id}$, то $a^{2k} = \text{id}$, откуда $k = \frac{S-1}{2}$. При этом $h \neq \text{id}$, так как $b(1) = 2 \neq 1 = a^k(1)$. Положим теперь $h = b$, если $p = 2$, и $h = a^{-(S-1)/2} b$, если p нечётно. Тогда $h \in H$ и $h \neq \text{id}$.

Обозначим $h_k = a^k h a^{-k}$, $k = 0, \dots, l-1$. Тогда элементы $h = h_0, \dots, h_{l-1}$ образуют базис H как векторного пространства над полем $\mathbb{Z}_p$. Действительно, если элементы $h_0, \dots, h_{l-1}$ линейно зависимы, то они порождают подпространство $V \subsetneq H$, инвариантное относительно оператора $\text{Ad}_a|_H$. Но, действуя $\text{Ad}_a|_H$ на нетривиальный элемент h_0 , мы получим все ненулевые элементы векторного пространства H , поэтому $V = H$. Противоречие.

В базисе $h_0, \dots, h_{l-1}$ автоморфизм $\text{Ad}_a|_H$ задаётся матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & c_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & c_{l-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & c_{l-1} \end{pmatrix},$$

где $c_0, \dots, c_{l-1} \in \mathbb{Z}_p$. Заметим, что числа $c_0, \dots, c_{l-1}$ определены однозначно, если только фиксированы образующие a, b группы симметрий G .

Рассмотрим факторкольцо $\mathbb{Z}_p[t]/(f)$, где $f = t^l - c_{l-1}t^{l-1} - \dots - c_1t - c_0$. Имеется изоморфизм абелевых групп $\Phi_H: H \rightarrow (\mathbb{Z}_p[t]/(f), +)$ (а потому и изоморфизм векторных пространств над $\mathbb{Z}_p$), такой что $\Phi_H(h_k) = t^k$, $k = 0, \dots, l-1$. При этом изоморфизме оператору $\text{Ad}_a|_H$ соответствует оператор умножения на t в кольце $\mathbb{Z}_p[t]/(f)$. Изоморфизм Φ_H вместе с изоморфизмом $\Phi_R: R \rightarrow \mathbb{Z}_{S-1}$, переводящим a в $1 \in \mathbb{Z}_{S-1}$, позволяет отождествить группу G с группой $\mathbb{Z}_{S-1} \ltimes (\mathbb{Z}_p[t]/(f), +)$, состоящей из пар (u, v) , $u \in \mathbb{Z}_{S-1}$, $v \in \mathbb{Z}_p[t]/(f)$, с умножением

$$(u_1, v_1) \cdot (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, t^{-u_2} \cdot v_1 + v_2), \quad u_1, u_2 \in \mathbb{Z}_{S-1}, \quad v_1, v_2 \in \mathbb{Z}_p[t]/(f).$$

При этом отождествлении элементу a соответствует пара $(1, 0)$, а элементу b при $p = 2$ отвечает пара $(0, 1)$, а при нечётном p — пара $(\frac{S-1}{2}, 1)$. Элемент $h = h_0 \in H$ переходит в $(0, 1)$, а элемент $h_1 \in H$ — в $(0, t)$.

Шаг 3. Рассмотрим кольцо $\mathbb{Z}_p[t]/(f)$ более внимательно. Поскольку порядок оператора $\text{Ad}_a|_H$ в H , а значит, и оператора умножения на t в $\mathbb{Z}_p[t]/(f)$, равен $S-1$, то $f \mid (t^{S-1} - 1)$, но $f \nmid (t^r - 1)$ для каждого $r < S-1$. Известно [AR, теорема 7.2], что в $\mathbb{Z}_p[t]$ при любом $l \in \mathbb{N}$ выполнено соотношение

$$t(t^{p^l-1} - 1) = \prod_{d \mid l} \prod_{f_d \text{ непр.}} f_d(t), \quad (22)$$

где внутреннее произведение берётся по всем неприводимым многочленам f_d степени d со старшим коэффициентом 1. Предположим, что f приводим и $d_1, \dots, d_m$ — степени неприводимых многочленов в разложении f . Тогда $d_1 + \dots + d_m \leq l$. Заметим, что все неприводимые делители f различны (в силу (22) и единственности разложения элементов $\mathbb{Z}_p[t]$ со старшим коэффициентом 1 на неприводимые множители со старшим коэффициентом 1) и среди них нет t , так как $t \nmid (t^{S-1} - 1)$. Поскольку по (22) неприводимый многочлен степени d делит $t(t^{p^d-1} - 1)$, то f делит наименьшее общее кратное многочленов $t^{p^{d_1}-1} - 1, \dots, t^{p^{d_m}-1} - 1$. Следовательно, f делит многочлен

$$t \prod_{k=1}^m (p^{d_k} - 1) - 1.$$

При этом многочлен имеет степень $r = \prod_{k=1}^m (p^{d_k} - 1) < p^l - 1 = S-1$. Таким образом, $f \mid (t^r - 1)$, что противоречит свойствам многочлена f . Следовательно, f неприводим. Поэтому кольцо $\mathbb{Z}_p[t]/(f)$ является полем из p^l элементов.

Элемент $t \in \mathbb{Z}_p[t]/(f)$ является корнем многочлена f . Так как порядок оператора умножения на t равен $S-1$, то все элементы t^k , $0 \leq k \leq S-2$, различны. С другой стороны, мультипликативная группа $(\mathbb{Z}_p[t]/(f))^*$ конечного поля $\mathbb{Z}_p[t]/(f)$, состоящая из всех ненулевых элементов поля, является циклической по [AR, теорема 7.1] и имеет порядок $S-1$, поэтому t должен быть образующей этой группы.

Шаг 4. Таким образом, мы показали (см. шаги 2,3), что группа симметрий G с заданными образующими a, b однозначно определяет неприводимый

многочлен f над $\mathbb{Z}_p$ степени l , корень которого является образующей мультипликативной группы в некотором поле, состоящем из p^l элементов. Заметим, что все конечные поля из p^l элементов изоморфны между собой [Ленг, теорема VII.10].

Пусть, наоборот, дано простое число p и неприводимый многочлен $f \in \mathbb{Z}_p[t]$ степени l , который имеет корень t_0 в поле F из p^l элементов, являющийся образующей мультипликативной группы F^* этого поля. Определим группу G порядка $p^l(p^l - 1)$ как полупрямое произведение $\mathbb{Z}_{p^l-1} \ltimes (F, +)$ с умножением

$$(u_1, v_1) \cdot (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, t_0^{-u_2} v_1 + v_2), \quad u_1, u_2 \in \mathbb{Z}_{p^l-1}, \quad v_1, v_2 \in F. \quad (23)$$

Положим $a = (1, 0)$, $b = (0, 1)$ или $(\frac{p^l-1}{2}, 1)$ в зависимости от чётности p . Тогда a имеет порядок $p^l - 1$, b — порядок 2, и элементы a, b порождают группу G . Группе G соответствует примитивный атом с p^l белыми клетками, каждая из которых имеет $p^l - 1$ сторон, так что граф смежности белых клеток является полным. Действительно, примитивность атома следует из того, что циклическая подгруппа $R = \langle a \rangle$ не содержит нетривиальных подгрупп, нормальных в G . Количество белых клеток равно индексу подгруппы R . Число сторон у белой клетки равно порядку подгруппы R . Таким образом, каждому неприводимому многочлену над $\mathbb{Z}_p$, корень которого является образующей мультипликативной группы поля F , однозначно соответствует примитивный максимально симметричный ориентированный атом, у которого граф смежности белых клеток является полным.

Шаг 5. Найдём количество неприводимых многочленов f над $\mathbb{Z}_p$ степени l , корни которых являются образующими мультипликативной группы поля F из p^l элементов. Мультипликативная группа поля F^* является циклической группой порядка $p^l - 1$. Количество порождающих этой группы равно числу $\varphi(p^l - 1)$ вычетов, взаимно простых с $p^l - 1$. Таким образом, в F^* есть $\varphi(p^l - 1)$ образующих. Если $t_0 \in F^*$ — одна из них, то существует единственный (со старшим коэффициентом, равным 1) неприводимый над $\mathbb{Z}_p$ многочлен $f \in \mathbb{Z}_p[t]$, такой что $f(t_0) = 0$. Степень f равна l , так как t_0 порождает F^* (см. шаг 2).

С другой стороны, если $f \in \mathbb{Z}_p[t]$ — неприводимый многочлен степени l , такой что $f(t_0) = 0$ для некоторой образующей t_0 группы F^* , то поскольку поле F нормально над полем $\mathbb{Z}_p$ [Ленг, теорема VII.13], $f(t) = \prod_{k=0}^{l-1} (t - t_k)$, $t_k = t_0^{p^k} \in F$ (в самом деле, $f(t_0^{p^k}) = f(t_0)^{p^k} = 0$). Все корни t_k различны и являются образующими мультипликативной группы, так как p^k взаимно просто с $p^l - 1$. Таким образом, одному многочлену соответствует l образующих. Следовательно, количество различных неприводимых многочленов (со старшим коэффициентом 1), корнями которых являются образующие мультипликативной группы, равно $\frac{\varphi(p^l-1)}{l}$. Пункт (А) теоремы доказан.

Шаг 6. Чтобы посчитать количество чёрных клеток и род атома, достаточно определить число d' сторон у чёрной клетки, которое равно порядку элемента ba^{-1} в группе G . Этот порядок равен $d' = 2$ при $S = 2$, $d' = 3$ при $S = 3$, $d' = S - 1$ для чётных $S > 2$ или в случае $S \equiv 1 \pmod{4}$ и, наконец, $d' = \frac{S-1}{2}$, если $S \equiv 3 \pmod{4}$ и $S > 3$. Это доказывает пункт (Б).

Шаг 7. Докажем пункт (В). Пусть G — группа симметрий атома $K_S^{n,f}$, a, b — её стандартные образующие, см. Утверждение 2.8. Используя рассуждения шагов 1–4, мы можем отождествить G с полупрямым произведением $\mathbb{Z}_{p^l-1} \ltimes (F, +)$, в котором умножение задаётся формулой (23), где $t_0 \in F$ и $f(t_0) = 0$. При этом отождествлении a переходит в $(1, 0)$, а b в $(0, 1)$ (если $p = 2$) или в $(\frac{p^l-1}{2}, 1)$ (если $p > 2$). Из формулы для умножения следует, что имеется совпадение автоморфизмов $\text{Ad}_a|_H = t_0 \cdot : H \rightarrow H$ аддитивной группы H поля F ,

где $\text{Ad}_a|_H$ есть ограничение на $H = (F, +)$ внутреннего автоморфизма группы G , а $t_0 \cdot$ действует как умножение элементов поля F на корень t_0 .

1. Замена ориентации на атоме означает, что мы переходим от пары образующих a, b к образующим a^{-1} (вращение белой клетки в противоположном направлении), b , см. Определение 1.10. Но $\text{Ad}_{a^{-1}}|_H = \text{Ad}_a^{-1}|_H = t_0^{-1}$. Элемент t_0^{-1} является корнем многочлена $\bar{f}$, а также образующей мультипликативной группы поля F , причём $\langle a^{-1} \rangle = \langle a \rangle$. Поэтому группа симметрий $G = \langle a^{-1} \rangle \ltimes H$ с новыми образующими a^{-1}, b отвечает ориентированному атому $K_S^{n, \bar{f}}$.

2. Переход от ориентированного атома к двойственному эквивалентен тому, что мы теперь рассматриваем пару образующих ba^{-1} (вращение чёрной клетки), b группы G . В случае $p = 2$ имеем $\text{Ad}_{ba^{-1}}|_H = \text{Ad}_{a^{-1}}|_H = t_0^{-1}$, так как $b \in F$ и $H = (F, +)$ абелева как аддитивная группа. Элемент t_0^{-1} является корнем многочлена f^* , а также образующей мультипликативной группы поля F , причём при $l \geq 2$ выполнено $(ba^{-1})^{S-1} = \text{id}$ в силу $d' = S - 1$, см. шаг 6. Поэтому $G = \langle ba^{-1} \rangle \ltimes H$ и мы получим ориентированный атом $K_S^{n, \bar{f}} = K_S^{n, f^*}$.

Пусть S нечётно. Из $t_0^{\frac{S-1}{2}} = -1$ имеем $t_0^{\frac{S-1}{2}-1} = -t_0^{-1}$ и $\text{Ad}_{ba^{-1}}|_H = \text{Ad}_{a^{\frac{S-1}{2}-1}}|_H = t_0^{\frac{S-1}{2}-1} = -t_0^{-1}$, см. шаг 2. При этом $(ba^{-1})^{S-1} = \text{id}$ в силу $d' \in \{S-1, \frac{S-1}{2}\}$, см. шаг 6. Элемент $-t_0^{-1}$ является корнем многочлена f^* , а при $S \equiv 1 \pmod{4}$ он является также образующей мультипликативной группы поля F . Поэтому $G = \langle ba^{-1} \rangle \ltimes H$ и двойственным атомом является K_S^{n, f^*} . $\square$

Рассмотрим на ориентированном атоме $Y = A_n$ (см. 1.4) следующий набор замкнутых путей $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g} \in \Omega(Y_0, y_0)$, где $g = [\frac{n}{2}]$ — род атома. А именно, пусть замкнутый путь γ_j отвечает слову

$$W_j = \tilde{a}^{j-1}[\tilde{a}, \tilde{b}]\tilde{a}^{1-j} = \tilde{a}^j \tilde{b} \tilde{a}^{-1} \tilde{b} \tilde{a}^{1-j} \in \langle \tilde{a}, \tilde{b} \mid \tilde{b}^2 \rangle = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2, \quad 1 \leq j \leq 2g, \quad (24)$$

см. Замечание 4.8.A. Эти пути замкнуты, так как проекция слова $W_1 = \tilde{a} \tilde{b} \tilde{a}^{-1} \tilde{b} = [\tilde{a}, \tilde{b}]$ в группу $\text{Aut}(A_n) = \langle a, b \mid b^2, a^n b \rangle \simeq \mathbb{Z}_{2n}$ тривиальна, в силу абелевости этой группы. При интерпретировании атома $Y = A_n$ как функции Морса или пары (P, K) (см. Определение 1.2) пути γ_j являются *уникурсальными окружностями* атома (т.е. гладкими регулярными окружностями на графе K), а в терминах Определения 1.5 — *многоугольниками Петри* соответствующей карты (см. [MS, §5.2 и 8.5]). Нетрудно показать, что петли $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$ задают набор образующих группы $H_1(Y; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_{2g}$, см. обозначение 4.14.

Утверждение 7.5. Пусть X — примитивный максимально симметричный ориентированный атом с графом смежности K_S белых клеток, $S \geq 2$.

(А) Если S чётно, то атом X неприводим (см. Определение 3.5).

(Б) Пусть S нечётно. Тогда атом X приводим и допускает неразветвлённое накрытие $X \rightarrow A_{\frac{S-1}{2}}$ кратности S с абелевой группой монодромии $H \subset G = \text{Aut}(X)$, где H является нормальным замыканием симметрии $a^{\frac{S-1}{2}}b \in G$ (см. Определение 2.6 и Утверждение 2.8) и изоморфна абелевой группе $(F, +)$ поля F из S элементов. Подгруппа H содержится в любой нетривиальной нормальной подгруппе группы G и является единственной абелевой подгруппой среди всех таких подгрупп. Пусть $X = K_S^{n, f}$, см. Теорему 1.18, и пусть $t_0 \in F$ и $f(t_0) = 0$. Определим автоморфизмы $l, m \in \text{Aut}(F, +)$ и элементы $q, r, c_1, \dots, c_{2g} \in F$ формулами $l = (-1) \cdot$, $m = t_0 \cdot$, $q = r = 0$, $c_j = t_0^{j-1}$, $1 \leq j \leq 2g$, где $g = [\frac{S-1}{4}]$ — род атома $A_{\frac{S-1}{2}}$. Тогда накрытие $X \rightarrow A_{\frac{S-1}{2}}$ отвечает набору $(l, m, q, r, c_1, \dots, c_{2g})$, рассматриваемому с точностью до преобразований (5), см. Теорему 4.15.

Доказательство. В обозначениях доказательства Теоремы 1.18, имеем $G = \text{Aut}(X) \simeq \mathbb{Z}_{S-1} \ltimes H$, где $H = (F, +)$ — абелева группа поля $F = \mathbb{Z}_p[t]/(f)$ для некоторого неприводимого многочлена $f \in \mathbb{Z}_p[t]$ степени l . При этом $a = (1, 0)$, $H = \{\text{id}\} \cup C_0$, $G = \{\text{id}\} \cup C_0 \cup C_1$, все элементы множества C_0 попарно сопряжены, а любой элемент множества C_1 сопряжён элементу a^u для некоторого $u \in \mathbb{Z}$, $0 < u < S-1$. Пусть $\tilde{H} \subset G$ — любая нетривиальная нормальная подгруппа. Если $\tilde{H} \neq H$, то $a^u = (u, 0) \in \tilde{H}$ для некоторого $u \in \mathbb{Z}$, $0 < u < S-1$, откуда $\tilde{H} \ni [(u, 0), (0, 1)] = (0, t^u - 1) \neq (0, 0)$, так как $t \in F$ — образующая мультипликативной группы $F^* \simeq \mathbb{Z}_{S-1}$ поля F . Поэтому $H \subseteq \tilde{H}$, причём в случае $H \neq \tilde{H}$ группа $\tilde{H}$ неабелева.

(А) Пусть S чётно. Так как $b = (0, 1) \in H \subset \tilde{H}$, то атом X неприводим.

(Б) Пусть S нечётно. Тогда H является нормальным замыканием элемента $a^{\frac{S-1}{2}}b = (0, 1)$. Так как $b = (\frac{S-1}{2}, 1) \notin H$, имеется симметричное разветвлённое накрытие $X \rightarrow X/H$, см. Определение 4.1. Покажем, что ориентированный атом X/H изоморфен $A_{\frac{S-1}{2}}$. Рассмотрим в факторгруппе G/H элементы aH, bH . При отождествлении $G/H = \mathbb{Z}_{S-1}$ имеем $aH = 1$, $bH = \frac{S-1}{2}$. Поэтому имеется изоморфизм $G/H \rightarrow \text{Aut}(A_{\frac{S-1}{2}})$, переводящий элементы aH, bH в стандартные образующие группы $\text{Aut}(A_{\frac{S-1}{2}})$. Вместе с Определением 1.10 и пунктом 5 Утверждения 3.3, это доказывает изоморфность ориентированных атомов X/H и $A_{\frac{S-1}{2}}$. Поэтому имеется симметричное (вообще говоря, разветвлённое) накрытие $X \rightarrow A_{\frac{S-1}{2}}$.

Осталось вычислить набор $(l, m, q, r, c_1, \dots, c_{2g})$, отвечающий этому накрытию, и показать, что оно является неразветвлённым. Из Теоремы 1.18.Б следует, что у атомов X и $A_{\frac{S-1}{2}}$ количества сторон белых клеток одинаковы и равны $d = S-1$, а количества сторон чёрных клеток тоже одинаковы и равны $d' \in \{S-1, \frac{S-1}{2}\}$. То есть, порядки элементов $a = (1, 0) \in G$ и $aH \in G/H$ оба равны $S-1$, а порядки элементов $ba^{-1} = (\frac{S-1}{2} - 1, t) \in G$ и $ba^{-1}H \in G/H$ оба равны d' , см. выражение для d' в доказательстве Теоремы 1.18, шаг 6.

По Теореме 4.15, с точностью до преобразований (5) имеем $q = \bar{\rho}([\alpha])$, $r = \bar{\rho}([\beta])$, $c_j = \bar{\rho}([\gamma_j])$, $1 \leq j \leq 2g$, $m = \bar{\psi}_\rho(aH)$ и $l = \bar{\psi}_\rho(bH)$. Петли α, β, γ_j на ориентированном атоме $Y = A_{\frac{S-1}{2}}$ отвечают словам $\tilde{a}^d = \tilde{a}^{S-1}$, $(\tilde{b}\tilde{a}^{-1})^{d'}$, $W_j = \tilde{a}^{j-1}[\tilde{a}, \tilde{b}]\tilde{a}^{1-j} \in \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$, соответственно, см. обозначение 4.14, Замечание 4.8.А и (24). Отсюда и из Замечания 4.11.А имеем

$$q = \bar{\rho}([\alpha]) = a^{S-1} = (0, 0) = 0, \quad r = \bar{\rho}([\beta]) = (ba^{-1})^{d'} = (0, 0) = 0 \in H,$$

$$c_j = \bar{\rho}([\gamma_j]) = a^{j-1}[a, b]a^{1-j} = (0, t^{j-1}(1-t)) = t^{j-1}(1-t) \in H,$$

$$m = \bar{\psi}_\rho(aH) = \text{Ad}_a|_H = t, \quad l = \bar{\psi}_\rho(bH) = \text{Ad}_b|_H = \text{Ad}_{a^{\frac{S-1}{2}}}|_H = (-1) \cdot.$$

Так как $1-t \neq 0$ в H , то $1-t = t^v$ для некоторого $v \in \mathbb{Z}$. Поэтому при преобразовании (5) с помощью автоморфизма $\lambda = \text{Ad}_{a^{-v}}|_H = t^{-v} \cdot \in \text{Aut}(H)$ набор $(l, m, q, r, c_1, \dots, c_{2g})$ переходит в требуемый набор $((-1) \cdot, t, 0, 0, 1, t, t^2, \dots, t^{2g-1})$. Так как $q = r = 0$, то накрытие является неразветвлённым, см. Замечание 4.17. $\square$

Пусть $\hat{\Gamma}$ — конечный связный граф без петель и кратных рёбер, группа симметрий которого $\text{Aut}(\hat{\Gamma})$ действует транзитивно на множестве его полурёбер. Пусть $S \geq 3$ — количество его вершин, $d \geq 3$ — степень любой его вершины, и пусть на графе $\hat{\Gamma}$ задан подграф $Z \subset \hat{\Gamma}$, являющийся простым циклом длины $d' \geq 3$, см. Замечание 5.9. Исследуем существование и единственность примитивного максимально симметричного неориентированного (и не обязательно ориентируемого) атома X (см. Определение 2.6 и Утверждение 2.8) со следующими свойствами:

1. граф смежности белых клеток атома X изоморфен $\hat{\Gamma}$;
2. имеется такая чёрная клетка $e' \subset X$, что смежные с ней белые клетки $e_1, \dots, e_d$, занумерованные в порядке циклического обхода границы клетки e' , отвечают при указанном изоморфизме вершинам цикла Z , с сохранением циклического порядка вершин цикла, см. Замечание 5.9.

Пусть $L = L_{\hat{\Gamma}, Z}$ — двумерный клеточный комплекс, полученный приклеивкой к графу $\hat{\Gamma}$ двумерных клеток вдоль $S' := |M(Z)|$ циклов множества $M(Z) := \{g(Z) \mid g \in \text{Aut}(\hat{\Gamma})\}$, по одной двумерной клетке вдоль каждого цикла этого множества. Фиксируем вершину $A \in Z$ и рассмотрим оба полуребра $r, r' \subset Z$, содержащие эту вершину.

Утверждение 7.6. *Предположим, что цикл Z обладает следующими свойствами:*

- (симметричность) для любой сохраняющей ориентацию симметрии $h \in \text{Aut}(Z)$ найдётся такая симметрия $g \in \text{Aut}(\hat{\Gamma})$, что $g(Z) = Z$, $g|_Z = h$;
- (жёсткость) для любой симметрии $g \in \text{Aut}(\hat{\Gamma})$ со свойством $g(r \cup r') = r \cup r'$ выполнено $g(Z) = Z$, а для любых двух симметрий $g_1, g_2 \in \text{Aut}(\hat{\Gamma})$ со свойствами $(r \cup r') \cap g_1(r \cup r') = (r \cup r') \cap g_2(r \cup r') = r$ выполнено $g_1(r \cup r') = g_2(r \cup r')$.

Тогда к каждому ребру комплекса $L = L_{\hat{\Gamma}, Z}$ примыкает не более двух двумерных клеток, и верны следующие утверждения:

(А) Если примитивный неориентированный атом X с указанными выше свойствами 1, 2 существует, то он единствен, и отвечающее ему клеточное разбиение замкнутой поверхности на чёрные двумерные клетки (см. Определение 1.5 и последующий текст) изоморфно клеточному комплексу L . В частности, комплекс L гомеоморфен замкнутой двумерной поверхности, а ориентируемость атома X равносильна ориентируемости этой поверхности. Ориентируемый атом X отражаем (см. Определение 1.4.Б) тогда и только тогда, когда условие симметричности, см. выше, выполнено для любой (не обязательно сохраняющей ориентацию) симметрии $h \in \text{Aut}(Z)$.

(Б) Существование неориентированного атома X с указанными выше свойствами равносильно тому, что комплекс L гомеоморфен замкнутой двумерной поверхности (т.е. является абстрактным многогранником), а также равносильно выполнению следующих двух условий:

1. существует такая симметрия $g_3 \in \text{Aut}(\hat{\Gamma})$, что $g_3(r') = r$ и $g_3(r) \neq r'$ (т.е. к любому ребру комплекса L примыкает не менее двух двумерных клеток);
2. пусть $g_3 \in \text{Aut}(\hat{\Gamma})$ — некоторая (а значит, любая) симметрия из предыдущего условия; тогда сопоставление полуребру $h(r) \subset \hat{\Gamma}$ двух полурёбер $h(r')$ и $h(g_3(r))$, где $h \in \text{Aut}(\hat{\Gamma})$ и $h(A) = A$, определяет циклический порядок на множестве полурёбер графа $\hat{\Gamma}$, содержащих вершину A (т.е. любая вершина комплекса L не является локально разбивающей).

Доказательство. Покажем сначала, что каждое ребро графа $\hat{\Gamma}$ принадлежит не более чем двум циклам множества $M(Z)$. В силу симметричности графа $\hat{\Gamma}$, достаточно это доказать для ребра $\tilde{r}$ графа $\hat{\Gamma}$, содержащего полуребро r . Предположим, что $\tilde{r} \subset \tilde{g}(Z) = Z_1 \neq Z$ для некоторого $\tilde{g} \in \text{Aut}(\hat{\Gamma})$. Тогда $A \in Z_1$. Рассмотрим поворот $h \in \text{Aut}(Z)$ цикла Z , переводящий вершину $A \in Z$ в вершину $\tilde{g}^{-1}(A) \in Z$. В силу условия симметричности, найдётся симметрия $g \in \text{Aut}(\hat{\Gamma})$ со свойствами $g(Z) = Z$, $g|_Z = h$. Положим $g_1 = \tilde{g}g \in \text{Aut}(\hat{\Gamma})$, тогда

$Z_1 = g_1(Z)$ и $g_1(A) = A$. Так как $r \subset Z_1 = g_1(Z)$ и $g_1(A) = A$, то в силу первого свойства в условии жёсткости имеем $g_1(r \cup r') = r \cup r_1$ для некоторого полуребра r_1 , содержащего A и отличного от полурёбер r и r' . Предположим теперь, что имеется третий цикл $Z_2 \in M(Z)$, содержащий ребро $\tilde{r}$ и отличный от цикла Z . Как для цикла Z_1 , имеем $Z_2 = g_2(Z)$ для некоторой симметрии $g_2 \in \text{Aut}(\hat{\Gamma})$ со свойствами $g_2(A) = A$ и $g_2(r \cup r') = r \cup r_2$, где r_2 — некоторое полуребро, содержащее A и отличное от полурёбер r и r' . Согласно второму свойству в условии жёсткости, $r_1 = r_2$. Так как $g_1(r \cup r') = g_2(r \cup r')$, то $g_2^{-1}g_1(r \cup r') = r \cup r'$, откуда по первому свойству в условии жёсткости имеем $g_2^{-1}g_1(Z) = Z$, т.е. $g_1(Z) = g_2(Z)$. Таким образом, $Z_1 = Z_2$, т.е. каждое ребро графа $\hat{\Gamma}$ принадлежит не более чем двум циклам множества $M(Z)$. Значит, к каждому ребру комплекса L примыкает не более двух двумерных клеток.

(Б) Пусть X — примитивный атом, удовлетворяющий требуемым свойствам. Пусть C — отвечающее атому X клеточное разбиение замкнутой поверхности на чёрные двумерные клетки (грани), и пусть $\tilde{e}$ — его грань, отвечающая чёрной двумерной клетке e' , см. Замечание 5.9. Его одномерный остов C^1 изоморфен графу $\hat{\Gamma}$, причём двумерная клетка $\tilde{e}$ приклеивается к C^1 при помощи гомеоморфизма окружности в цикл $\varphi(Z) \subset C^1$, где $\varphi: \hat{\Gamma} \rightarrow C^1$ — изоморфизм. Рассмотрим индуцированный гомоморфизм $\varphi^*: \text{Aut}(C) \rightarrow \text{Aut}(\hat{\Gamma})$, и пусть $ba^{-1} \in \text{Aut}(C)$ — элементарное вращение вокруг вершины A . Тогда d полурёбер $\varphi^*((ba^{-1})^l)(r)$, $0 \leq l \leq d-1$, содержат вершину A и попарно различны, причём $\varphi^*(ba^{-1})(r') = r$ или $\varphi^*(ba^{-1})(r) = r'$. Положим $g_3 = \varphi^*(ba^{-1})$ или $g_3 = \varphi^*(ab)$, соответственно, тогда $g_3(r') = r$. Так как $d \geq 3$, то $g_3(r) \neq r'$. Это доказывает свойство 1 в (Б). В частности, ребро $\tilde{r}$ принадлежит двум циклам Z и $g_3(Z)$, причём $g_3(Z) \neq Z$ в силу $r \cup r' \neq r \cup g_3(r) = g_3(r \cup r')$. Поэтому к каждому ребру примыкает не менее двух (а потому ровно две) граней комплекса C .

Докажем свойство 2 в (Б). Для построенной выше симметрии $g_3 \in \text{Aut}(\hat{\Gamma})$ и для симметрий $h = h_l = g_3^l$, $0 \leq l \leq d-1$, рассматриваемое сопоставление определяет циклический порядок на множестве полурёбер графа $\hat{\Gamma}$, содержащих вершину A (так как ba^{-1} является элементарным вращением вокруг вершины A). При $h = \text{id}$ рассматриваемое сопоставление не зависит от выбора симметрии g_3 , в силу второго свойства в условии жёсткости. Поэтому (в силу симметричности графа $\hat{\Gamma}$) при любом $h \in \text{Aut}(\hat{\Gamma})$ сопоставление тоже не зависит от выбора симметрии g_3 и обладает требуемым свойством.

Покажем, что свойства 1, 2 в (Б) достаточны для существования атома X . В силу свойства 1 в (Б), к каждому ребру комплекса L примыкают ровно две двумерные клетки. В силу свойства 2 в (Б), каждая вершина комплекса L не является локально разбивающей. Поэтому комплекс L гомеоморфен замкнутой двумерной поверхности, т.е. определяет клеточное разбиение замкнутой двумерной поверхности. Разбиение L максимально симметрично, поскольку оно допускает элементарное вращение грани $\tilde{e}$ (в силу условия симметричности) и элементарное вращение g_3 вокруг вершины $A \in \partial\tilde{e}$, см. Утверждение 2.8. Поэтому соответствующий (неориентированный) атом максимально симметричен.

(А) Пусть X — примитивный (неориентированный) атом, удовлетворяющий требуемым свойствам, и пусть C — отвечающее атому X клеточное разбиение замкнутой поверхности на чёрные двумерные клетки (грани). Пусть $G = \varphi^*(\text{Aut}(C)) \subset \text{Aut}(\hat{\Gamma})$, $M'(Z) := \{g(Z) \mid g \in G\} \subset M(Z)$. По доказанному выше, каждое ребро графа $\hat{\Gamma}$ принадлежит не менее чем двум циклам множества $M'(Z)$. Так как C является двумерной поверхностью, то таких циклов не более двух (а потому ровно два). Поэтому каждое ребро графа $\hat{\Gamma}$ принадлежит ровно двум циклам множества $M'(Z)$, и к каждому такому циклу приклеена ровно одна двумерная клетка (грань) комплекса C . Отсюда и из свойства 1

в (Б), имеем $M'(Z) = M(Z)$. Это даёт изоморфизм клеточных комплексов $L \simeq C$. $\square$

Определение 7.7. Пусть X — примитивный максимально симметричный ориентированный атом, у которого граф смежности белых клеток — такой же, как у атома P_i для некоторого $i \in \{1, \dots, 5\}$ (являющегося усечённым платоновым S_i -гранником). Если атом X неприводим (см. 1.2) и не изоморфен атому P_i , то отвечающий ему абстрактный S_i -гранник (см. Определение 1.5) назовём *псевдо- S_i -гранником*, а сам ориентированный атом X назовём *усечённым псевдо- S_i -гранником*.

Пример 7.8. Пусть $\hat{\Gamma}_i$ — граф смежности белых клеток атома P_i , $1 \leq i \leq 5$, см. 1.4. Тогда $S_i \geq 3$, $d_i \geq 3$, и соответствующий простой цикл $Z_i \subset \hat{\Gamma}_i$ имеет наименьшую возможную длину $d'_i \geq 3$ и является жёстким, см. Утверждение 7.6.А. Найдём остальные примитивные максимально симметричные атомы X с графом смежности $\hat{\Gamma}_i$ (т.е. усечённые “псевдо- S_i -гранники”). Если рассмотреть P_i как усечённый S_i -гранник (см. Определение 1.5), то $\hat{\Gamma}_i$ — одномерный остов двойственного ему многогранника. Отсюда нетрудно найти все простые циклы $Z \subset \hat{\Gamma}_i$, удовлетворяющие условию симметричности из Утверждения 7.6.А и условию 1 из Утверждения 7.6.Б (эти два условия, очевидно, необходимы для существования атома X). При каждом i такой цикл Z однозначно (с точностью до автоморфизма графа $\hat{\Gamma}_i$) определён своей длиной d' и удовлетворяет условию жёсткости из 7.6.А и условию 2 из 7.6.Б, а также условию симметричности для любого (не обязательно сохраняющего ориентацию) автоморфизма цикла Z . По Утверждению 7.6, каждому такому циклу однозначно отвечает примитивный максимально симметричный (неориентированный) атом X , причём атом неориентируем или отражаем. Получаем 12 таких атомов с данными графами смежности белых клеток:

- ($i = 1$) усечённый тетраэдр P_1 ($d' = d'_1 = 3$); неориентируемый атом $P_3/\mathbb{Z}_2$ рода 1 — усечённый полу-октаэдр ($d' = 4$);
- ($i = 2$) усечённый куб P_2 ($d' = d'_2 = 3$); неориентируемый атом рода 4 ($d' = 6$);
- ($i = 3$) усечённый октаэдр P_3 ($d' = d'_3 = 4$); усечённый “псевдо-октаэдр” $P_7 = T_{(2,0)}^\Delta = (K_4^{12,0})^*$ рода 1 ($d' = 6$);
- ($i = 4$) усечённый додекаэдр P_4 ($d' = d'_4 = 3$); усечённый кеплеров псевдо-додекаэдр P_6 рода 4 ($d' = 5$); неориентируемый атом рода 10 ($d' = 6$); неориентируемый атом рода 14 ($d' = 10$);
- ($i = 5$) усечённый икосаэдр P_5 ($d' = d'_5 = 5$); неориентируемый атом рода 6 ($d' = 10$).

Выкидывая из этого списка неориентируемые атомы, получаем 5 усечённых платоновых многогранников $P_1, \dots, P_5$, усечённый кеплеров псевдо-додекаэдр P_6 и усечённый “псевдо-октаэдр” $P_7 = T_{(2,0)}^\Delta = (K_4^{12,0})^*$. Атом P_6 (см. рис. 7) неприводим и отличен от P_4 , а потому отвечающий ему многогранник действительно является псевдо-многогранником, т.е. псевдо-додекаэдром (см. Определение 7.7). Атом P_7 изображён на рис. 13; он приводим, так как двойственный ему атом непримитивен и двулистно накрывает атом $P_1 = K_4^6$. Соответствующий атому P_7 многогранник — “псевдо-октаэдр” — является двулистным накрытием тетраэдра с ветвлениями в вершинах (см. рис. 13). Каждый из атомов P_6 и P_7 отражаем (см. Определение 1.4.Б). Это доказывает следующую теорему.

Рис.13

Теорема 7.9. *Имеется единственный псевдо-многогранник — это кеплеров псевдо-додекаэдр. Ему отвечает неприводимый ориентированный атом P_6 рода 4, см. рис. 7. Этот ориентированный атом отражаем.* $\square$

Теорема 7.10. *Любой максимально симметричный ориентированный атом, имеющий ровно 12 5-угольных белых клеток и d' -угольные чёрные клетки при нечётном d' , совпадает либо с атомом P_4 (усечённым додекаэдром, $d' = 3$), либо с атомом P_6 (усечённым кеплеровым псевдо-додекаэдром, см. 1.4, $d' = 5$). В частности, этот ориентированный атом отражаем, а при $d' = 5$ двойствен самому себе (см. Определение 1.4.Б).*

Доказательство. Пусть X — максимально симметричный ориентированный атом с ровно 12 5-угольными белыми клетками.

Шаг 1. Так как $d = 5$ — простое и $12 > 2$, то атом X примитивен.

Шаг 2. Пусть, в обозначениях доказательства Теоремы 7.1, $a_i \in \text{Aut}(X)$ — элементарное вращение белой клетки e_i . Из доказательства этой теоремы следует, что клетка $e = e_1$ является смежной с клетками $e_2, \dots, e_6$, и симметрия $a = a_1 \in \text{Aut}(X)$ индуцирует на множестве белых клеток подстановку

$$\hat{a} = (1)(2\ 3\ 4\ 5\ 6)(7\ 8\ 9\ 10\ 11)(12) \quad (25)$$

для подходящей перенумерации белых клеток $e_7, \dots, e_{12}$. Следовательно, $a = a_{12}^k$ для некоторого $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Из симметричности ориентированного атома X получаем $k^2 \equiv 1 \pmod{5}$, откуда $k \in \{1, 4\}$. В силу симметричности атома X , имеется единственная инволюция $\tau \in \Sigma_{12}$, такая что $a_i = a_{\tau(i)}^k$ и $\tau(i) \neq i$ для любого $i = 1, \dots, 12$. Имеем $\tau(1) = 12$ и $\tau(12) = 1$.

Шаг 3. Найдём разложение инволюции τ в произведение независимых циклов (после подходящей циклической перенумерации белых клеток $e_7, \dots, e_{11}$). Так как $\tau(1) = 12$ и $\tau(12) = 1$, то $\tau(2) = x + y$ для некоторых $x \in \{2, 7\}$ и $y \in \{0, \dots, 4\}$. Покажем, что $x = 7$. Из $a_i(e_i) = e_i$ и $a_i(e_{\tau(i)}) = e_{\tau(i)}$ (см. шаг 2) следует, что для любой симметрии $g \in \text{Aut}(X)$ выполнено $ga_i g^{-1}(g(e_i)) = g(e_i) = e_{\hat{g}(i)}$ и $ga_i g^{-1}(g(e_{\tau(i)})) = g(e_{\tau(i)}) = e_{\hat{g}\tau(i)}$, откуда $\tau\hat{g}(i) = \hat{g}\tau(i)$ для любого $i = 1, \dots, 12$. Поэтому

$$\tau\hat{g} = \hat{g}\tau, \quad g \in \text{Aut}(X). \quad (26)$$

Отсюда для любого $j \in \{0, \dots, 4\}$ выполнено $\tau(2 + j) = \tau\hat{a}^j(2) = \hat{a}^j\tau(2) = \hat{a}^j(x + y) = x + \overline{j + y}$, где $\overline{z} \in \{0, \dots, 4\}$ — остаток от деления числа $z \in \mathbb{N}$ на 5. Если $x = 2$, то из $\tau^2 = \text{id}$ имеем $2 = \tau^2(2) = \tau(2 + y) = 2 + \overline{2y}$, откуда $y = 0$, т.е. $\tau(2) = 2$, что противоречит построению τ .

Следовательно, $x = 7$. Поэтому $\tau(2 + j) = 7 + \overline{j + y}$, $j \in \{0, \dots, 4\}$. После подходящей циклической перенумерации белых клеток $e_7, \dots, e_{11}$ можно считать, что $y = 0$, а потому инволюция τ имеет вид

$$\tau = (1\ 12)(2\ 7)(3\ 8)(4\ 9)(5\ 10)(6\ 11).$$

Шаг 4. Покажем, что смежными с клеткой e_{12} являются клетки $e_7, \dots, e_{11}$. Действительно, в противном случае некоторая клетка e_j , $2 \leq j \leq 6$, является смежной с e_{12} . Пусть $e_{j_1}, \dots, e_{j_5}$ — все белые клетки, смежные с e_j . Тогда $1, 12 \in \{j_1, \dots, j_5\}$, и подстановка $\hat{a}_j$ действует как цикл длины 5 на $\{j_1, \dots, j_5\}$. Определим число $l \in \{1, 2, 3, 4\}$ условием $\hat{a}_j^l(1) = 12$. Тогда $\hat{a}_j^l(12) = 1$ в силу (26) и $\tau(1) = 12$, $\tau(12) = 1$. Поэтому $\hat{a}_j^{5l}(1) = 12$, что противоречит $\hat{a}_j^5 = \text{id}_X$.

Шаг 5. Покажем, что граф смежности $\hat{\Gamma}$ белых клеток атома X изоморфен одномерному остову икосаэдра. Рассмотрим ограничение $\hat{\Gamma}'$ графа смежности на множество вершин $\{2, 3, 4, 5, 6\}$. Степень вершины в графе Γ' может равняться 0, 2 или 4, в силу симметричности графа $\hat{\Gamma}'$ относительно $\hat{a}$.

Если степень равна 4, вершины 1, 2, 3, 4, 5, 6 соединяются только между собой, так что граф смежности несвязен. Противоречие. Если степень вершины равна 0, то множество вершин графа смежности распадается на четыре подмножества: $\{1\}$, $\{2, 3, 4, 5, 6\}$, $\{7, 8, 9, 10, 11\}$, $\{12\}$, таких что рёбра графа $\hat{\Gamma}$ соединяют вершины только из разных подмножеств. Следовательно, все циклы в графе смежности имеют чётную длину, значит, количество сторон у чёрных клеток тоже должно быть чётным, что тоже ведёт к противоречию.

Таким образом, степень вершины графа $\hat{\Gamma}'$ равна 2. Вершина 2, в силу симметричности относительно $\hat{a}$, может соединяться с вершинами 3, 6, либо с вершинами 4, 5.

Случай 1: вершина 2 соединена рёбрами с вершинами 3, 6. Вершина 2 не может являться соседней для вершин 4, 5, 7, 8, 11, 12, следовательно, вершина 2 соединена рёбрами с вершинами 1, 3, 6, 9, 10. Используя инвариантность графа смежности относительно симметрии $\hat{a}$, мы однозначно восстанавливаем граф смежности. Он совпадает с одномерным остовом икосаэдра.

Случай 2: вершина 2 соединена рёбрами с вершинами 4, 5. Так же, как и выше, граф смежности однозначно восстанавливается и совпадает с одномерным остовом икосаэдра.

Шаг 6. Согласно примеру 7.8 при $i = 4$, имеем $X = P_4$ или $X = P_6$. $\square$

Теорема 7.11. *При любом $S \leq 6$ любой примитивный максимально симметричный ориентированный атом с ровно S белыми клетками является сферическим или торическим, а потому является одним из примитивных атомов из примера 5.2. Таких ориентированных атомов ровно 10:*

- ($S = 2$) сферический ориентированный атом $B_1 = C_1$;
- ($S = 3$) сферический ориентированный атом D_3 ;
- ($S = 4$) два сферических ориентированных атома D_4 и P_1 (усечённый тетраэдр);
- ($S = 5$) три ориентированных атома: сферический ориентированный атом D_5 и два торических ориентированных атома $T_{(2,1)}^\square$ и $T_{(1,2)}^\square$ квадратного типа (1, 2) и (2, 1) (отвечающие карте Л. Хеффера [Н1891, с.491] на торе из пяти квадратов);
- ($S = 6$) три ориентированных атома: два сферических ориентированных атома D_6 и P_2 (усечённый куб), и торический ориентированный атом $T_{(1,1)}^\triangle$ треугольного типа (1, 1).

Доказательство. Пусть X — примитивный максимально симметричный ориентированный атом с ровно S белыми клетками, являющимися d -угольниками, а также с ровно S' чёрными клетками, являющимися d' -угольниками. Из примитивности атома имеем $1 \leq d < S$.

Случай 1: $d = 1, 2$. При $d = 1$ имеется единственный максимально симметричный ориентированный атом $B_1 = C_1$ (для него $(S, S', d, d') = (2, 1, 1, 2)$), а при $d = 2 < S$ — единственный максимально симметричный ориентированный атом D_S (для него $(S, S', d, d') = (S, 2, 2, S)$). Поэтому при $S = 2$ имеем $d = 1$ и $X \in B_1 = C_1$, а при $S = 3$ имеем $d = 2$ и $X \in D_3$.

Случай 2: $S = 4$. Тогда $d \in \{2, 3\}$. При $d = 2$ имеем $X \in D_4$, см. случай 1. Пусть теперь $d = 3$. Тогда граф смежности белых клеток (см. Определение 1.4.В) атома X имеет 4 вершины и не имеет петель и кратных рёбер, а каждая его вершина имеет степень 3. Такой граф единствен — это полный граф K_4 . По Теореме 1.18.А, имеется единственный примитивный максимально симметричный ориентированный атом с графом смежности K_4 . Такой атом

можно угадать — это атом $X = P_1$. Дадим другое доказательство единственности ориентируемого атома X с графом смежности K_4 . Очевидно, что любой простой цикл Z на графе $K_4 = \hat{\Gamma}_1$ является треугольником ($d' = 3$) или четырёхугольником ($d' = 4$). Согласно примеру 7.8 при $i = 1$, оба эти цикла реализуются: при $d' = 3$ имеем $X = P_1$, а при $d' = 4$ имеем усечённый полу-октаэдр $X = P_3/\mathbb{Z}_2$ — неориентируемый атом, который получается из сферического атома P_3 (усечённого октаэдра) отождествлением каждой пары “диаметрально противоположных” точек.

Случай 3: $S = 5$. Рассмотрим граф смежности белых клеток атома X . Так как он связан и имеет нечётное число вершин, степени которых равны между собой, то порядок вершины равен либо $d = 2$, когда мы получаем цикл O_5 , либо $d = 4$, когда граф смежности является полным графом K_5 . Единственный примитивный атом, граф смежности белых клеток которого циклический, — это атом D_5 , см. случай 1.

Пусть граф смежности является полным. По Теореме 1.18.А, имеется ровно два примитивных ориентированных атома с таким графом смежности. Найдём их явно. Выберем некоторую белую клетку атома, присвоим ей номер 1 и занумеруем остальные белые клетки числами 2, 3, 4, 5 в порядке циклического обхода клетки 1. Тогда симметрия a , действующая на клетке 1 как элементарный поворот, задаёт на множестве белых клеток подстановку

$$\hat{a} = (1)(2345),$$

здесь мы используем запись подстановки в виде произведения циклов.

Рассмотрим симметрию b атома, которая является центральной симметрией относительно (единственной) общей вершины клеток 1 и 2. Тогда b на множестве белых клеток действует как одна из трёх подстановок:

$$(12)(34)(5), \quad (12)(35)(4), \quad (12)(45)(3).$$

Рассмотрим случай $\hat{b} = (12)(35)(4)$, тогда $\hat{a}^2\hat{b} = (142)(3)(5)$, и мы получаем нетривиальную симметрию, оставляющую на месте две смежные белые клетки. Это противоречит примитивности атома X , согласно Утверждению 5.8.Б.

Предположим теперь, что $\hat{b} = (12)(45)(3)$. Подстановки $\hat{a}, \hat{b}$ порождают группу G порядка 20, транзитивно действующую на множестве $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Согласно Утверждению 7.3, группе G соответствует некоторый примитивный ориентированный максимально симметричный атом. Для нахождения этого атома в явном виде, укажем циклический порядок, в котором белые клетки примыкают к любой белой клетке. Например, для клетки номер 2 получаем, что действие элементарного поворота клетки 2 имеет вид $\hat{b}\hat{a}\hat{b}^{-1} = (2)(1354)$, то есть циклический порядок примыкания следующий: 1, 3, 5, 4. Зная порядок примыкания, можно однозначно восстановить клеточное разбиение примитивного атома. В данном случае мы получаем ориентированный атом $T_{(2,1)}^\square$.

Случай $\hat{b} = (12)(34)(5)$ приводит к ориентированному атому $T_{(1,2)}^\square$.

Случай 4: $S = 6$. Степень d вершин в графе смежности белых клеток атома X может быть равна 2, 3, 4, 5.

Случай 4а: степень равна 5. Тогда граф смежности является полным. Так как $S = 6$ не является степенью простого числа, то по Теореме 1.18.А этот случай не реализуется.

Случай 4б: степень равна 4. Так как $S = 6$ и $d = 4$, то по Теореме 7.4 ориентированный атом X изоморфен ориентированному атому P_2 .

Случай 4в: степень равна 3. Занумеруем белые клетки атома X , чтобы смежными с клеткой 1 в порядке циклического обхода были клетки 2, 3, 4. Пусть a — симметрия атома, действующая как элементарный поворот на клетке 1. Так как $a^3 = \text{id}$, то $\hat{a} = (1)(234)(5)(6)$.

Клетки 5 и 6 не могут быть смежными, так как имеется нетривиальная симметрия a , оставляющая их инвариантными, см. Утверждение 5.8.Б. Следовательно, смежными для каждой из клеток 5,6 являются клетки 2,3,4. Тогда никакие две из клеток 2,3,4 не имеют общих вершин. Таким образом, граф смежности в данном случае равен $K_{3,3}$ (граф Томсена), и имеется разбиение белых клеток на два подмножества $\{1, 5, 6\}, \{2, 3, 4\}$, сохраняющееся при симметриях атома.

Центральная симметрия b относительно общей вершины клеток 1 и 2 действует как одна из двух подстановок: $(12)(35)(46)$ или $(12)(36)(45)$. Но эти подстановки отличаются только порядком нумерации клеток 5 и 6, поэтому ориентированные атомы, которые из них могут получиться, должны совпадать. Применение Утверждения 7.3 к паре подстановок $\hat{a}, \hat{b}$ (или непосредственное восстановление циклического порядка смежности для всех белых клеток, см. случай 3) приводит к ориентированному атому $T_{(1,1)}^\Delta$.

Случай 4g: степень равна 2. Такой примитивный атом единствен — это D_6 , см. случай 1. $\square$

8 Классификация максимально симметричных атомов с не более чем 6 белыми клетками

Как выше, во всех утверждениях под ориентированным атомом понимается класс изоморфности оснащённой пары $(\bar{P}, K)^\#$, а во всех доказательствах он понимается как оснащённая пара $(\bar{P}, K)^\#$, см. Замечание 1.8.

Как отмечалось выше, описание (в терминах правильных карт и копредставлений групп) максимально симметричных ориентированных атомов с двумя белыми клетками имеется в работе Браханы [B27, с.280], а с числом белых клеток, не превышающем 5, — в работе Гарбе [G69].

Утверждение 8.1. *Пусть X — максимально симметричный ориентированный атом, имеющий ровно одну белую клетку. Тогда $X = A_n$, где n — сложность атома, см. Введение. Более точно, Ориентированная хордовая диаграмма ориентированного атома X , см. Определение 1.6, состоит из ориентированной окружности $S^1 = \{e^{i\phi} \mid 0 \leq \phi < 2\pi\}$ и n хорд, соединяющих пары диаметрально противоположных точек $(e^{2\pi j i/n}, e^{\pi i + 2\pi j i/n}) \in S^1 \times S^1$, $j \in \mathbb{Z}$, $0 \leq j < \frac{n}{2}$. Атом имеет род $g = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ и состоит из одной белой клетки ($2n$ -угольника) и из одной либо двух чёрных клеток ($2n$ -угольника или двух n -угольников), при нечётном и чётном n соответственно.*

Доказательство. Рассмотрим ориентированную хордовую диаграмму атома X . Зафиксируем конец некоторой хорды и рассмотрим симметрию a атома X , которая переводит его в другой конец этой же хорды. Так как ориентированная окружность переходит в себя, то a есть вращение хордовой диаграммы. С другой стороны, симметрия a переставляет концы выделенной хорды, следовательно, преобразование a^2 оставляет данную хорду неподвижной, а значит, является тождественным отображением. Отсюда вытекает, что рассматриваемая хорда соединяет противоположные точки ориентированной окружности. То же самое верно в отношении других хорд диаграммы. Таким образом, структура атома определена однозначно.

Рассматривая в духе Определения 1.5 атом X как $2n$ -угольник со склеенными противоположными сторонами, мы находим, что число вершин разбиения (которые соответствуют чёрным клеткам) равно 1 при нечётном n и равно 2 при чётном n . $\square$

По Теореме 7.11 единственный примитивный максимально симметричный ориентированный атом с двумя белыми клетками — это сферический ориентированный атом $B_1 = C_1$. Поэтому из Следствия 6.2 для $S = 2$ и $S' = 1$ получаем следующее утверждение, эквивалентное утверждению Брахану [B27, с.280] (сформулированному в терминах копредставлений групп).

Утверждение 8.2. Пусть X — максимально симметричный ориентированный атом сложности n , имеющий ровно две белые клетки. Тогда его примитивизация X_{prim} — это сферический ориентированный атом, принадлежащий классу изоморфности $B_1 = C_1$, и у которого граф смежности белых клеток изоморфен K_2 (см. Определение 1.4.B). Ориентированный атом X совпадает с одним из ориентированных атомов $K_2^{n,l}$, параметризованных парой целых чисел (n, l) , где $n \geq 1$ — сложность атома (равная степени k отображения примитивизации),

$$l^2 \equiv 1 \pmod{n}, \quad 0 \leq l < n.$$

Более точно, ориентированная хордовая диаграмма ориентированного атома $K_2^{n,l}$ состоит из двух ориентированных окружностей $S_1^1 \approx S_2^1 = \{e^{i\phi} \mid 0 \leq \phi < 2\pi\}$ и n хорд, соединяющих пары точек $(e^{2\pi ji/n}, e^{2\pi lj/n}) \in S_1^1 \times S_2^1$ этих окружностей, $j \in \mathbb{Z}$, $0 \leq j < n$. Атом $K_2^{n,l}$ имеет 2 белые и $\gcd(l+1, n)$ чёрных клеток, каждая его белая клетка является n -угольником, а каждая чёрная $\frac{2n}{\gcd(l+1, n)}$ -угольником. Род атома $K_2^{n,l}$ равен $\frac{n - \gcd(l+1, n)}{2}$. При этом

$$K_2^{n,1} = B_n, \quad n \geq 2, \quad K_2^{n,n-1} = C_n, \quad n \geq 1.$$

Ориентированные атомы $K_2^{n,l}$, отвечающие различным парам чисел (n, l) , попарно различны.

Доказательство. Из Теоремы 7.11 следует, что $X_{\text{prim}} = B_1 = C_1$, см. Определение 5.1 и Утверждение 5.5.

В соответствии со Следствием 5.6 классификация атомов с двумя белыми клетками сводится к описанию отображений примитивизации над B_1 . Описание отображений примитивизации над B_1 можно получить, если в Следствии 6.2 положить $S = 2$, $S' = 1$ и $g = 0$. $\square$

По Теореме 7.11 единственный примитивный максимально симметричный ориентированный атом с тремя белыми клетками — это сферический ориентированный атом D_3 . Поэтому из примера 6.3.A для $S = 3$ получаем следующее утверждение.

Утверждение 8.3. Пусть X — максимально симметричный ориентированный атом сложности n , имеющий ровно три белые клетки. Тогда n нечётно и кратно 3, а примитивизация X_{prim} атома X — это сферический ориентированный атом D_3 , у которого граф смежности белых клеток есть $K_3 = O_3$ (см. Определение 1.4.B). Ориентированный атом X совпадает с ориентированным атомом $K_3^n = O_3^n$, параметризованным нечётным натуральным числом $n \geq 3$, кратным 3 и равным сложности атома (причём степень отображения примитивизации равна $k = \frac{n}{3}$). Более точно, ориентированная хордовая диаграмма ориентированного атома $K_3^n = O_3^n$ состоит из трех ориентированных окружностей $S_1^1 \approx S_2^1 \approx S_3^1 = \{e^{i\phi} \mid 0 \leq \phi < 2\pi\}$ и n хорд, соединяющих пары точек $(e^{6\pi ji/n}, e^{\pi i + 6\pi ji/n}) \in S_u^1 \times S_{u+1}^1$ этих окружностей, $j \in \mathbb{Z}$, $0 \leq j < n/3$, $u = 1, 2, 3$, где $S_4^1 := S_1^1$. Атом $K_3^n = O_3^n$ имеет 3 белые и $2\gcd(3, \frac{n/3+3}{2})$ чёрных клеток, каждая его белая клетка является $\frac{2n}{3}$ -угольником, а каждая чёрная $\frac{n}{\gcd(3, \frac{n/3+3}{2})}$ -угольником. Род атома $K_3^n = O_3^n$ равен $\frac{n-1}{2} - \gcd(3, \frac{n/3+3}{2})$. $\square$

По Теореме 7.11 имеется ровно два примитивных максимально симметричных ориентированных атома с четырьмя белыми клетками — это сферические ориентированные атомы P_1 (усечённый тетраэдр) и D_4 (см. Введение). Применяя к атому P_1 Следствие 6.2 с $S = S' = 4$ и $d = d' = 3$, а к атому D_4 пример 6.3.Б, получаем следующее утверждение.

Утверждение 8.4. Пусть X — максимально симметричный ориентированный атом сложности n , имеющий ровно четыре белые клетки. Тогда его примитивизация X_{prim} — это один из сферических ориентированных атомов P_1 и D_4 , у которых граф смежности белых клеток изоморфен K_4 и O_4 , соответственно (см. Определение 1.4.В).

(А) Если $X_{\text{prim}} = P_1$, то n ратно 6, и ориентированный атом X совпадает с одним из ориентированных атомов $K_4^{n,r}$, параметризованных парой целых чисел (n, r) , где $n \geq 6$ — сложность атома (причём степень отображения примитивизации равна $k = \frac{n}{6}$), $0 \leq r < \frac{n}{6}$, $4r + 4 \equiv 0 \pmod{\frac{n}{6}}$. Более точно, ориентированная хордовая диаграмма ориентированного атома $K_4^{n,r}$ состоит из четырёх ориентированных окружностей $S_1^1 \approx S_2^1 \approx S_3^1 \approx S_4^1 = \{e^{i\phi} \mid 0 \leq \phi < 2\pi\}$ и n хорд, соединяющих пары точек

$$(e^{4\pi i \frac{3j+u-1}{n}}, e^{4\pi i \frac{3j+u-1}{n}}) \in S_u^1 \times S_4^1, \quad u = 1, 2, 3,$$

$$(e^{4\pi i \frac{3j+v}{n}}, e^{4\pi i \frac{3j+v+3r+3}{n}}) \in S_u^1 \times S_v^1, \quad (u, v) = (1, 2), (2, 3), (3, 1),$$

этих окружностей, $j \in \mathbb{Z}$, $0 \leq j < \frac{n}{6}$. У атома 4 белые и $4 \gcd(r, \frac{n}{6})$ чёрных клеток. Род атома $K_4^{n,r}$ равен $\frac{n}{2} - 2 \gcd(r, \frac{n}{6}) - 1$, каждая его белая клетка является $\frac{n}{2}$ -угольником, а каждая чёрная $\frac{n}{2 \gcd(r, \frac{n}{6})}$ -угольником. Ориентированные атомы $K_4^{n,r}$, отвечающие различным парам чисел (n, r) , попарно различны.

(Б) Если $X_{\text{prim}} = D_4$, то n ратно 4, и ориентированный атом X совпадает с одним из ориентированных атомов $O_4^{n,l,r}$, параметризованных тройкой целых чисел (n, l, r) , где $n \geq 4$ — сложность атома (причём степень отображения примитивизации равна $k = \frac{n}{4}$), $0 \leq l, r < k = \frac{n}{4}$,

$$l^2 \equiv 1 \pmod{k}, \quad 2(r + l + 1) \equiv 0 \pmod{k}.$$

Более точно, ориентированная хордовая диаграмма ориентированного атома $O_4^{n,l,r}$ состоит из четырёх ориентированных окружностей $S_1^1 \approx S_2^1 \approx S_3^1 \approx S_4^1 = \{e^{i\phi} \mid 0 \leq \phi < 2\pi\}$ и n хорд, соединяющих пары точек $(e^{2\pi j i/k}, e^{\pi i/k + 2\pi l j i/k}) \in S_u^1 \times S_{u+1}^1$ этих окружностей, $j \in \mathbb{Z}$, $0 \leq j < k$, $1 \leq u < 4$, и $(e^{2\pi j i/k}, e^{\pi(2r+1)i/k + 2\pi l j i/k}) \in S_4^1 \times S_1^1$, $j \in \mathbb{Z}$, $0 \leq j < k$. Ориентированный атом $O_4^{n,l,r}$ имеет род $\frac{n}{2} - \gcd(\frac{n}{4}, r) - 1$, 4 белые и $2 \gcd(\frac{n}{4}, r)$ чёрных клеток, каждая его белая клетка является $\frac{n}{2}$ -угольником, а каждая чёрная $\frac{n}{\gcd(\frac{n}{4}, r)}$ -угольником. Ориентированные атомы $O_4^{n,l,r}$, отвечающие различным тройкам чисел (n, l, r) , попарно различны.

Доказательство. Из Теоремы 7.11 следует, что $X_{\text{prim}} \in \{P_1, D_4\}$, см. Определение 5.1 и Утверждение 5.5.

(А) Классификация отображений примитивизации над атомом P_1 парами чисел (n, r) возникает из Следствия 6.2. Проверим, что описанная в формулировке данного утверждения хордовая диаграмма действительно отвечает ориентированному атому с примитивизацией P_1 и парой (n, r) .

Проверим сначала, что хордовая диаграмма является максимально симметричной. Для этого, в силу Утверждения 2.8, достаточно построить симметрии диаграммы $a = a_4$ и b , где a действует на окружности S_4^1 как элементарный поворот, а b есть симметрия относительно хорды с концами $1 \in S_1^1$ и $1 \in S_4^1$.

Далее мы будем использовать обозначение (u, j) для вершины диаграммы $e^{4\pi ij/n} \in S_u^1$, $1 \leq u \leq 4, j \in \mathbb{Z}$.

Построим симметрию a . Для этого достаточно определить её действие на вершинах диаграммы. По условию преобразование a циклически переставляет вершины, лежащие на окружности S_4^1 :

$$(4, j) \mapsto (4, j + 1).$$

Так как преобразование должно сохранять хорды, имеем следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} (4, 0) & \mapsto & (4, 1) \\ | & & | \\ (1, 0) & & (2, 1), \end{array}$$

то есть $(1, 0) \mapsto (2, 1)$. Следовательно,

$$(1, j) \mapsto (2, j + 1).$$

Аналогично получаем

$$(2, j) \mapsto (3, j + 1), \quad (3, j) \mapsto (1, j + 1).$$

Остаётся проверить корректность преобразования a , то есть что a переводит хорды диаграммы в хорды. Например, для хорды $(1, 3j + 2) - (2, 3j + 3r + 5)$ корректность следует из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} (1, 3j + 2) & \mapsto & (2, 3j + 3) \\ | & & | \\ (2, 3j + 3r + 5) & \mapsto & (3, 3j + 3r + 6). \end{array}$$

Проверка для остальных хорд производится аналогично.

Симметрия b характеризуется условием

$$(1, 0) \mapsto (4, 0), \quad (4, 0) \mapsto (1, 0),$$

откуда рассуждениями, аналогичными проведенным выше, получаем что b задаётся формулами

$$\begin{aligned} (1, j) &\mapsto (4, j), & (4, j) &\mapsto (1, j), \\ (2, j) &\mapsto (3, j - 3r - 3), & (3, j) &\mapsto (2, j + 3r + 3), \end{aligned}$$

причём отображение определено корректно.

Убедимся теперь, что хордовая диаграмма отвечает именно атому $K_4^{n,r}$. Минимальная степень q , такая что преобразование a^q оставляет все белые клетки на месте, равна 3. При факторизации по группе симметрий $\langle a^q \rangle$ получается хордовая диаграмма атома P_1 , причём порядок группы $\langle a^q \rangle$ (т.е. кратность накрытия) равен $\frac{n}{12}$. Остаётся проверить монодромию в центрах чёрных клеток. Симметрия $c = ba^{-1}$ отвечает элементарному вращению чёрной клетки. Тогда монодромия r' в центре чёрной клетки находится из соотношения $c^p = (a^q)^{r'}$, где p — наименьшая степень, в которой симметрия оставляет на месте все белые клетки.

В нашем случае c задаётся формулами

$$\begin{aligned} (1, j) &\mapsto (2, j + 3r + 2), & (4, j) &\mapsto (1, j - 1), \\ (2, j) &\mapsto (4, j - 1), & (3, j) &\mapsto (3, j - 3r - 4), \end{aligned}$$

откуда $p = 3$ и $r' = r$.

Таким образом, хордовая диаграмма отвечает атому, который обладает отображением примитивизации на атом P_1 , отвечающим паре (n, r) , то есть атому $K_4^{n,r}$.

(Б) Атом X связан отображением примитивизации с атомом D_4 . Отображения примитивизации над D_4 были описаны в примере 6.3.Б. $\square$

По Теореме 7.11 имеется ровно три примитивных максимально симметричных ориентированных атома с пятью белыми клетками — это сферический ориентированный атом D_5 и два торических ориентированных атома $T_{(2,1)}^\square$ и $T_{(1,2)}^\square$ квадратного типа $(1, 2)$ и $(2, 1)$ (см. Введение), отвечающие карте Л. Хеффтера [Н1891, с.491] на торе из пяти квадратов. Поэтому из примеров 6.3.А (при $S = 5$) и 6.7 получаем следующее утверждение.

Утверждение 8.5. Пусть X — максимально симметричный ориентированный атом сложности n , имеющий ровно пять белых клеток. Тогда его примитивизация X_{prim} — это либо сферический ориентированный атом D_5 , у которого граф смежности белых клеток (см. Определение 1.4.В) изоморфен O_5 , либо торический ориентированный атом $T_{(2,1)}^\square$ или $T_{(1,2)}^\square$ квадратного типа $(2, 1)$ или $(1, 2)$, у которого граф смежности белых клеток равен K_5 .

(А) Если $X_{\text{prim}} = D_5$, то n нечётно и кратно 5, и ориентированный атом X совпадает с ориентированным атомом O_5^n , параметризованным нечётным натуральным числом $n \geq 5$, кратным 5 (причём степень отображения примитивизации равна $k = \frac{n}{5}$). Более точно, ориентированная хордовая диаграмма ориентированного атома O_5^n состоит из пяти ориентированных окружностей $S_1^1 \approx S_2^1 \approx \dots \approx S_5^1 = \{e^{i\phi} \mid 0 \leq \phi < 2\pi\}$ и n хорд, соединяющих пары точек $(e^{10\pi ji/n}, e^{\pi i + 10\pi jli/n}) \in S_u^1 \times S_{u+1}^1$ этих окружностей, $j \in \mathbb{Z}$, $0 \leq j < n/5$, $1 \leq u \leq 5$, $S_6^1 := S_1^1$. Ориентированный атом O_5^n имеет 5 белых и $2 \gcd(5, \frac{n/5+5}{2})$ чёрных клеток, каждая его белая клетка является $\frac{2}{5}n$ -угольником, а каждая чёрная $\frac{n}{\gcd(5, \frac{n/5+5}{2})}$ -угольником. Род атома O_5^n равен $\frac{n-3}{2} - \gcd(5, \frac{n/5+5}{2})$.

(Б) Если $X_{\text{prim}} = T_{(2,1)}^\square$ — торический ориентированный атом квадратного типа $(2, 1)$, то X совпадает с ориентированным атомом K_5^n , параметризованным целым числом $n \geq 10$, которое сравнимо с 10 (mod 20) и равно сложности атома (при этом степень отображения примитивизации равна $k = \frac{n}{10}$). Более точно, ориентированная хордовая диаграмма ориентированного атома K_5^n состоит из пяти ориентированных окружностей $S_1^1 \approx S_2^1 \approx \dots \approx S_5^1 = \{e^{i\phi} \mid 0 \leq \phi < 2\pi\}$ и n хорд, соединяющих пары точек

$$(e^{5\pi i \frac{4j+u-1}{n}}, e^{5\pi i \frac{4j+u-1}{n}}) \in S_u^1 \times S_5^1, \quad u = 1, 2, 3, 4,$$

$$(e^{5\pi i \frac{4j+r(u,v)}{n}}, e^{5\pi i \frac{4j+r(u,v)+n/5}{n}}) \in S_u^1 \times S_v^1, \quad 1 \leq u < v \leq 4,$$

этих окружностей, $j \in \mathbb{Z}$, $0 \leq j < n/10$, где $r(2, 4) = 0$, $r(1, 2) = 1$, $r(1, 4) = r(2, 3) = 2$, $r(1, 3) = r(3, 4) = 3$. Ориентированный атом K_5^n имеет род $\frac{n}{2} - 4$, 5 белых клеток и 5 чёрных клеток, причём каждая его двумерная клетка имеет $\frac{2}{5}n$ сторон.

(В) Если $X_{\text{prim}} = T_{(1,2)}^\square$ — торический ориентированный атом квадратного типа $(1, 2)$, то X совпадает с ориентированным атомом $\overline{K_5^n}$, получающимся из ориентированного атома K_5^n заменой ориентации атома на противоположную.

Доказательство. Из Теоремы 7.11 следует, что $X_{\text{prim}} \in \{D_5, T_{(1,2)}^\square, T_{(2,1)}^\square\}$, см. Определение 5.1 и Утверждение 5.5.

(А) Ориентированные атомы X с примитивизацией $X_{\text{prim}} = D_5$ были рассмотрены в примере 6.3.А.

(Б) Атомы, чья примитивизация есть атом $T_{(2,1)}^{\square}$, классифицируются в примере 6.7. Проверка того, что представленная в формулировке данной леммы хордовая диаграмма соответствует атому K_5^n , производится так же, как в предыдущей лемме.

(В) Случай $X_{\text{prim}} = T_{(1,2)}^{\square}$ рассматривается аналогично. $\square$

По Теореме 7.11 имеется ровно три примитивных максимально симметричных ориентированных атома с шестью белыми клетками — это два сферических ориентированных атома P_2 (усечённый куб) и D_6 , и торический ориентированный атом $T_{(1,1)}^{\triangle}$ треугольного типа $(1,1)$, см. Введение. Применяя к каждому из них Следствие 6.2 или пример 6.8, получаем следующее утверждение.

Утверждение 8.6. Пусть X — максимально симметричный ориентированный атом сложности n , имеющий ровно шесть белых клеток. Тогда его примитивизация X_{prim} — это либо сферический ориентированный атом P_2 или D_6 , либо торический ориентированный атом $T_{(1,1)}^{\triangle}$ треугольного типа $(1,1)$. Для этих трёх примитивных ориентированных атомов графы смежности белых клеток (см. Определение 1.4.В) суть P_3^1 (одномерный остов октаэдра), O_6 и $K_{3,3}$, соответственно.

(А) Если $X_{\text{prim}} = P_2$, то ориентированный атом X совпадает с одним из ориентированных атомов $P_2^{n,r}$, параметризованных парой целых чисел (n, r) , где $n \geq 12$ — сложность атома, n делится на 12, но не делится на 48 (причём степень отображения примитивизации равна $k = \frac{n}{12}$), $0 \leq r < \frac{n}{12}$, $8r+6 \equiv 0 \pmod{\frac{n}{12}}$. Более точно, ориентированная хордовая диаграмма ориентированного атома $P_2^{n,r}$ состоит из шести ориентированных окружностей $S_1^1 \approx S_2^1 \approx \dots \approx S_6^1 = \{e^{i\phi} \mid 0 \leq \phi < 2\pi\}$ и n хорд, соединяющих пары точек

$$\begin{aligned} (e^{6\pi i \frac{4j+u-1}{n}}, e^{6\pi i \frac{4j+u-1}{n}}) &\in S_u^1 \times S_5^1, \quad u = 1, 2, 3, 4, \\ (e^{6\pi i \frac{4j+v-3}{n}}, e^{6\pi i \frac{4j+v-3}{n}}) &\in S_{v-1}^1 \times S_v^1, \quad v = 2, 3, 4, \\ (e^{6\pi i \frac{4j-2}{n}}, e^{6\pi i \frac{4j-2}{n}}) &\in S_4^1 \times S_1^1, \\ (e^{6\pi i \frac{4j+u+1}{n}}, e^{6\pi i \frac{4j-u(8r+5)}{n}}) &\in S_u^1 \times S_6^1, \quad u = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

этих окружностей, $j \in \mathbb{Z}$, $0 \leq j < \frac{n}{12}$. Ориентированный атом $P_2^{n,r}$ имеет род $\frac{n}{2} - 4 \gcd(r, \frac{n}{12}) - 2$, 6 белых и $8 \gcd(r, \frac{n}{12})$ чёрных клеток, каждая его белая клетка является $\frac{n}{3}$ -угольником, а каждая чёрная $\frac{n/4}{\gcd(r, \frac{n}{12})}$ -угольником. Ориентированные атомы $P_2^{n,r}$, отвечающие различным парам чисел (n, r) , попарно различны.

(Б) Если $X_{\text{prim}} = D_6$, то n кратно 6, и ориентированный атом X совпадает с одним из ориентированных атомов $O_6^{n,l,r}$, параметризованных тройкой целых чисел (n, l, r) , где $n \geq 6$ — сложность атома (причём степень отображения примитивизации равна $k = \frac{n}{6}$), $0 \leq l, r < k = \frac{n}{6}$,

$$l^2 \equiv 1 \pmod{k}, \quad rl \equiv r \pmod{k}, \quad 2r + 3(l+1) \equiv 0 \pmod{k}.$$

Более точно, ориентированная хордовая диаграмма ориентированного атома $O_6^{n,l,r}$ состоит из шести ориентированных окружностей $S_1^1 \approx S_2^1 \approx \dots \approx S_6^1 = \{e^{i\phi} \mid 0 \leq \phi < 2\pi\}$ и n хорд, соединяющих пары точек $(e^{2\pi j i/k}, e^{\pi i/k + 2\pi l j i/k}) \in S_u^1 \times S_{u+1}^1$ этих окружностей, $j \in \mathbb{Z}$, $0 \leq j < k$, $1 \leq u < 6$, и $(e^{2\pi j i/k}, e^{\pi(2r+1)i/k + 2\pi l j i/k}) \in S_6^1 \times S_1^1$, $j \in \mathbb{Z}$, $0 \leq j < k$. Ориентированный атом $O_6^{n,l,r}$ имеет род $\frac{n}{2} - \gcd(\frac{n}{6}, r) - 2$, 6 белых и $2 \gcd(\frac{n}{6}, r)$

чёрных клеток, каждая его белая клетка является $\frac{n}{3}$ -угольником, а каждая чёрная $\frac{n}{\gcd(\frac{n}{9}, r)}$ -угольником. Ориентированные атомы $O_6^{n,l,r}$, отвечающие различным тройкам чисел (n, l, r) , попарно различны.

(В) Если $X_{\text{prim}} = T_{(1,1)}^\Delta$, то n кратно 9, и ориентированный атом X совпадает с одним из ориентированных атомов $K_{3,3}^{n,l,c}$, параметризованных тройкой целых чисел (n, l, c) , где $n \geq 9$ — сложность атома, n делится на 9 (причём степень отображения примитивизации равна $k = \frac{n}{9}$), $0 \leq l, c < \frac{n}{9}$ и

$$l^2 \equiv 1 \pmod{\frac{n}{9}}, \quad (l+1)c \equiv 0 \pmod{\frac{n}{9}}, \quad 3c \equiv 0 \pmod{\frac{n}{9}}.$$

Более точно, ориентированная хордовая диаграмма ориентированного атома $K_{3,3}^{n,l,c}$ состоит из шести ориентированных окружностей $S_1^1 \approx S_2^1 \approx \dots \approx S_6^1 = \{e^{i\phi} \mid 0 \leq \phi < 2\pi\}$ и n хорд, соединяющих пары точек

$$\begin{aligned} (e^{6\pi i \frac{3j}{n}}, e^{6\pi i \frac{3j}{n}}) &\in S_1^1 \times S_2^1, \\ (e^{6\pi i \frac{3j+1}{n}}, e^{6\pi i \frac{3j}{n}}) &\in S_1^1 \times S_4^1, \quad (e^{6\pi i \frac{3j+2}{n}}, e^{6\pi i \frac{3j}{n}}) \in S_1^1 \times S_6^1, \\ (e^{6\pi i \frac{3j+1}{n}}, e^{6\pi i \frac{3j}{n}}) &\in S_2^1 \times S_3^1, \quad (e^{6\pi i \frac{3j+2}{n}}, e^{6\pi i \frac{3j}{n}}) \in S_2^1 \times S_5^1, \\ (e^{6\pi i \frac{3j+3c+1}{n}}, e^{6\pi i \frac{3j+1}{n}}) &\in S_3^1 \times S_4^1, \quad (e^{6\pi i \frac{3j+6c+2}{n}}, e^{6\pi i \frac{3j+1}{n}}) \in S_3^1 \times S_6^1, \\ (e^{6\pi i \frac{3j+1}{n}}, e^{6\pi i \frac{3j+6c+2}{n}}) &\in S_5^1 \times S_4^1, \quad (e^{6\pi i \frac{3j+2}{n}}, e^{6\pi i \frac{3j+3c+2}{n}}) \in S_5^1 \times S_6^1 \end{aligned}$$

этих окружностей, $j \in \mathbb{Z}$, $0 \leq j < \frac{n}{9}$. Ориентированный атом $K_{3,3}^{n,l,c}$ имеет род $\frac{1}{2}(n - 3\gcd(\frac{n}{9}, l+1)) - 2$, 6 белых клеток и $3\gcd(\frac{n}{9}, l+1)$ чёрных клеток, причём каждая его белая клетка является $\frac{n}{3}$ -угольником, а каждая чёрная $\frac{2n}{3\gcd(\frac{n}{9}, l+1)}$ -угольником. Ориентированные атомы $K_{3,3}^{n,l,c}$, отвечающие различным тройкам чисел (n, l, c) , попарно различны.

Доказательство. Из Теоремы 7.11 следует, что $X_{\text{prim}} \in \{P_2, D_6, T_{(1,1)}^\Delta\}$, см. Определение 5.1 и Утверждение 5.5.

(А) Отображения примитивизации над P_2 описаны в Следствии 6.2. Рассуждая, как в Утверждении 8.4, можно показать, что атому $P_2^{n,r}$ соответствует хордовая диаграмма, определённая в формулировке настоящей леммы.

(Б) Отображения примитивизации над D_6 описаны в примере 6.3.Б.

(В) Отображения примитивизации над $T_{(1,1)}^\Delta$ описаны в примере 6.8. Соответствие между атомом $K_{3,3}^{n,l,c}$ и определённой в формулировке леммы хордовой диаграммой устанавливается при помощи рассуждений, аналогичных рассуждениям Утверждения 8.4. $\square$

9 Описание максимально симметричных ориентированных атомов данной сложности

Как выше, во всех утверждениях под ориентированным атомом понимается класс изоморфности оснащённой пары $(\bar{P}, K)^\#$, а во всех доказательствах он понимается как оснащённая пара $(\bar{P}, K)^\#$, см. Замечание 1.8.

В этом параграфе рассматривается следующая задача. Пусть n — произвольное натуральное число. Описать максимально симметричные (ориентированные) атомы сложности n . В частности, вычислить количество таких атомов как функцию от числа n или (что проще) оценить это количество сверху или снизу. В настоящей работе мы ограничимся случаем ориентированных атомов. Для некоторых n (например, для простых и удвоенных простых) мы дадим полное решение задачи, а для остальных n получим частичный ответ.

Напомним, что для каждого натурального n существуют 4 максимально симметричных ориентированных атома сложности n , которые обозначены A_n, B_n, C_n, D_n , см. Введение и рис. 3,4.

Кроме того, имеется 6 максимально симметричных ориентированных атомов $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ рода 0 и 4, отвечающих пяти классическим правильным многогранникам (платоновым телам) и одному псевдо-многограннику (кепелеру псевдо-додекаэдру), см. Введение и рис. 6,7.

Возникает вопрос: при каких n имеются другие максимально симметричные ориентированные атомы сложности n , отличные от атомов A_n, B_n, C_n, D_n , а также от P_i при $n = n_i$, $1 \leq i \leq 6$?

Обозначение 9.1. Обозначим через $a(n)$ количество максимально симметричных ориентированных атомов сложности n , двойственных самим себе (см. Определение 1.4.Б), а через $b(n)$ — количество пар двойственных друг другу различных максимально симметричных ориентированных атомов сложности n . Аналогично, через $a'(n)$ и $b'(n)$ обозначим количества указанных атомов, не принадлежащих сериям A_n, B_n, C_n, D_n, P_i при $n = n_i$ и сериям торических атомов, см. 1.4. Пусть $c(n) = a(n) + 2b(n)$ — количество максимально симметричных ориентированных атомов сложности n , и пусть $\bar{c}(n) = a(n) + b(n)$, $c'(n) = a'(n) + 2b'(n)$, $\bar{c}'(n) = a'(n) + b'(n)$.

Теорема 9.2. Пусть n — произвольное натуральное число.

1) Если n — простое число или $n \in \{1, 4, 2p\}$, где p — простое число, $p \equiv 3 \pmod{4}$ и $p \neq 3$, то A_n, B_n, C_n, D_n исчерпывают собой список всех максимально симметричных ориентированных атомов сложности n (т.е. любой максимально симметричный ориентированный атом сложности n совпадает с одним из перечисленных ориентированных атомов).

2) Если $n = 2p$, где p — простое число и $p \equiv 1 \pmod{4}$, то кроме A_n, B_n, C_n, D_n имеется ровно два максимально симметричных ориентированных атома сложности n . Эти два ориентированных атома являются торическими (т.е. имеют род 1) и имеют квадратный тип (см. Введение), и получают друг из друга заменой ориентации атома на противоположную.

3) Если $n = 9$, то кроме ориентированных атомов A_9, B_9, C_9, D_9 имеется ровно два максимально симметричных ориентированных атома сложности 9. Эти два ориентированных атома являются торическими (т.е. имеют род 1), и совпадают с двойственными друг другу атомами $T_{(1,1)}^\Delta$ и $T_{(1,1)}^\blacktriangle$ (см. Введение).

4) Если $n = 6$, то кроме ориентированных атомов A_6, B_6, C_6, D_6 имеется ровно один максимально симметричный ориентированный атом сложности 6. Этот ориентированный атом является сферическим (т.е. имеет род 0), и совпадает с атомом P_1 (отвечающим “усечённому тетраэдру”).

5) Если $n \neq 9$ — составное число, не имеющее вида $2p$, где p — простое число, то кроме ориентированных атомов A_n, B_n, C_n, D_n и P_i при $n = n_i$ имеются и другие максимально симметричные ориентированные атомы сложности n . Более того, для каждого n такие атомы есть среди непримитивных атомов (см. Определение 5.1) рода ≥ 2 , являющихся разветвлённым накрытием с помощью отображения типа примитивизации (см. Определение 5.3 и Следствие 5.7) над ориентированным атомом D_S , где $S \in [2; n-1]$ — некоторый делитель n . При любом таком $n \leq 30$ количество $c(n)$ (соотв. $\bar{c}(n), c'(n), \bar{c}'(n)$) максимально симметричных ориентированных атомов сложности n приве-

дено в следующей таблице, а сами атомы перечислены в Замечании 9.4 ниже:

n	8	12	15	16	18	20	21	24	25	27	28	30
$c(n)$	8	15	8	14	9	12	10	35	6	14	12	16
$c'(n)$	3	7	4	9	4	6	4	31	2	8	8	9
$\bar{c}(n)$	6	9	4	10	7	8	5	21	3	7	8	11
$\bar{c}'(n)$	2	4	2	6	3	3	2	18	1	4	5	6

Замечание 9.3. Два торических ориентированных атома из пункта 2 Теоремы 9.2 имеют следующее описание. Пусть s, t — целые числа, такие, что $s > t \geq 0$ и $s^2 + t^2 = p$, где p — простое число и $p \equiv 1 \pmod{4}$. Как известно, для любого такого p пара (s, t) с указанным свойством существует и определена однозначно, см. [AR, теорема 17.6.1]. Рассмотрим торические максимально симметричные ориентированные атомы $T_{(s,t)}^\square$ и $T_{(t,s)}^\square$ квадратного типа (s, t) , см. Введение. Ориентированный атом $T_{(s,t)}^\square$ получается из ориентированного атома $T_{(t,s)}^\square$ сменой ориентации. Любой из них имеет сложность $2p$, ровно p белых и p чёрных двумерных клеток.

Доказательство. Напомним (см. Замечание 4.17), что количество рёбер, инцидентных двумерной клетке e , называется *числом сторон* этой клетки e . В случае максимально симметричного ориентированного атома это число одинаково для всех белых клеток (а также одинаково для всех чёрных клеток).

Пусть X — максимально симметричный ориентированный атом. Покажем, что, в обозначениях 1.15, имеет место простое, но важное соотношение (см. [T32, с.32]):

$$2n = Sd = S'd'. \quad (27)$$

Поскольку число вершин равно n , а степень каждой вершины равна 4 (т.е. с каждой вершиной инцидентно ровно 4 полуребра), то число полуребер равно $4n$, а следовательно, число ребер атома равно $2n$. Здесь *полуребрами* атома называются дуги, получающиеся делением ребер пополам (путем добавления вершины в середине каждого ребра). С другой стороны, к каждому ребру атома примыкает ровно одна белая клетка (и ровно одна чёрная клетка). Так как число сторон любой белой клетки равно d , а количество белых клеток равно S , то число всех ребер атома равно Sd . Поэтому $2n = Sd$. Аналогичным рассуждением с чёрными клетками показывается, что $2n = S'd'$.

При $d = 1$ все белые клетки ориентированного атома X являются одноугольниками, откуда $n = 1$ и $X = A_1 = D_1$. При $d = 2$ все белые клетки являются двуугольниками, откуда $X = D_n$. Отсюда и из $2n = Sd$ имеем

$$S \geq n \implies X = D_n. \quad (28)$$

Случай 1. Пусть $n = 1$. Так как $S \geq 1 = n$, то $X = A_1 = D_1$ в силу (28).

Случай 2. Пусть n — простое число или $n = 4$. Тогда из $2n = Sd$ имеем $S \in \{1, 2, n, 2n\}$ и $d = \frac{2n}{S}$.

Если $S \geq n$, то $X = D_n$ в силу (28). Если $S = 1$, то $X = A_n$ в силу Утверждения 8.1. Пусть $S = 2$. В силу Утверждения 8.2 максимально симметричный ориентированный атом X сложности n с двумя белыми клетками характеризуется целым числом l со свойствами

$$l^2 \equiv 1 \pmod{n}, \quad 0 < l < n. \quad (29)$$

Так как n — простое или $n = 4$, то $l = 1$ или $l = n - 1$, а потому $X = C_n$ или $X = B_n$ (см. Утверждение 8.2). Таким образом, $X \in \{A_n, B_n, C_n, D_n\}$.

Случай 3. Пусть $n = 2p$, где p — простое число. Тогда из $4p = 2n = Sd$ имеем $S \in \{1, 2, 4, p, 2p, 4p\} = \{1, 2, n, 2n\} \cup \{p, 4\}$ и $d = \frac{4p}{S}$.

Если $S \in \{1, 2, n, 2n\}$, то $X \in \{A_n, B_n, C_n, D_n\}$ аналогично случаю 2 выше (так как уравнение (29) при $n = 2p$ имеет лишь два решения $l = 1$ и $l = n - 1$).

Пусть $S = 4$ и $d = p$. Тогда, в силу Утверждения 8.4, примитивизацией X_{prim} атома X является либо ориентированный атом $X_{\text{prim}} = P_1$, либо $X_{\text{prim}} = D_4$. В первом случае $d(X_{\text{prim}}) = 3$ делит $p = d = d(X)$, а потому $p = 3$ и $X = X_{\text{prim}} = P_1$. Во втором случае $n(X_{\text{prim}}) = 4$ делит $n = n(X) = 2p$, а потому $p = 2$, $n = n(X) = 4 = n(X_{\text{prim}})$ и $X = X_{\text{prim}} = D_4$.

Пусть теперь $S = p$ и $d = 4$. Не ограничивая общности, можно считать, что $S' = p$ и $d' = 4$, так как в противном случае, аналогично проведённым выше рассуждениям с заменой белых клеток чёрными, а чёрных белыми, доказыва-ется, что $X \in \{A_n, B_n, C_n, D_n, P_1\}$. Род g атома X находится из соотношения $2 - 2g = S + S' - n = p + p - 2p = 0$, откуда X — торический максимально симметричный ориентированный атом, причём все его двумерные клетки — четырёхугольники. Из Теоремы 1.14 классификации торических максимально симметричных ориентированных атомов получаем, что $X = T_{(s,t)}^{\square}$ (т.е. X имеет квадратный тип (s, t)) для некоторой пары целых чисел $s > 0$, $t \geq 0$, такой что $s^2 + t^2 = S = \frac{n}{2} = p$. Известно, что при $p \equiv 1 \pmod{4}$ существует ровно две пары (s, t) с указанным свойством, получающиеся друг из друга перестановкой компонент, а при $p \equiv 3 \pmod{4}$ таких пар нет, см. [AR, теорема 17.6.1]. Следовательно, при $p \equiv 3 \pmod{4}$ не существует максимально симметричного ориентированного атома с $S = S' = p$ и $d = d' = 4$, а при $p \equiv 1 \pmod{4}$ таких атомов ровно два и они имеют вид $T_{(s,t)}^{\square}, T_{(t,s)}^{\square}$ для некоторой пары натуральных чисел $s > t > 0$.

Случай 4. Пусть n — составное число, не имеющее вида $2p$, где p — простое число. Отметим, что либо $n = 4g$ для некоторого целого $g \geq 2$, либо $n = kS$ для некоторых чисел $k, S \in \mathbb{N}$, где k нечётно, $k \geq 3$, $S \geq 3$.

Пусть $n = 9$. В силу $18 = 2n = Sd = S'd'$ имеем $S \in \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ и $d = \frac{18}{S}$. При $S = 1$ имеем $X = A_9$ по Утверждению 8.1. При $S = 2$ имеем $X \in \{B_9, C_9\}$ по Утверждению 8.2. При $S = 3$ имеем $X = O_3^9 = T_{(1,1)}^{\triangle}$ по Утверждению 8.3. При $S = 6$ имеем $X = T_{(1,1)}^{\triangle}$ по Утверждению 8.6. При $S \geq 9$ имеем $X = D_9$ в силу (28). Значит, $X \in \{A_9, B_9, C_9, D_9, T_{(1,1)}^{\triangle}, T_{(1,1)}^{\triangle}\}$.

Пусть $n = kS > 9$, где $k, S \in \mathbb{N}$, k нечётно, $k \geq 3$, $S \geq 3$. Из примера 6.3.А следует, что имеется непримитивный максимально симметричный ориентированный атом $X = O_S^n$ сложности n , с ровно S белыми клетками, и с примитивизацией $X_{\text{prim}} = D_S$. Так как атомы P_i и D_n примитивны (в силу $n \geq 3$), то $X \notin \{P_i, D_n\}$. Так как атом A_n имеет лишь одну белую клетку, атомы B_n, C_n имеют лишь по две белых клетки, а атом X имеет $S > 2$ белых клеток, то $X \notin \{A_n, B_n, C_n\}$. Из примера 6.3.А следует, что $X = O_S^n$ имеет род $g \geq 2$ при $n = kS > 9$.

Пусть теперь $n = 4g$, где $g \geq 2$. Рассмотрим максимально симметричный ориентированный атом $X = O_2^{4g, 2g-1, g}$, см. пример 6.3.Б. Согласно этому примеру, атом имеет сложность n , род $g = \frac{n}{4}$, ровно две белых клетки (т.е. $S = 2$, $d = n$). Эта серия атомов имеется в работе [ТЗ2, с.46, No.6], а сами атомы имеют комбинаторный тип $(d, d') = (4g, 4)$ и обозначаются $\{4g, 4\}_{1,1}$, см. [KM, §8.7]. Сравнение рода и количества белых клеток атомов показывает, что $X \notin \{A_n, B_n, C_n, D_n, P_i\}$. Так как X имеет вид $O_2^{2k, l, r}$, то имеется разветвлённое накрытие $f: X \rightarrow D_2$ над (непримитивным) ориентированным атомом D_2 , являющееся отображением типа примитивизации (см. Определение 5.3).

Пусть в рассматриваемом случае $n \leq 30$. В Замечании 9.4 ниже перечислены максимально симметричные ориентированные атомы сложности n . Покажем, что этот список полный, т.е. содержит любой максимально симметричный ориентированный атом сложности n . При любом $S \leq 6$ атомы сложности n с S белыми клетками находятся из Утверждений 8.1–8.6. Переходя к двойствен-

ному атому (см. Определение 1.4.Б), получаем отсюда все атомы с $S' \leq 6$. Полученный список атомов содержит все атомы рода $g = 2$ (см. Теорему 1.17), а атомы рода $g \leq 1$ перечислены в Теоремах 1.13 и 1.14. При $g \geq 3$ и $S, S' \geq 7$ имеем $14 - n \leq S + S' - n = 2 - 2g \leq -4$, откуда $14 \leq S + S' \leq n - 4$, а потому $n \geq 18$. Итак, при $n < 18$ искомый список атомов исчерпывается списками из перечисленных утверждений. Рассмотрим оставшиеся значения: $n \in \{18, 20, 21, 24, 25, 27, 28, 30\}$. Из (27) имеем $2n = Sd = S'd'$, откуда $S \mid 2n$. Рассмотрим 4 подслучая.

Случай 4А: $n \in \{18, 20, 21, 25, 27\}$. При $n = 18$ из $S, S' \geq 7$, $S, S' \mid 2n$ и $S + S' \leq n - 4 = 14$ получаем $S = S' = 7 \mid 36$, что неверно. При $n = 20$ из $S, S' \geq 7$, $S, S' \mid 2n$ и $S + S' \leq n - 4 = 16$ получаем $S = S' = 8$ и $d = d' = 5$, что невозможно в силу Следствия 7.2.а. При $n = 21$ (соотв. $n = 25$ или $n = 27$) из $S, S' \geq 7$, $S, S' \mid 2n$ и $S + S' \leq n - 4$, а также из нечётности числа $S + S' = n + 2 - 2g$, получаем $21 = 7 + 14 \leq S + S' \leq n - 4 = 17$ (соотв. $35 = 10 + 25 \leq S + S' \leq n - 4 = 21$ или $27 = 9 + 18 \leq S + S' \leq n - 4 = 23$), что невозможно.

Случай 4Б: $n = 24$. Из $S, S' \geq 7$, $S, S' \mid 2n$ и $S + S' \leq n - 4 = 20$ получаем $(S, S', d, d') \in \{(8, 8, 6, 6), (8, 12, 6, 4), (12, 8, 4, 6)\}$. Покажем, что каждая из этих трёх четвёрок реализуется ровно одним ориентированным атомом.

Пусть $(S, d) = (8, 6)$. Тогда ориентированный атом X не является примитивным в силу Теоремы 7.4. Так как степень k отображения примитивизации $X \rightarrow X_{\text{prim}}$ делит $d = 6$, то $k \in \{2, 3, 6\}$ и белые клетки ориентированного атома X_{prim} являются $\frac{6}{k}$ -угольниками. Случай $k = 6$ невозможен, так как единственный ориентированный атом, составленный из белых одноугольников, это $B_1 = C_1$, имеющий $2 \neq 8$ белых клеток. Если $k = 3$, то ориентированный атом X_{prim} составлен из 8 белых двугульников, а потому $X_{\text{prim}} = D_8$, откуда из примера 6.3 имеем либо $X = O_8^{24,1,2}$ и $(S, S', d, d') = (8, 2, 6, 24)$, либо $X = O_8^{24,2,0}$ и $(S, S', d, d') = (8, 6, 6, 8)$. Оба эти атома имеют недопустимую в рассматриваемом случае четвёрку (S, S', d, d') .

Следовательно, $k = 2$. Ориентированный атом X_{prim} составлен из 8 белых треугольников, а потому имеет сложность 12, откуда $X_{\text{prim}} \in \{P_3, T_{(2,0)}^\Delta\}$, см. Замечание 9.4 ниже. Согласно Следствию 6.2, имеется ровно два двукратных отображения примитивизации на ориентированный атом P_3 (усечённый октаэдр). Эти два отображения отвечают тройкам $(k, l, r) \in \{(2, 1, 0), (2, 1, 1)\}$, причём для одного отображения ($r = 1$) имеются ветвления в центрах всех двумерных клеток, а для другого ($r = 0$) — лишь в центрах белых клеток. Накрывающий ориентированный атом обозначим через $P_3^{24,r}$, $r \in \{0, 1\}$. По Следствию 6.2, при $X = P_3^{24,0}$ имеем $(S, S', d, d') = (8, 12, 6, 4)$, а при $X = P_3^{24,1}$ имеем $(S, S', d, d') = (8, 6, 6, 8)$ (последняя четвёрка (S, S', d, d') недопустима в рассматриваемом случае). Аналогично, по Следствию 6.5 имеется ровно два двукратных отображения примитивизации на ориентированный атом $T_{(2,0)}^\Delta = (K_4^{12,0})^* = P_7$ (усечённый “псевдо-октаэдр”, см. пример 7.8). Они отвечают четвёркам $(k, l, r, c) \in \{(2, 1, 0, 0), (2, 1, 1, 1)\}$. Накрывающий ориентированный атом обозначим через $P_7^{24,r} = X$, $r \in \{0, 1\}$. По Следствию 6.5, при $r = 0$ имеем $(S, S', d, d') = (8, 8, 6, 6)$, а при $r = 1$ имеем $(S, S', d, d') = (8, 4, 6, 12)$ (последняя четвёрка (S, S', d, d') недопустима в рассматриваемом случае).

Таким образом, $X \in \{P_7^{24,0} = (P_7^{24,0})^*, P_3^{24,0}, (P_3^{24,0})^*\}$. Отметим, что последний ориентированный атом $(P_3^{24,0})^*$ примитивен.

Случай 4В: $n = 28$. Из $S, S' \geq 7$, $S, S' \mid 2n$ и $S + S' \leq n - 4 = 24$, а также из чётности числа $S + S' = n + 2 - 2g$, получаем $(S, S', d, d') \in \{(7, 7, 8, 8), (8, 8, 7, 7), (8, 14, 7, 4), (14, 8, 4, 7)\}$. Случай $(S, d) = (7, 8)$ невозможен в силу Следствия 7.2.б. При $(S, d) = (8, 7)$ атом X примитивен, откуда $X \in \{K_8^{28}, \overline{K_8^{28}}\}$ и $(S, S', d, d') = (8, 8, 7, 7)$, согласно Теореме 1.18. Здесь ори-

ентированные атомы K_8^{28} и $\overline{K_8^{28}}$ отвечают многочленам $f(t) = t^3 + t + 1$ и $\bar{f}(t) = t^3 + t^2 + 1$, соответственно. По Теореме 1.18.В, $(K_8^{28})^* = \overline{K_8^{28}}$.

Случай 4Г: $n = 30$. Из $S, S' \geq 7$, $S, S' \mid 2n$ и $S + S' \leq n - 4 = 26$ получаем $(S, d), (S', d') \in \{(10, 6), (12, 5)\}$.

Предположим, что $(S, d) = (10, 6)$. Покажем, что этот случай не реализуется. В силу Теоремы 7.1, ориентированный атом X непримитивен. Так как степень k отображения примитивизации $X \rightarrow X_{\text{prim}}$ делит $d = 6$, то $k \in \{2, 3, 6\}$ и белые клетки ориентированного атома X_{prim} являются $\frac{6}{k}$ -угольниками. Аналогично случаю 4Б, имеем $k \neq 6$. Если $k = 3$, то ориентированный атом X_{prim} составлен из 10 белых двугульников, а потому $X_{\text{prim}} = D_{10}$, откуда из примера 6.3 имеем либо $X = O_{10}^{30,1,2}$ и $(S, S', d, d') = (10, 2, 6, 30)$, либо $X = O_{10}^{30,2,0}$ и $(S, S', d, d') = (10, 6, 6, 10)$. Оба эти атома имеют недопустимую в рассматриваемом случае четвёрку (S, S', d, d') . Если $k = 2$, то ориентированный атом X_{prim} составлен из 10 белых треугольников, а потому имеет сложность 15. Но максимально симметричного ориентированного атома с такими свойствами не существует, см. Замечание 9.4 ниже.

Следовательно, $(S, d) = (S', d') = (12, 5)$. По Теореме 7.10, $X = P_6 = P_6^*$ (усечённый кеплеров псевдо-додекаэдр, см. 1.4). $\square$

Замечание 9.4. Ниже перечислены пары двойственных друг другу (см. Определение 1.4.Б) максимально симметричных ориентированных атомов сложности $n \leq 30$ из пункта 5 Теоремы 9.2:

- $n = 8$, 8 атомов $A_8 = A_8^*$, $B_8 = B_8^* = K_2^{8,1} = O_2^{8,1,3}$, $C_8 = K_2^{8,7} = O_2^{8,3,0}$ и $D_8 = C_8^*$, $O_2^{8,1,1} = (O_2^{8,1,1})^* = K_2^{8,5} = (K_2^{8,5})^*$, $O_2^{8,3,2} = K_2^{8,3}$ и $O_4^{8,1,1} = (O_2^{8,3,2})^* = (K_2^{8,3})^*$, $T_{(2,0)}^\square = (T_{(2,0)}^\square)^* = O_4^{8,1,0}$ рода 4, 3, 0, 3, 2, 1, соотв., причём каждый атом отражаем (см. Определение 1.4.Б);
- $n = 12$, 15 атомов $A_{12} = A_{12}^*$, $B_{12} = B_{12}^* = K_2^{12,1} = O_2^{12,1,5}$, $C_{12} = K_2^{12,11} = O_2^{12,5,0}$ и $D_{12} = C_{12}^*$, $O_2^{12,5,3} = K_2^{12,5}$ и $O_6^{12,1,1} = (O_2^{12,5,3})^* = (K_2^{12,5})^*$, $O_2^{12,1,2} = K_2^{12,7}$ и $O_4^{12,1,1} = (O_2^{12,1,2})^* = (K_2^{12,7})^*$, $T_{(2,0)}^\Delta = P_7$ и $T_{(2,0)}^\Delta = K_4^{12,0} = (T_{(2,0)}^\Delta)^* = P_7^*$, $K_4^{12,1} = (K_4^{12,1})^*$, $O_4^{12,2,0}$ и $O_6^{12,1,0} = (O_4^{12,2,0})^*$, P_2 и $P_3 = P_2^*$ рода 6, 5, 0, 3, 4, 1, 3, 2, 0, соотв., причём каждый атом отражаем;
- $n = 15$, 8 атомов A_{15} и $B_{15} = A_{15}^* = K_2^{15,1}$, $C_{15} = K_2^{15,14}$ и $D_{15} = C_{15}^*$, $K_2^{15,4}$ и $O_5^{15} = (K_2^{15,4})^*$, $K_2^{15,11}$ и $O_3^{15} = (K_2^{15,11})^*$ рода 7, 0, 5, 6, соотв., причём каждый атом отражаем;
- $n = 16$, 14 атомов $A_{16} = A_{16}^*$, $B_{16} = B_{16}^* = K_2^{16,1} = O_2^{16,1,7}$, $C_{16} = K_2^{16,15} = O_2^{16,7,0}$ и $D_{16} = C_{16}^*$, $O_2^{16,1,3} = (O_2^{16,1,3})^* = K_2^{16,9} = (K_2^{16,9})^*$, $O_2^{16,7,4} = K_2^{16,7}$ и $O_8^{16,1,1} = (O_2^{16,7,4})^* = (K_2^{16,7})^*$, $O_4^{16,1,0}$ и $(O_4^{16,1,0})^*$, $O_4^{16,3,0}$ и $O_8^{16,1,0} = (O_4^{16,3,0})^*$, $O_4^{16,1,2} = (O_4^{16,1,2})^*$, $O_4^{16,3,2} = (O_4^{16,3,2})^*$, $T_{(2,2)}^\square = (T_{(2,2)}^\square)^*$ рода 8, 7, 0, 7, 4, 3, 3, 5, 5, 1, соотв., причём каждый атом отражаем;
- $n = 18$, 9 атомов $A_{18} = A_{18}^*$, $B_{18} = B_{18}^* = K_2^{18,1} = O_2^{18,1,8}$, $C_{18} = K_2^{18,17} = O_2^{18,8,0}$ и $D_{18} = C_{18}^*$, $O_6^{18,1,0}$ и $K_{3,3}^{18} = (O_6^{18,1,0})^*$, $O_6^{18,2,0} = (O_6^{18,2,0})^*$, $K_4^{18,2} = (K_4^{18,2})^*$, $T_{(3,0)}^\square = (T_{(3,0)}^\square)^*$ рода 9, 8, 0, 4, 4, 6, 1, соотв., причём каждый атом отражаем;
- $n = 20$, 12 атомов $A_{20} = A_{20}^*$, $B_{20} = B_{20}^* = K_2^{20,1} = O_2^{20,1,9}$, $C_{20} = K_2^{20,19} = O_2^{20,9,0}$ и $D_{20} = C_{20}^*$, $O_2^{20,1,4} = K_2^{20,11}$ и $O_2^{20,1,3} = (O_2^{20,1,4})^* = (K_2^{20,11})^*$, $O_2^{20,9,5} = K_2^{20,9}$ и $(O_2^{20,9,5})^* = (K_2^{20,9})^*$, $O_4^{20,4,0}$ и $(O_4^{20,4,0})^*$, $T_{(1,3)}^\square = (T_{(1,3)}^\square)^*$, $T_{(3,1)}^\square = (T_{(3,1)}^\square)^*$ рода 10, 9, 0, 8, 5, 4, 1, 1, соотв., причём смена ориентации атомов переставляет атомы $T_{(1,3)}^\square \leftrightarrow T_{(3,1)}^\square$, а остальные атомы отражаем;

- $n = 21$, 10 атомов A_{21} и $B_{21} = (A_{21})^* = K_2^{21,1}$, $C_{21} = K_2^{21,20}$ и $D_{21} = C_{21}^*$, $K_2^{21,8}$ и $O_3^{21} = (K_2^{21,8})^*$, $K_2^{21,13}$ и $O_7^{21} = (K_2^{21,13})^*$, $T_{(1,2)}^\Delta$ и $T_{(1,2)}^\blacktriangle$ рода 10, 0, 9, 7, 1, соотв., причём каждый атом отражаем;
- $n = 24$, 35 атомов $A_{24} = A_{24}^*$, $B_{24} = B_{24}^* = K_2^{24,1} = O_2^{24,1,11}$, $C_{24} = K_2^{24,23} = O_2^{24,11,0}$ и $D_{24} = C_{24}^*$, $O_2^{24,1,5} = (O_2^{24,1,5})^* = K_2^{24,13} = (K_2^{24,13})^*$, $O_2^{24,5,3} = K_2^{24,17}$ и $O_6^{24,1,1} = (O_2^{24,5,3})^* = (K_2^{24,17})^*$, $O_2^{24,5,9} = K_2^{24,5}$ и $O_6^{24,1,3} = (O_2^{24,5,9})^* = (K_2^{24,5})^*$, $O_2^{24,7,2} = K_2^{24,19}$ и $O_2^{24,1,1} = (O_2^{24,7,2})^* = (K_2^{24,19})^*$, $O_2^{24,7,8} = K_2^{24,7}$ и $O_8^{24,1,2} = (O_2^{24,7,8})^* = (K_2^{24,7})^*$, $O_2^{24,11,6} = K_2^{24,11}$ и $O_{12}^{24,1,1} = (O_2^{24,11,6})^* = (K_2^{24,11})^*$, $O_4^{24,1,4} = (O_4^{24,1,4})^*$, $K_4^{24,1} = (K_4^{24,1})^*$, $K_4^{24,3} = (K_4^{24,3})^*$, $O_4^{24,5,0}$ и $O_{12}^{24,1,0} = (O_4^{24,5,0})^*$, $O_4^{24,5,3}$ и $O_6^{24,3,2} = (O_4^{24,5,3})^*$, $K_4^{24,0}$ и $(K_4^{24,0})^*$, $K_6^{24,2}$ и $P_7^{24,1} = (K_6^{24,2})^*$, $P_2^{24,0}$ и $(P_2^{24,0})^*$, $P_2^{24,1}$ и $P_3^{24,1} = (P_2^{24,1})^*$, $O_6^{24,3,0}$ и $O_8^{24,2,0} = (O_6^{24,3,0})^*$, $P_7^{24,0} = (P_7^{24,0})^*$, $P_3^{24,0}$ и $(P_3^{24,0})^*$, рода 12, 11, 0, 11, 9, 9, 10, 8, 6, 9, 9, 5, 8, 3, 7, 2, 6, 6, 5, 3, соотв., причём каждый атом отражаем;
- $n = 25$, 6 атомов A_{25} и $B_{25} = A_{25}^*$, C_{25} и $D_{25} = C_{25}^*$, O_5^{25} и $(O_5^{25})^*$ рода 4, 0, 6, соотв., причём каждый атом отражаем;
- $n = 27$, 14 атомов A_{27} и $B_{27} = A_{27}^*$, C_{27} и $D_{27} = C_{27}^*$, O_3^{27} и $K_{3,3}^{27,1,0} = (O_3^{25})^*$, $T_{(3,0)}^\Delta$ и $T_{(3,0)}^\blacktriangle = (T_{(3,0)}^\Delta)^*$, O_9^{27} и $K_{3,3}^{27,2,0} = (O_9^{27})^*$, $K_{3,3}^{27,2,1}$ и $(K_{3,3}^{27,2,1})^*$, $K_{3,3}^{27,2,2}$ и $(K_{3,3}^{27,2,2})^*$ рода 13, 0, 10, 1, 7, 7, 7, соотв., причём смена ориентации атомов переставляет атомы $K_{3,3}^{27,2,1} \leftrightarrow K_{3,3}^{27,2,2}$, $(K_{3,3}^{27,2,1})^* \leftrightarrow (K_{3,3}^{27,2,2})^*$, а остальные атомы отражаем;
- $n = 28$, 12 атомов $A_{28} = A_{28}^*$, $B_{28} = B_{28}^* = K_2^{28,1} = O_2^{28,1,13}$, $C_{28} = K_2^{28,27} = O_2^{28,13,0}$ и $D_{28} = C_{28}^*$, $O_2^{28,1,6} = K_2^{28,15}$ и $O_4^{28,1,5} = (O_2^{28,1,6})^* = (K_2^{28,15})^*$, $O_2^{28,13,7} = K_2^{28,13}$ и $O_{14}^{28,1,1} = (O_2^{28,13,7})^* = (K_2^{28,13})^*$, $O_4^{28,6,0}$ и $O_{14}^{28,1,0} = (O_4^{28,6,0})^*$, K_8^{28} и $\overline{K_8^{28}} = (K_8^{28})^*$ рода 14, 13, 0, 12, 7, 6, 7, соотв., причём смена ориентации атомов переставляет атомы $K_8^{28} \leftrightarrow \overline{K_8^{28}}$, а остальные атомы отражаем;
- $n = 30$, 16 атомов $A_{30} = A_{30}^*$, $B_{30} = B_{30}^* = K_5^{30,1} = O_2^{30,1,14}$, $C_{30} = K_2^{30,29} = O_2^{30,14,0}$ и $D_{30} = C_{30}^*$, $O_2^{30,4,5} = K_2^{30,19}$ и $O_{10}^{30,1,2} = (O_2^{30,4,5})^* = (K_2^{30,19})^*$, $O_2^{30,11,9} = K_2^{30,11}$ и $O_6^{30,1,2} = (O_2^{30,11,9})^* = (K_2^{30,11})^*$, $K_4^{30,4} = (K_4^{30,4})^*$, $K_5^{30} = (K_5^{30})^*$, $\overline{K_5^{30}} = (K_5^{30})^*$, $O_6^{30,4,0}$ и $O_{10}^{30,2,0} = (O_6^{30,4,0})^*$, P_4 и $P_5 = P_4^*$, $P_6 = P_6^*$ рода 15, 14, 0, 10, 12, 12, 11, 11, 8, 0, 4, соотв., причём смена ориентации атомов переставляет атомы $K_5^{30} \leftrightarrow \overline{K_5^{30}}$, а остальные атомы отражаем.

Отметим, что при $n = 27$ имеются неотражаемые ориентированные атомы $K_{3,3}^{27,2,1}$ и $K_{3,3}^{27,2,2}$ рода 7 с отражаемой примитивизацией $T_{(1,1)}^\Delta$. Отвечающие этим атомам карты впервые были обнаружены P.Bergau [G69, с.293].

10 Приложение А. Классификация максимально симметричных ориентированных атомов рода $g \leq 2$

Как выше, во всех утверждениях под ориентированным атомом понимается класс изоморфности оснащённой пары $(P, K)^\#$, а во всех доказательствах он понимается как оснащённая пара $(P, K)^\#$, см. Замечание 1.8.

Доказательство Теоремы 1.17. На шаге 3 ниже мы докажем Теорему 1.16.

Шаг 1. Пусть X — максимально симметричный ориентированный атом рода $g \geq 0$. Обозначим $\lambda = \gcd(S, S')$, $\mu = \gcd(d, d')$. Тогда $S = \lambda s$, $S' = \lambda s'$, $d = \mu \delta$, $d' = \mu \delta'$ для пар взаимно простых чисел (s, s') и (δ, δ') . Из $2n = Sd = S'd'$, см. (27), имеем $s\delta = s'\delta'$, поэтому $s = \delta'$, $s' = \delta$. Таким образом,

$$n = \frac{\lambda}{2\mu} dd', \quad S = \frac{\lambda}{\mu} d', \quad S' = \frac{\lambda}{\mu} d, \quad \gcd(d, d') = \mu. \quad (30)$$

Покажем, что имеют место следующие соотношения:

$$(d-2)(d'-2) = 4 \frac{g-1}{\lambda} \mu + 4, \quad \mu = \gcd(d, d'), \quad 4 \frac{g-1}{\lambda} \in \mathbb{Z}. \quad (31)$$

Действительно, из $2-2g = S + S' - n$ и (30) имеем $\frac{\mu}{\lambda}(2-2g) = d + d' - \frac{1}{2}dd' = -\frac{1}{2}(d-2)(d'-2) + 2$, откуда получаем (31).

Шаг 2. Выведем из (31), что

$$\mu \leq \max \left\{ 1, 4 \frac{g-1}{\lambda} + 4 \right\} \leq \max \{3, 4g\}. \quad (32)$$

При $\mu = 1$ неравенство очевидно, поэтому считаем $\mu \geq 2$. Поскольку μ является делителем чисел d, d' , то $d, d' \geq \mu \geq 2$. Поэтому из (31) имеем $4 \frac{g-1}{\lambda} \mu + 4 = (d-2)(d'-2) \geq (\mu-2)^2 = \mu^2 - 4\mu + 4$, откуда $4 \frac{g-1}{\lambda} \geq \mu - 4$. Это доказывает (32).

Шаг 3. Пусть $g \geq 2$. Покажем, что при фиксированном $g \geq 2$ система (31) имеет лишь конечное число решений (d, d', λ) , а потому система уравнений $2n = Sd = S'd'$ и $2-2g = S + S' - n$ имеет лишь конечное число решений (S, S', d, d') .

В силу $g \geq 2$ и последнего соотношения в (31), число $\lambda \in \mathbb{N}$ является делителем положительного числа $4g-4 \geq 4$, откуда $\lambda \leq 4g-4$. В силу $g \geq 1$ и (32), имеем $\mu \leq 4g$ и поэтому $4 \leq 4 \frac{g-1}{\lambda} \mu + 4 \leq 4(g-1)4g + 4 = 4(2g-1)^2$. Отсюда и из (31) имеем $d, d' \leq 4(2g-1)^2 + 2$. Таким образом, при любом фиксированном $g \geq 2$ каждое из чисел d, d', λ может принимать лишь конечное число значений.

Шаг 4. Пусть $g = 2$. Найдём все решения (d, d', λ) системы (31). При $g = 2$ эта система с условием (32) принимают вид

$$(d-2)(d'-2) = \frac{4}{\lambda} \mu + 4, \quad \lambda \mid 4, \quad \mu = \gcd(d, d') \leq \frac{4}{\lambda} + 4 \leq 8.$$

Поэтому $\lambda \in \{1, 2, 4\}$ и $\frac{4}{\lambda} \mu + 4 > 1$, откуда $d, d' > 2$. Путём перебора конечного числа случаев получаем следующие 14 решений (d, d', λ) со свойством $d \geq d'$:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
λ	1	1	2	1	2	1	4	2	2	1	4	2	2	4
d	8	10	6	12	8	18	5	6	12	10	9	5	8	7
d'	8	5	6	4	4	3	5	4	3	3	3	4	3	3
S	1	1	2	1	2	1	4	4	2	3	4	8	6	12
S'	1	2	2	3	4	6	4	6	8	10	12	10	16	28
n	4	5	6	6	8	9	10	12	12	15	18	20	24	42

Шаг 5. Покажем, что только 6 случаев этой таблицы (случаи 1,2,3,5,8,13) реализуются максимально симметричными ориентированными атомами, причём в каждом случае ориентированный атом определён однозначно с точностью до изоморфизма.

В случаях 1,2,4,6 таблицы имеем $S = 1$, $S' = 1, 2, 3, 6$ и $n = 4, 5, 6, 9$, соответственно, откуда по Утверждению 8.1 $X \in A_n$ и $S' = 1, 2, 1, 2$, соответственно, т.е. случаи 4,6 невозможны, а в каждом из случаев 1,2 существует единственный

класс изоморфности ориентированных атомов, а именно класс A_4, A_5 , соответственно.

В случаях 3,5,9 имеем $S = 2$, $S' = 2, 4, 8$ и $n = 6, 8, 12$, соответственно, откуда по Утверждению 8.2 $X \in K_2^{n,l}$, $l^2 \equiv 1 \pmod{n}$ и $S' = \gcd(l+1, n)$, откуда случай 9 невозможен (так как $S' \nmid n$), а в случаях 3,5 имеем $l = S' - 1 = 1, 3$, соответственно, т.е. в обоих случаях 3,5 существует единственный класс изоморфности ориентированных атомов, а именно класс $K_2^{6,1}, K_2^{8,3}$, соответственно.

В случае 10 имеем $S = 3$, $S' = 10$ и $n = 15$, откуда по Утверждению 8.3 $X \in K_3^n = O_3^n$ и $S' = 2 \gcd(3, \frac{n/3+3}{2}) = 2 \neq 10$, а потому этот случай невозможен.

В случаях 7,8,11 имеем $S = 4$, $S' = 4, 6, 12$ и $n = 10, 12, 18$, соответственно, откуда по Утверждению 8.4 либо $X \in K_4^{n,r}$, $6 \mid n$, $4r + 4 \equiv 0 \pmod{\frac{n}{6}}$ и $S' = 4 \gcd(r, \frac{n}{6})$, либо $X \in O_4^{n,l,r}$, $4 \mid n$, $S' = 2 \gcd(\frac{n}{4}, r)$ и

$$l^2 \equiv 1 \pmod{n/4}, \quad 2(r + l + 1) \equiv 0 \pmod{n/4}.$$

Поэтому случай 7 невозможен (в силу $6 \nmid n$ и $4 \nmid n$), в случае 8 имеем $X \in O_4^{12,2,0}$ (так как $X \notin K_4^{n,r}$ в силу $4 \nmid S'$), а случай 11 невозможен (так как $X \notin K_4^{n,r}$ в силу $r = 2 \neq 0$, а $X \notin O_4^{n,l,r}$ в силу $4 \nmid n$).

В случае 13 имеем $S = 6$, $S' = 16$ и $n = 24$, откуда по Утверждению 8.6 $X \in P_2^{n,r}$ и $S' = 8 \gcd(r, \frac{n}{12})$ (так как $X \notin T_{(1,1)}^\Delta$ в силу $9 \nmid n$, а $X \notin O_6^{n,l,r}$ в силу $S' = 16 > 8 = \frac{n}{3} \geq 2 \gcd(\frac{n}{6}, r)$). Поэтому $r = 0$ и $X \in P_2^{24,0}$.

В случае 12 имеем $S = 8$ и $d = 5$, а в случае 14 имеем $S = 12$ и $d = 7$. Оба эти случая невозможны в силу Следствия 7.2.а. $\square$

11 Приложение Б. Некоторые задачи.

Задача 1. В таблицах I и II статьи [CD2001] указаны максимально симметричные (отражаемые и неотражаемые, соотв.) ориентированные атомы рода $g \in [2; 15]$. При этом для каждой пары двойственных друг другу (либо получающихся друг из друга сменой ориентации) атомов указан лишь один из этих атомов. В обозначениях статьи [CD2001], комбинаторный тип (d, d') называется типом и обозначен через $\{p, q\}$; через Automs обозначено $2|\text{Aut}(X)|$ или $|\text{Aut}(X)|$ для отражаемого или неотражаемого атома X (соотв.); образующие $a, b \in \text{Aut}(X)$ обозначены через $a = R, b = SR$; количество общих вершин пары смежных белых (соотв. чёрных) клеток обозначено через m_F (соотв. m_V). Всего в этих двух таблицах 220 и 16 атомов, соотв. Среди них рассмотрим атомы со свойством $m_V = m_F = 1$ (их ровно 41 и 6, соотв.). Другими словами, это — примитивные атомы X , отличные от атомов A_n , такие что атом X^* тоже примитивен. Из этих 41 атомов таблицы I выкинем атом рода 4 типа $\{5, 5\}$ (усечённый кеплеров псевдо-додекаэдр P_6), а из 6 атомов таблицы II выкинем атом рода 7 типа $\{7, 7\}$ (атом K_8^{28}).

(а) Для указанных 40 и 5 примитивных атомов доказать (или опровергнуть) их приводимость, см. Определение 3.5 и Следствие 3.6. Напомним, что приводимость атома X равносильна существованию нетривиальной нормальной подгруппы H группы

$$G = \text{Aut}(X) = \langle R, S \mid R^p = S^q = (RS)^2 = 1, \text{Additional Relators} \rangle$$

со свойством $RS \notin H \neq G$, где Additional Relators даны в таблицах I и II.

(б) Пусть атом приводим. Выяснить, существует ли абелева подгруппа H с указанным выше свойством.

Частичное решение. Отражаемый атом рода 3 типа $\{3, 8\}$ приводим, так как образующая S входит в каждое определяющее соотношение группы G чётное

число раз, а потому G содержит нормальную подгруппу $H = \langle R \rangle \not\cong RS$ индекса 2. Аналогично доказывается приводимость всех рассматриваемых атомов, тип которых содержит чётное число, за исключением 5 отражаемых атомов (рода 6 типа $\{4, 6\}$, рода 9 типа $\{6, 6\}$, рода 10 типов $\{4, 5\}$ и $\{4, 7\}$, рода 11 типа $\{6, 6\}$) и одного неотражаемого атома (рода 10 типа $\{8, 8\}$). Поэтому задачу (а) осталось решить лишь для 14 и 1 атомов таблиц I и II (соотв.):

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12–14	15
род	3	5	6	7	9	9	10	10	10	10	11	14	15
тип	3,7	5,5	4,6	3,7	5,5	6,6	3,9	4,5	4,7	8,8	6,6	3,7	3,9
n	84	40	60	227	80	48	162	180	84	36	60	546	252

Решите эту задачу сначала для трёх атомов № 2,6,10 малой сложности $n \leq 53$.

Лемма 11.1. *Предположим, что атомы № 2,6,10 приводимы. Тогда атомы $P_1, \dots, P_6, A_{2^l}, K_{2^l}^{2^{l-1}(2^l-1),f}$ исчерпывают все неприводимые максимально симметричные ориентированные атомы сложности $n \leq 53$.*

Доказательство. Это верно для атомов сложности $n \leq 31$, см. Замечание 9.4 и Теорему 9.2.1 для $n \leq 30$ и $n = 31$, соотв. Поэтому это верно также для атомов, имеющих $S \leq 8$ белых клеток (или $S' \leq 8$ чёрных клеток), так как ввиду примитивности они имеют сложность $n \leq \frac{S(S-1)}{2} \leq 28$. По предположению леммы, это верно также для атомов рода $g \leq 15$ сложности $n \leq 53$. Поэтому это верно также для атомов сложности $n \leq 47$, поскольку из $g \geq 16$ и $S, S' \geq 9$ имеем $18 - n \leq S + S' - n = 2 - 2g \leq -30$, откуда $n \geq 48$. Повторяя предыдущие рассуждения, отсюда получаем нужное свойство также при $S \leq 10$, а потому и при $n \leq 51$. При $n = 52$ нужное свойство может быть нарушено лишь в случае $S = S' = 11 \mid 2n = 104$ (что невозможно), а при $n = 53$ атом приводим, так как он равен одному из A_n, B_n, C_n, D_n в силу простоты n , см. Теорему 9.2.1. $\square$

Лемма 11.2. *Предположим, что атомы № 1–15 приводимы. Тогда атомы $P_1, \dots, P_6, A_{2^l}, K_{2^l}^{2^{l-1}(2^l-1),f}$ исчерпывают все неприводимые максимально симметричные ориентированные атомы рода $g \leq 15$, а также все неприводимые максимально симметричные ориентированные атомы сложности $n \leq 53$.*

Задача 2. В таблицах I и II статьи [CD2001] указаны максимально симметричные (отражаемые и неотражаемые, соотв.) ориентированные атомы рода $g \in [2; 15]$. Следовательно, эти таблицы содержат все примитивные максимально симметричные ориентированные атомы с числом белых клеток $S \leq 8$ (так как такие атомы имеют сложность $n \leq \frac{S(S-1)}{2} \leq 28$, а потому их род $g = \frac{1}{2}(n - S - S' + 2) \leq \frac{n}{2} \leq 14$). На основе этих таблиц перечислить все примитивные (т.е. имеющие $m_V = 1$ или $m_F = 1$) максимально симметричные ориентированные атомы с числом белых клеток $S \leq 8$. Случай $S \leq 6$ описывается Теоремой 7.11.

Задача 3. Построить аналог теорем настоящей статьи для случая неориентируемых максимально симметричных атомов.

Список литературы

- [AR] Айерлэнд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел. Москва: Мир, 1987.
- [BG89] P. Bergau, D. Garbe, Non-orientable and orientable regular maps, in: Proc. “Groups-Korea 1988”, Lect. Notes Math. **1398**, Springer (1989), 29–42.

- [B50] S. Bilinski, Homogene mreže zatvorenih orijentabilnih ploha, Rad. Jugoslav. Akad. Znan. Umjet. Odjel Math. Fiz. Tehn. Nauke **277** (1950), 129–164.
- [B52] S. Bilinski, Homogene Netze geschlossener orientierbarer Flächen, Bull. Internat. Acad. Yougoslave, Cl. Sci. Math. Phys. Tech. (N.S.), **6** (1952), 59–75.
- [BF] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Т. 1,2. Ижевск, Изд. дом “Удмуртский университет”, 1999.
- [BF1] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Некоторые актуальные нерешенные задачи по топологии интегрируемых гамильтоновых систем. В кн.: Топологические методы в теории гамильтоновых систем, по ред. А.В.Болсинова, А.Т.Фоменко, А.И.Шафаревича. Москва, Изд-во Факториал (1998), 5–23.
- [BF2] А.В.Болсинов, А.Т.Фоменко. Траекторная эквивалентность интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Теорема классификации. I, II. Матем. Сборник **185** (1994), No.4, 27–80 (Часть I). Матем. Сборник **185** (1994), No.5, 27–78 (Часть II).
- [BFR] А.В.Болсинов, П.Рихтер, А.Т.Фоменко. Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской, Матем. Сборник **191** (2000), No.2, 3–42.
- [B] Браилов А.В., Некоторые случаи полной интегрируемости уравнений Эйлера и приложения, ДАН СССР **268** (1983), №5, 1043–1046.
- [BrF] Браилов А.В., Фоменко А.Т. Топология интегральных многообразий вполне интегрируемых гамильтоновых систем, Матем. Сборник **133** (1987), No.3, 375–385.
- [BK] Браилов Ю.А., Кудрявцева Е.А., Устойчивая топологическая несопряженность гамильтоновых систем на двумерных поверхностях, Вестник МГУ, Серия матем. **54** (1999), No.2, 20–27, 72.
- [B27] H.R. Brahana, Regular maps and their groups. Amer. J. Math. **49** (1927), 268–284.
- [W78] S.E. Wilson, Riemann surfaces over regular maps, Can. J. Math. **XXX**, No.4 (1978), 763–782.
- [G69] D. Garbe, Über die regulären Zerlegungen geschlossener orientierbarer Flächen, J. Reine Angew. Math. **237** (1969), 39–55.
- [G78] D. Garbe, A remark on non-symmetric Riemann surfaces, Arch. Math. **30** (1978), 435–437.
- [HC] D. Hilbert, S. Cohn-Vossen, Anschauliche Geometrie, Berlin, 1932. Русский перевод: Гильберт и Кон-Фоссен, Наглядная геометрия, М.: Л.: ОНТИ, 1936, 252–272.
- [D1880] W. Dyck, Über Aufstellung und Untersuchung von Gruppe und Irrationalität regularer Riemannscher Flächen, Math. Ann. **17** (1880), 473–508.
- [JJ] L.D. James, G.A. Jones, Regular orientable imbeddings of complete graphs, J. Combinat. Theory, Ser. B, **39** (1985), 353–367.
- [JS] G.A. Jones, D. Singerman, Theory of maps on orientable surfaces, Proc. London Math. Soc. (3) **37** (1978), 273–307.

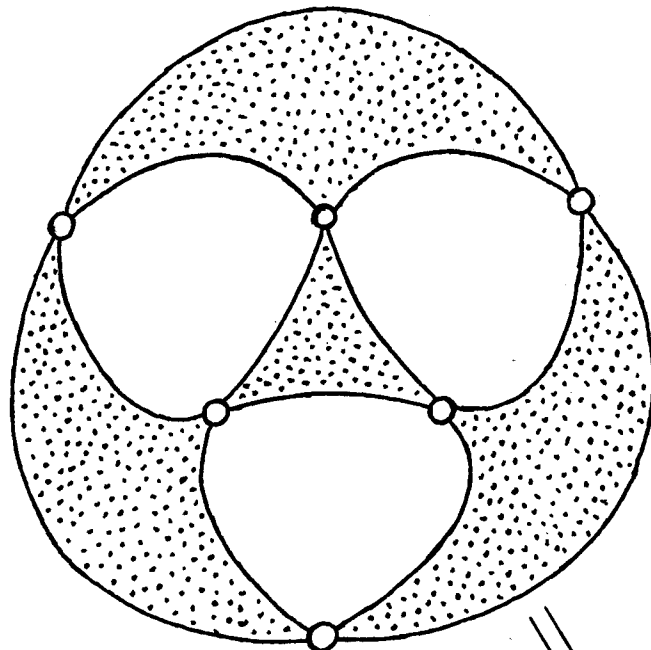
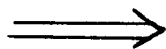
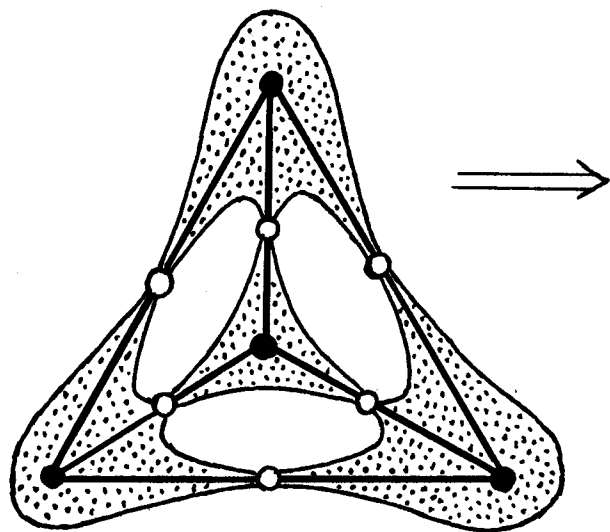
- [K1619] J. Kepler, The harmony of the world (translation from the Latin “*Harmonice Mundi*”, 1619), Memoirs Amer. Philos. Soc. **209**, American Philosophical Society, Philadelphia, PA, 1997.
- [K1879] F. Klein, Über die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen, Math. Ann. **14** (1879), 428–471.
- [CD2001] M.D.E. Conder, P. Dobcsányi, Determination of all regular maps of small genus, J. Combinat. Theory, Ser. B, **81** (2001), 224–242.
- [K48] H.S.M. Coxeter, Configurations and maps, Rep. Math. Colloq. **8** (1948), 18–38.
- [K50] H.S.M. Coxeter, Self-dual configurations and regular graphs, Bull. Amer. Math. Soc. **56** (1950), 413–455.
- [KM] H.S.M. Coxeter, W.O.J. Moser, Generators and relations for discrete groups, Third Edition. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972. Перевод: Г.С.М. Коксетер, У.О.Дж. Мозер, Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп, Москва: Наука, 1980.
- [Ko] Коровина Н.В., Максимально симметричные бифуркации функций Морса на двумерных поверхностях, Вестник МГУ, Серия матем., 1998.
- [Ku] Е.А.Кудрявцева, Устойчивые инварианты сопряженности гамильтоновых систем на двумерных поверхностях, Доклады РАН (N. 3) **361** (1998), 314–317.
- [Ku2] Е.А.Кудрявцева, Устойчивые топологические и гладкие инварианты сопряженности гамильтоновых систем на поверхностях. В кн.: Топологические методы в теории гамильтоновых систем, по ред. А.В.Болсинова, А.Т.Фоменко, А.И.Шафаревича. Москва, Изд-во Факториал (1998), 147–202.
- [C1878a] A. Cayley, On the theory of groups. Proc. London Math. Soc. **9** (1878), 126–133.
- [C1878b] A. Cayley, The theory of groups: graphical representations. Amer. J. Math. **1** (1878), 174–176.
- [Ленг] С. Ленг, Алгебра, М.: Мир, 1968.
- [М] Мантуров В.О., Атомы. Узлы. Бифуркации, Вестник МГУ, Серия матем., 1998.
- [MS0] Peter McMullen, Egon Schulte, Regular and chiral polytopes in low dimensions, arXiv:math.MG/0503389 v1 18 Mar 2005.
- [MS] P.McMullen and E.Schulte, Abstract Regular Polytopes, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **92**, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [O] А.А.Ошемков, Топология изоэнергетических поверхностей и бифуркационные диаграммы интегрируемых случаев динамики твердого тела на $SO(4)$, УМН **42** (1990), вып.2, 199–200.
- [O1] А.А.Ошемков, Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особенностей, Труды МИРАН **205** (1994), 131–140.

- [O2] А.А.Ошемков, Описание изоэнергетических поверхностей и интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Труды Семинара по Векторному и Тензорному Анализу, вып.23, Москва, Изд-во МГУ, 1988, 122–132.
- [O3] А.А.Ошемков, Вычисление инвариантов Фоменко для основных интегрируемых случаев динамики твердого тела. Труды Семинара по Векторному и Тензорному Анализу, вып.25, ч.2, Москва, Изд-во МГУ, 1993, 23–109.
- [O4] А.А.Ошемков, В.В.Шарко, О классификации потоков Морса-Смейла на двумерных многообразиях, Матем. Сборник (N.8) **189** (1998), 93–140.
- [P] И.В. Птицына, Классификация замкнутых локально минимальных сетей на тетраэдре, Матем. Сборник **185** (1994), No.5, 119–138.
- [S2006] J. Širáň, Regular maps on a given surface, in: Topics in discrete mathematics, 591–609, Algorithms Combin. **26** (2006), Springer, Berlin.
- [T32] W. Threlfall, Gruppenbilder. Abh. sachs. Akad. Wiss. Math.-phys. Kl. **41** (1932), 1–59.
- [F1] Фоменко А.Т. Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем, ДАН СССР **287** (1986), No.5, 1071–1075.
- [F2] Фоменко А.Т. Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости, Известия АН СССР. Серия матем. **50** (1986), No.6, 1276–1307.
- [F3] Фоменко А.Т. Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем, УМН **44** (1989), вып. 1 (265), 145–173.
- [F4] Фоменко А.Т. Топологический инвариант, грубо классифицирующий интегрируемые строго невырожденные гамильтонианы на четырехмерных симплектических многообразиях. Функц. анализ и его приложения **25** (1991), вып.4, 23–35.
- [FZ] Фоменко А.Т., Цишанг Х. О топологии трехмерных многообразий, возникающих в гамильтоновой механике, ДАН СССР **294** (1987), No.2, 283–287.
- [FZ1] Фоменко А.Т., Цишанг Х. О типичных топологических свойствах интегрируемых гамильтоновых систем, Известия АН СССР **52** (1988), No.2, 378–407.
- [H1890] P.J. Heawood, Map-colour theorem, Quart. J. Math. **24** (1890), 332–338.
- [H1891] L. Heffter, Über das Problem der Nachbargebiete, Math. Ann. **38** (1891), 477–508.
- [Sh59] F.A. Sherk, The regular maps on a surface of genus three, Canad. J. Math. **11** (1959), 452–480.

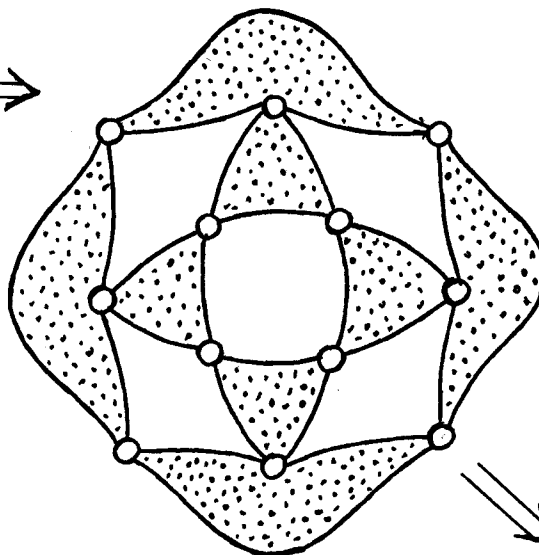
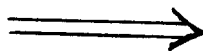
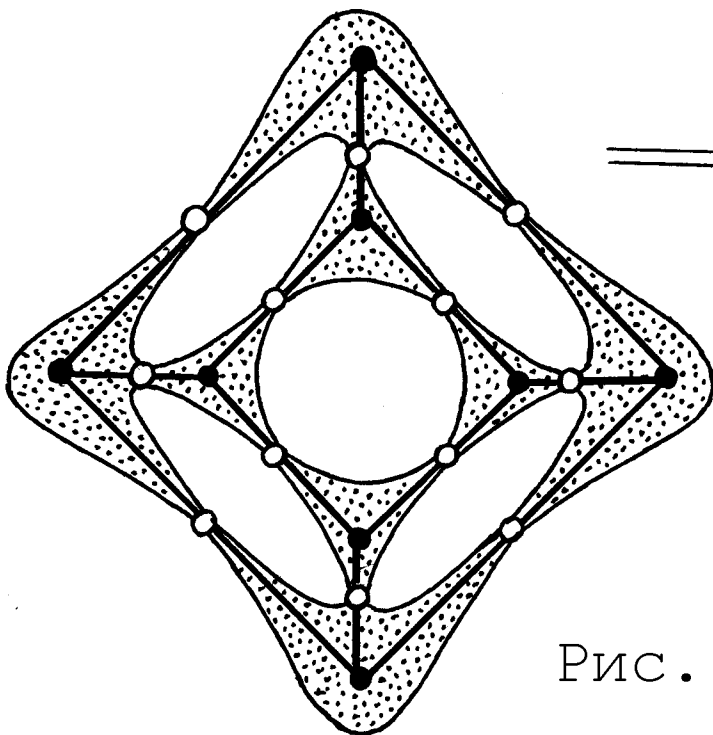
Другие статьи

- [B22] H.R. Brahana, Systems of Circuits on Two-Dimensional Manifolds, Annals of Math. **23** (1922), p.146.

- [B26] H.R. Brahana, Regular maps on the anchor ring, Amer. J. Math. **48** (1926), 225–240.
- [BC26] H.R. Brahana and A.B. Coble, Maps of twelve countries with five sides with a group of order 120 containing an ikosahedral subgroup, Amer. J. Math. **48** (1926), 1–20.
- [BS] R.P. Bryant, D. Singerman, Foundations of the theory of maps on surfaces with boundary, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **36** (1985), no.141, 17–41.
- [GNS99] A. Gardiner, R. Nedela, J. Širáň, M. Škoviera, Characterization of graphs which underlie regular maps on closed surfaces, J. London Math. Soc. (2) **59**, No.1 (1999), 100–108.
- [D1882] W. Dyck, Gruppentheoretischen Studien, Math. Ann. **20** (1882), 1–44.
- [Kl] F. Klein, Vorlesungen ueber das Ikosaeder, I, §13.
- [H1897] L. Heffter, Über metacyklische Gruppen und Nachbarconfigurationen, Math. Ann. **50** (1897), 261–268.



P_1



P_2

Рис. 1

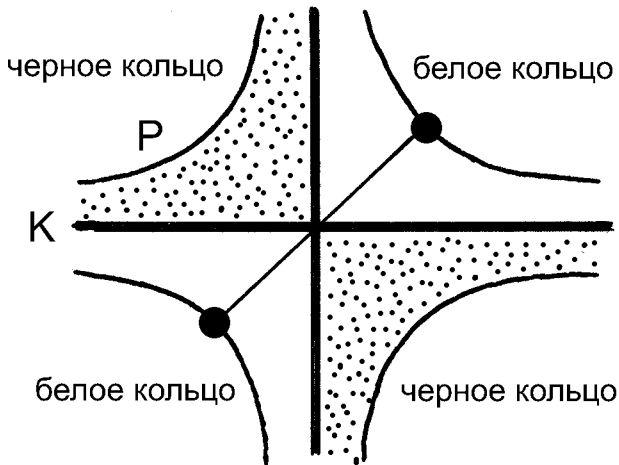
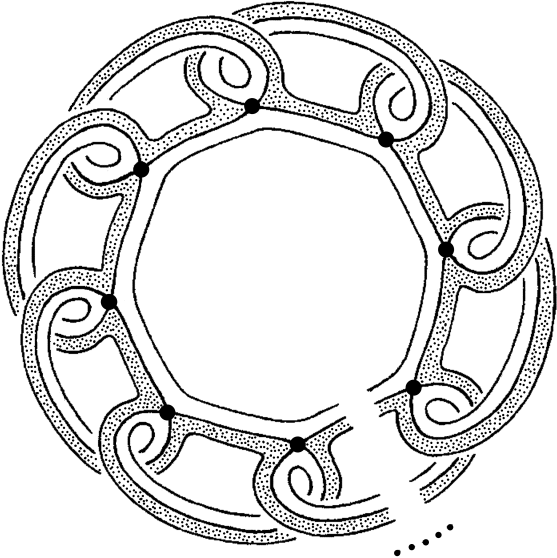
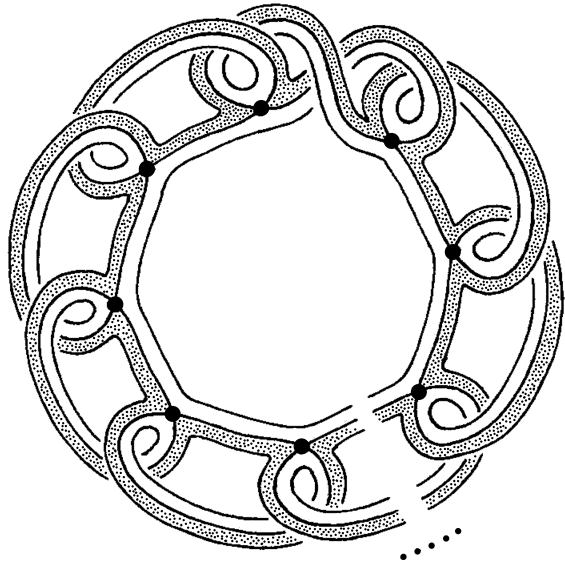


Рис. 2



B_n

Рис. 3



A_n

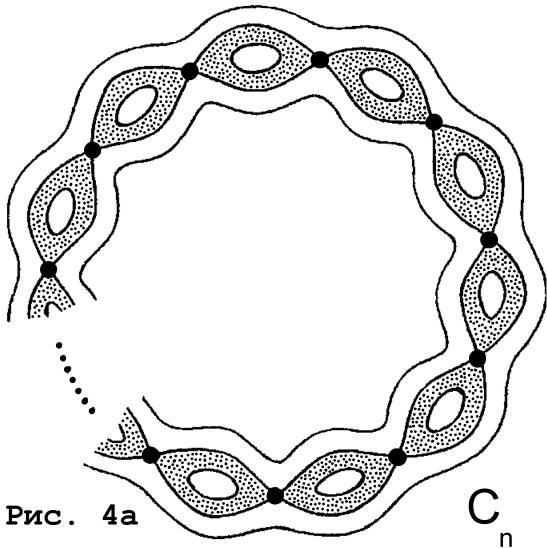
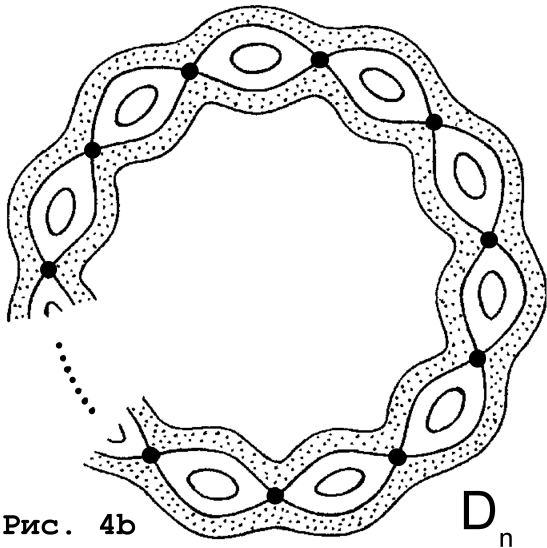
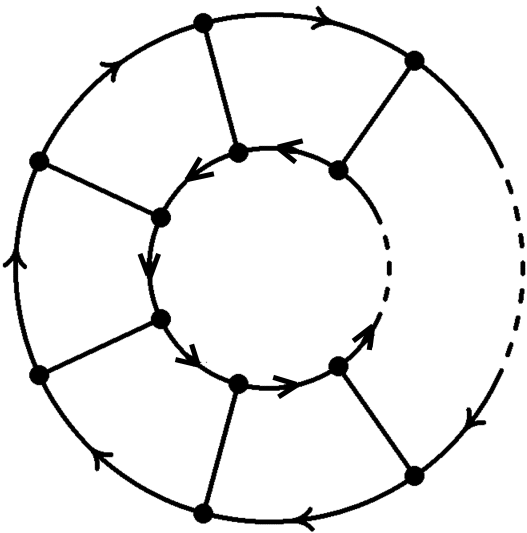
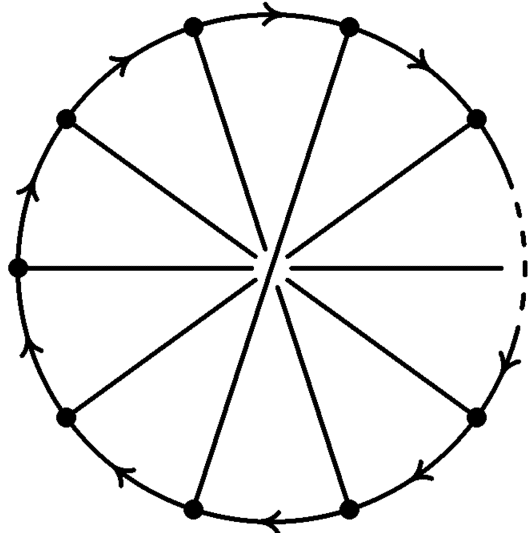


Рис. 4а



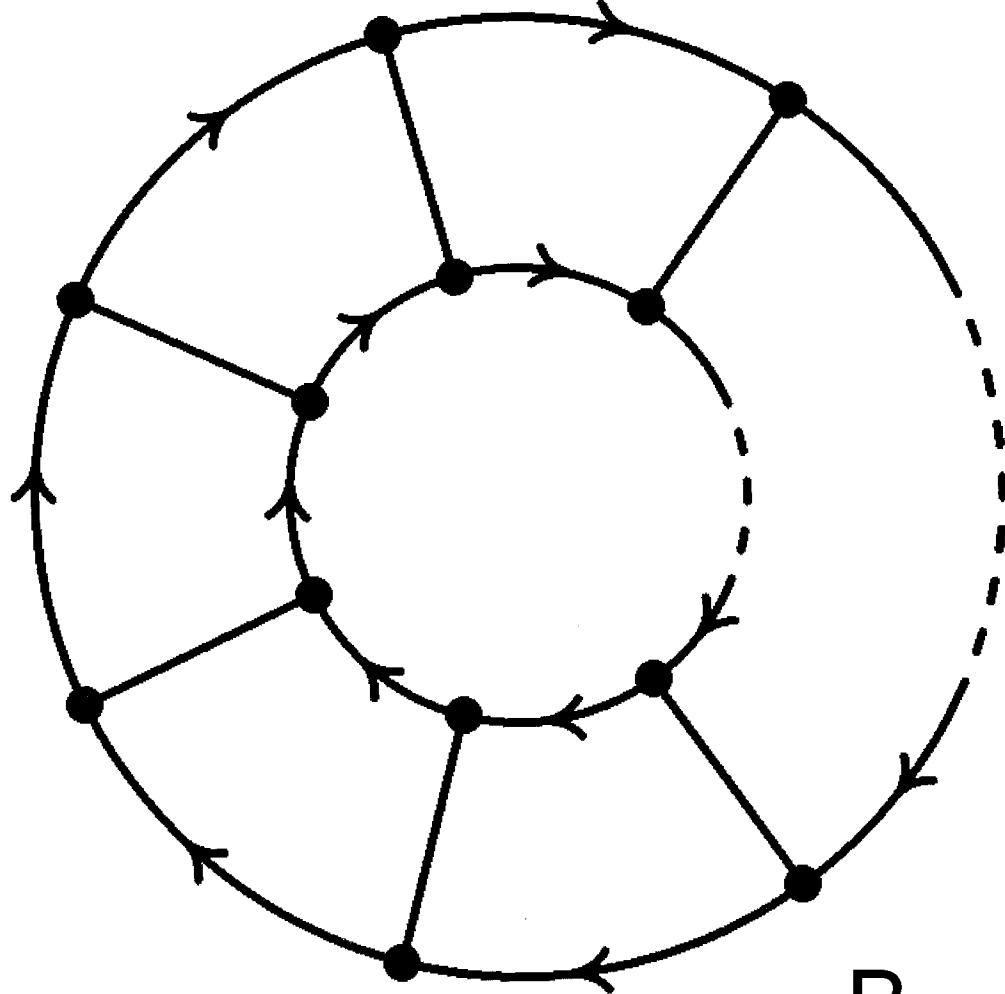


C_n

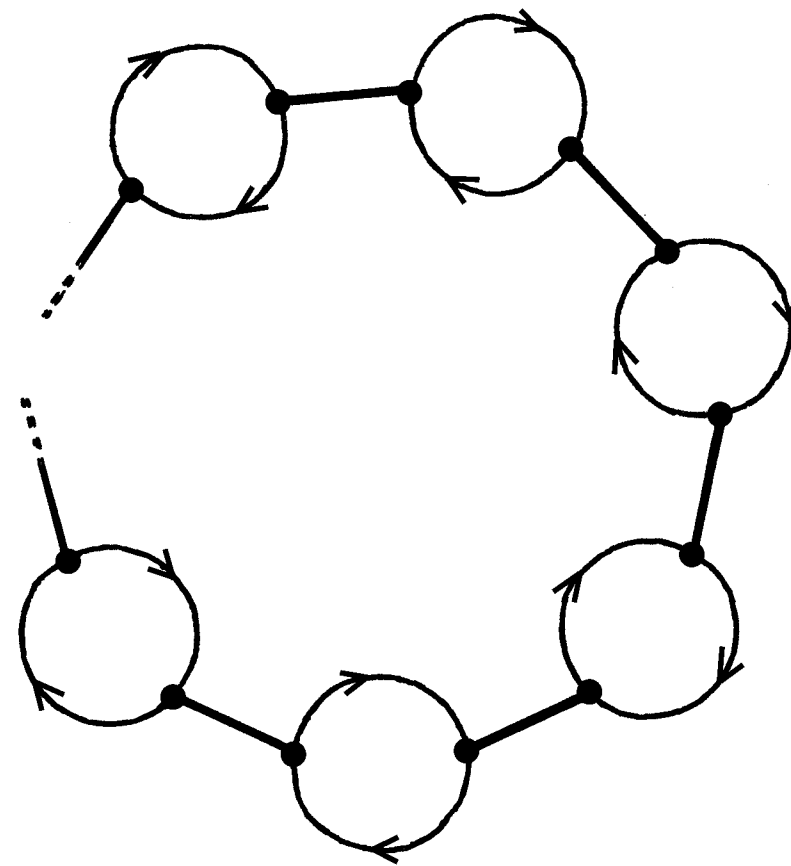


A_n

Рис. 5а

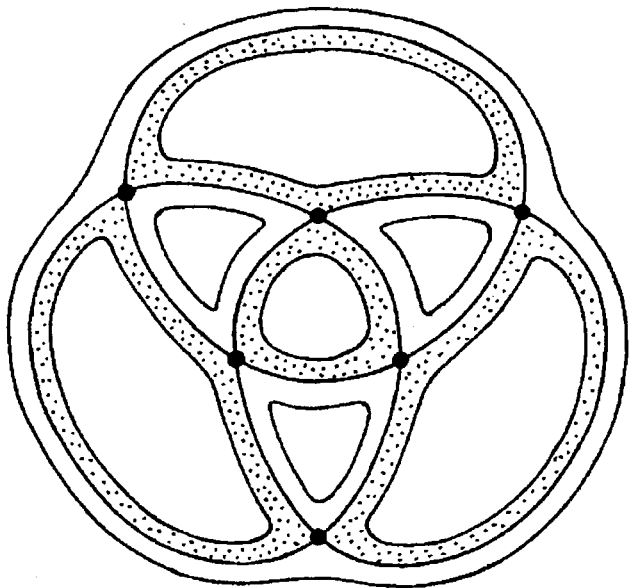


B_n



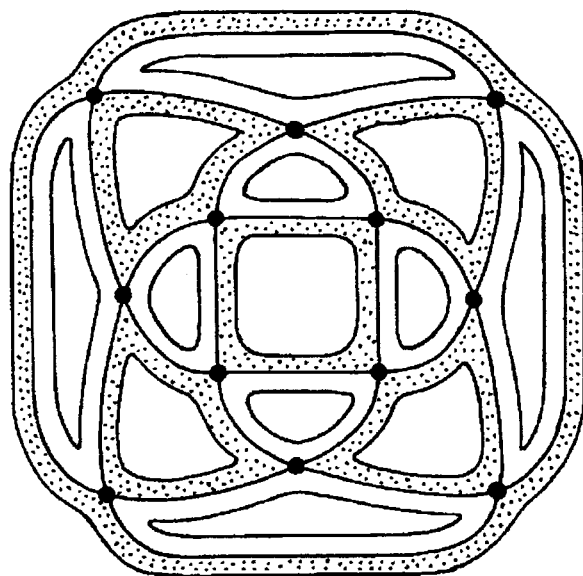
D_n

Рис. 5b



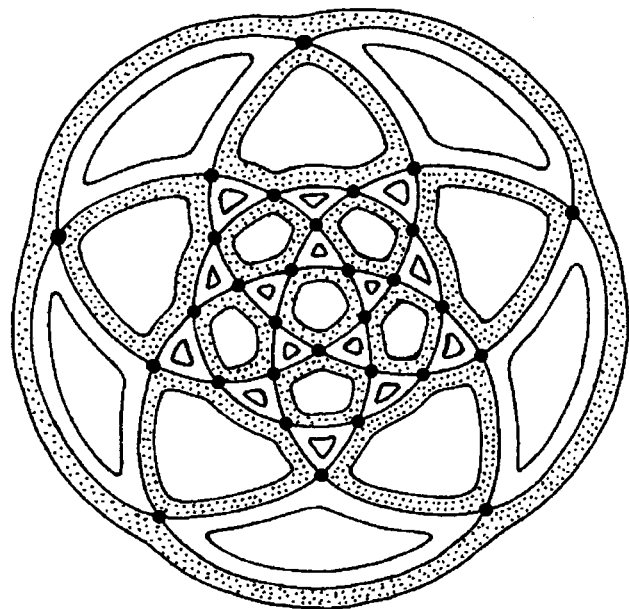
P_1

усеченный
тетраэдр



P_3

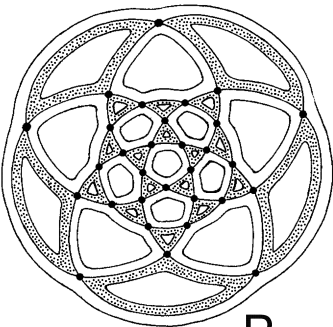
усеченный октаэдр



P_5

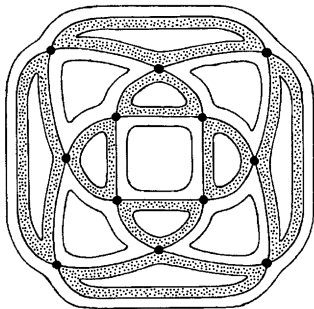
усеченный
икосаэдр

Рис. 6а



усеченный
додекаэдр

P_4



усеченный куб
Рис. 6b

P_2

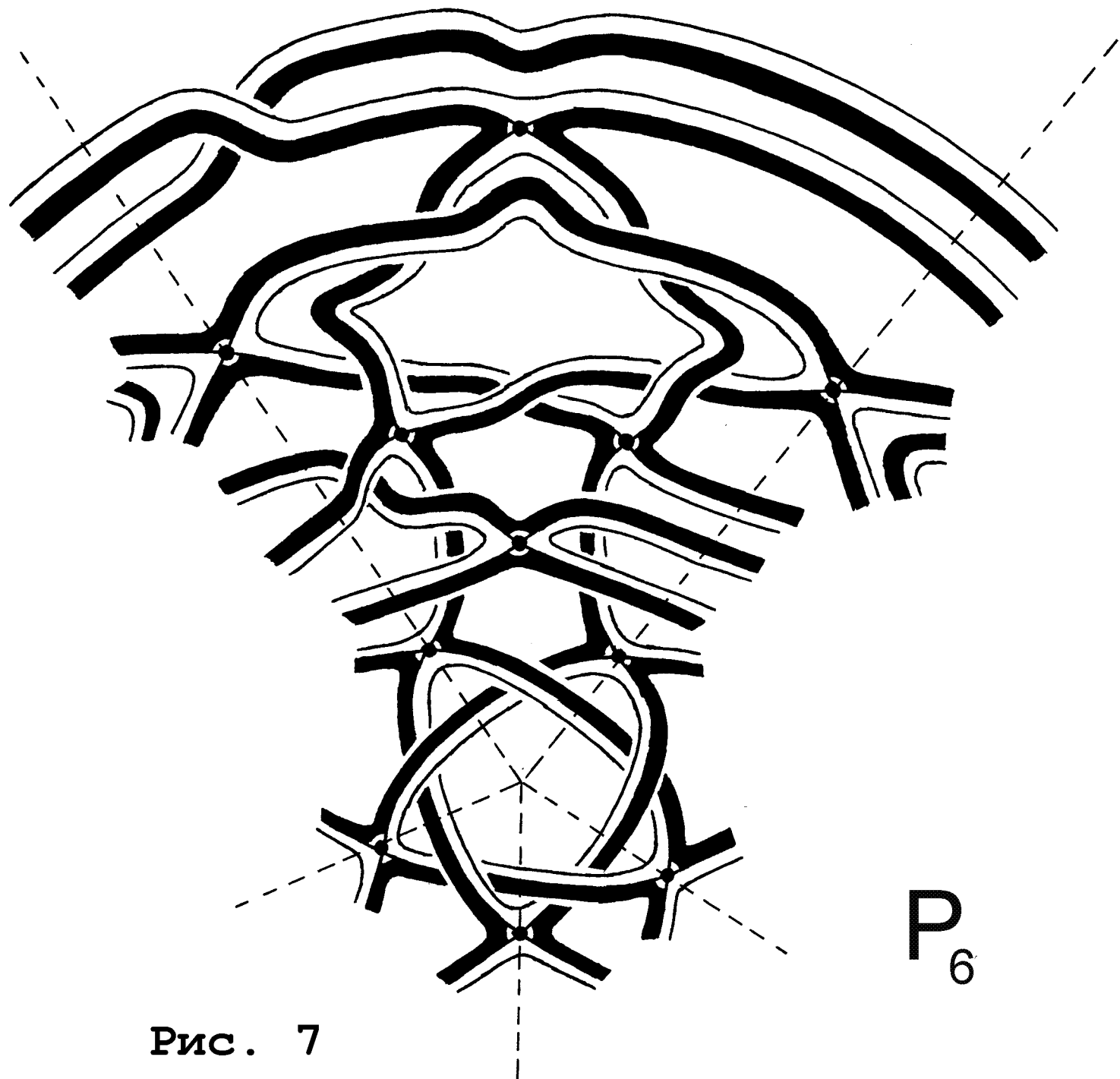
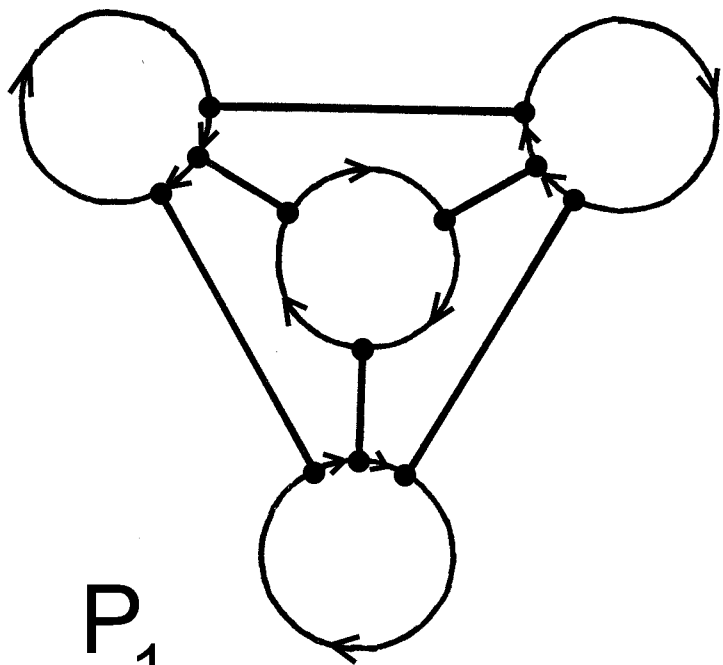


Рис. 7



P_2

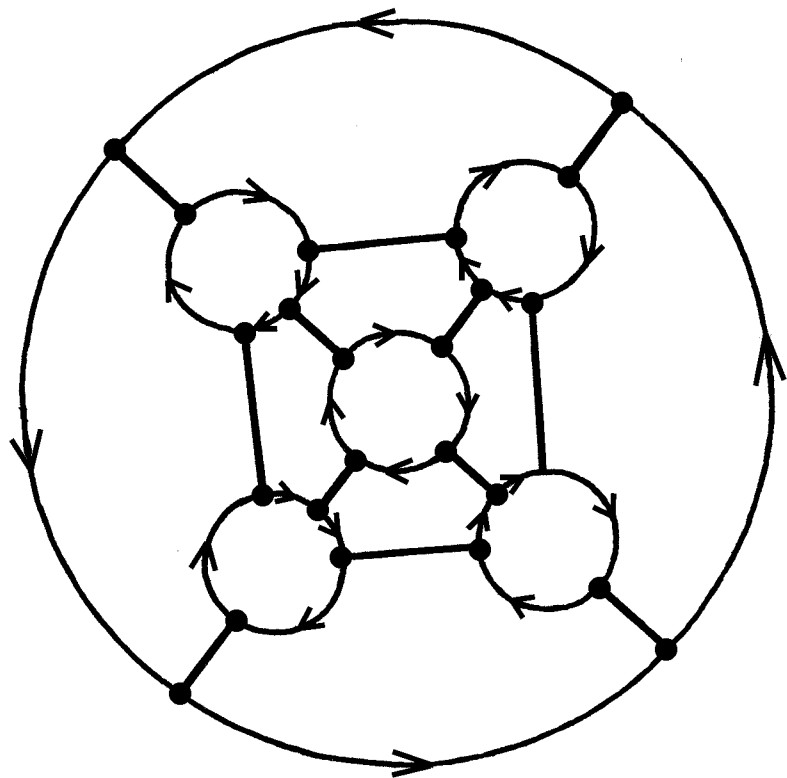
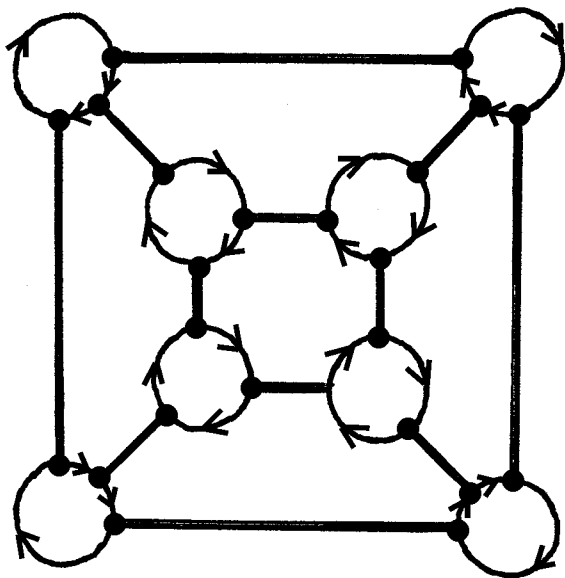
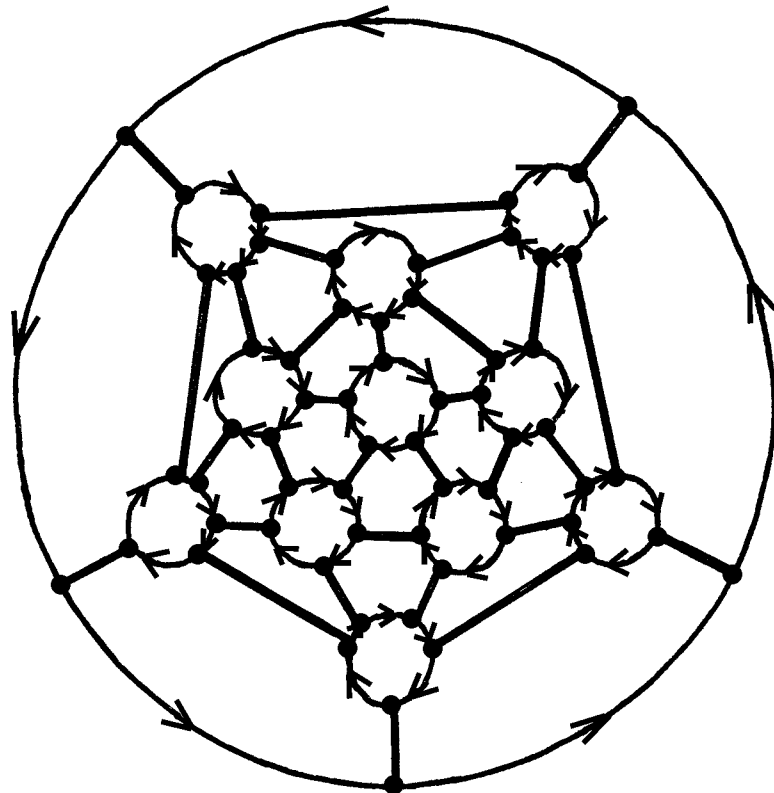


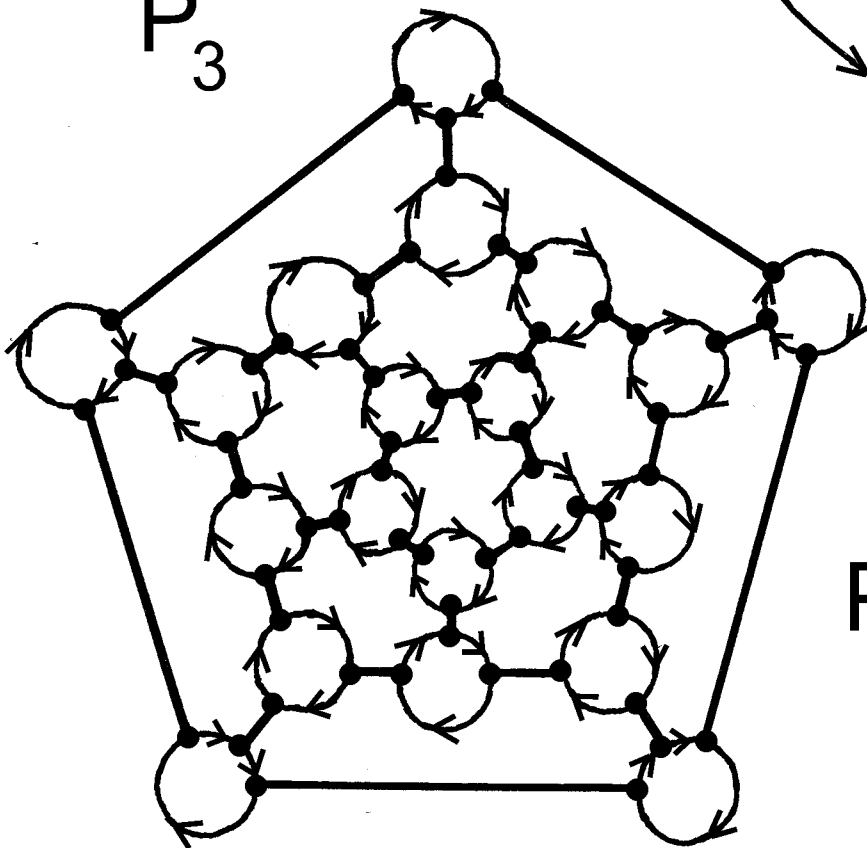
Рис. 8а



P_3



P_4



P_5

Рис. 8b

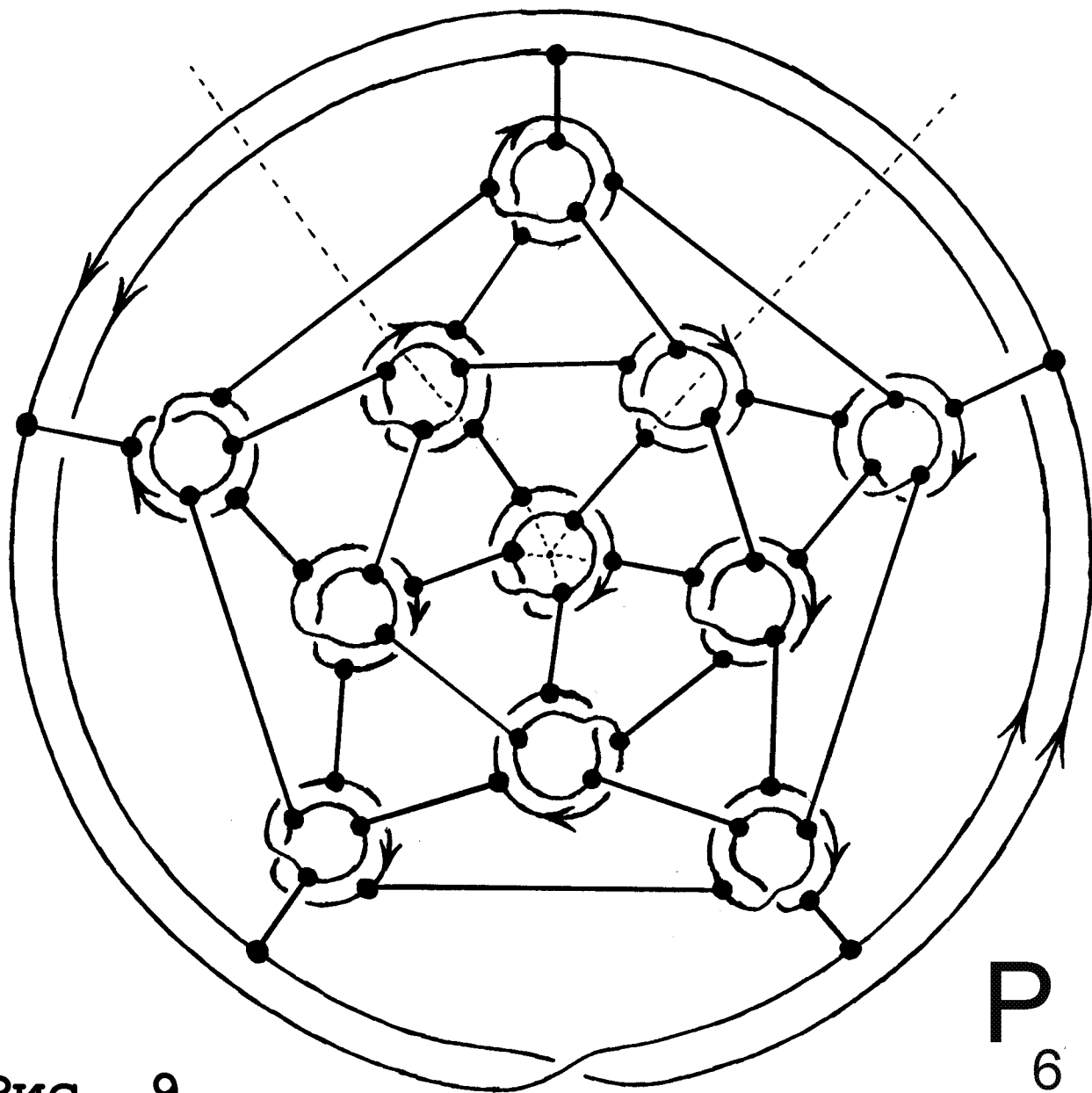


Рис. 9

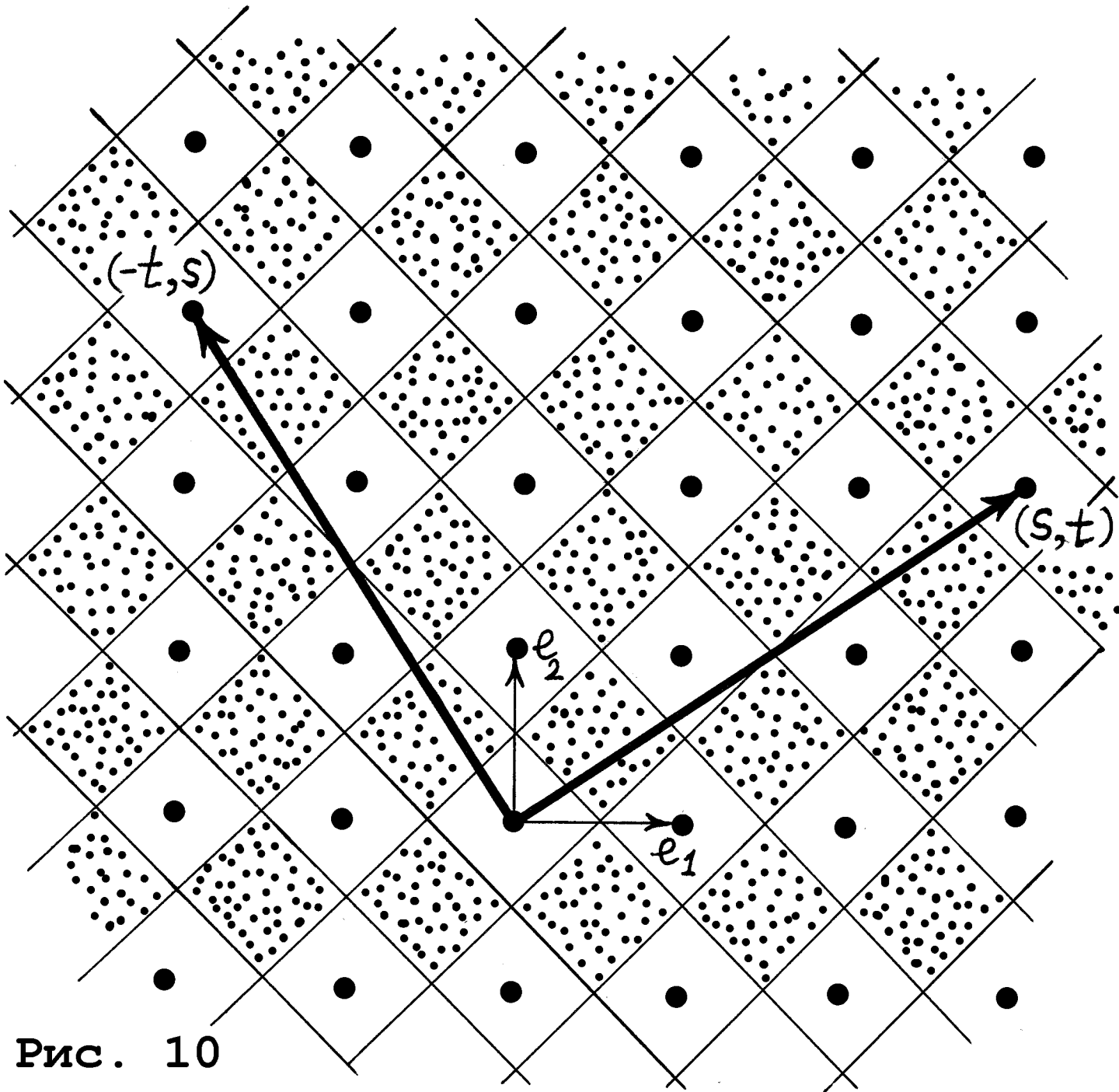


Рис. 10

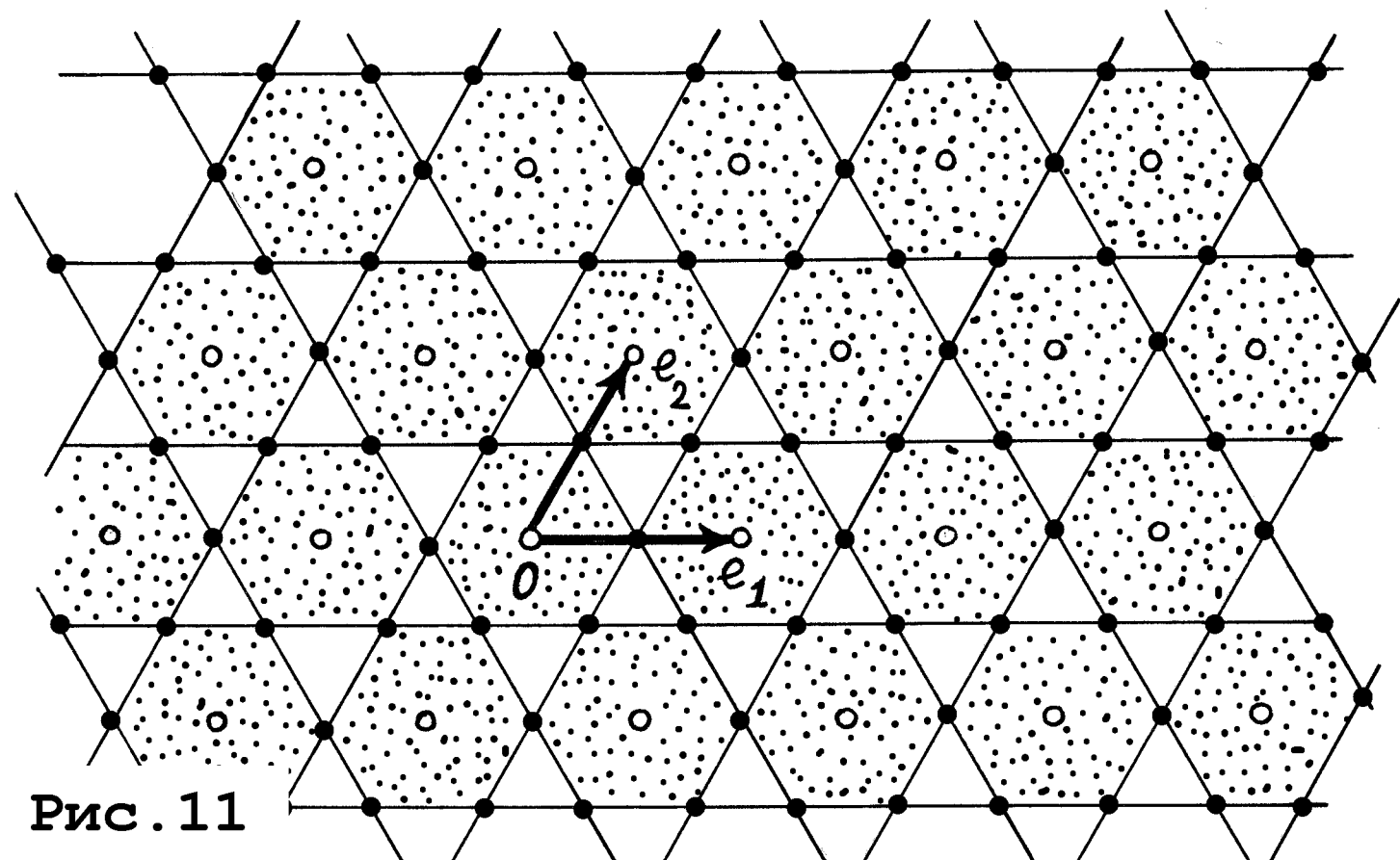


Рис. 11

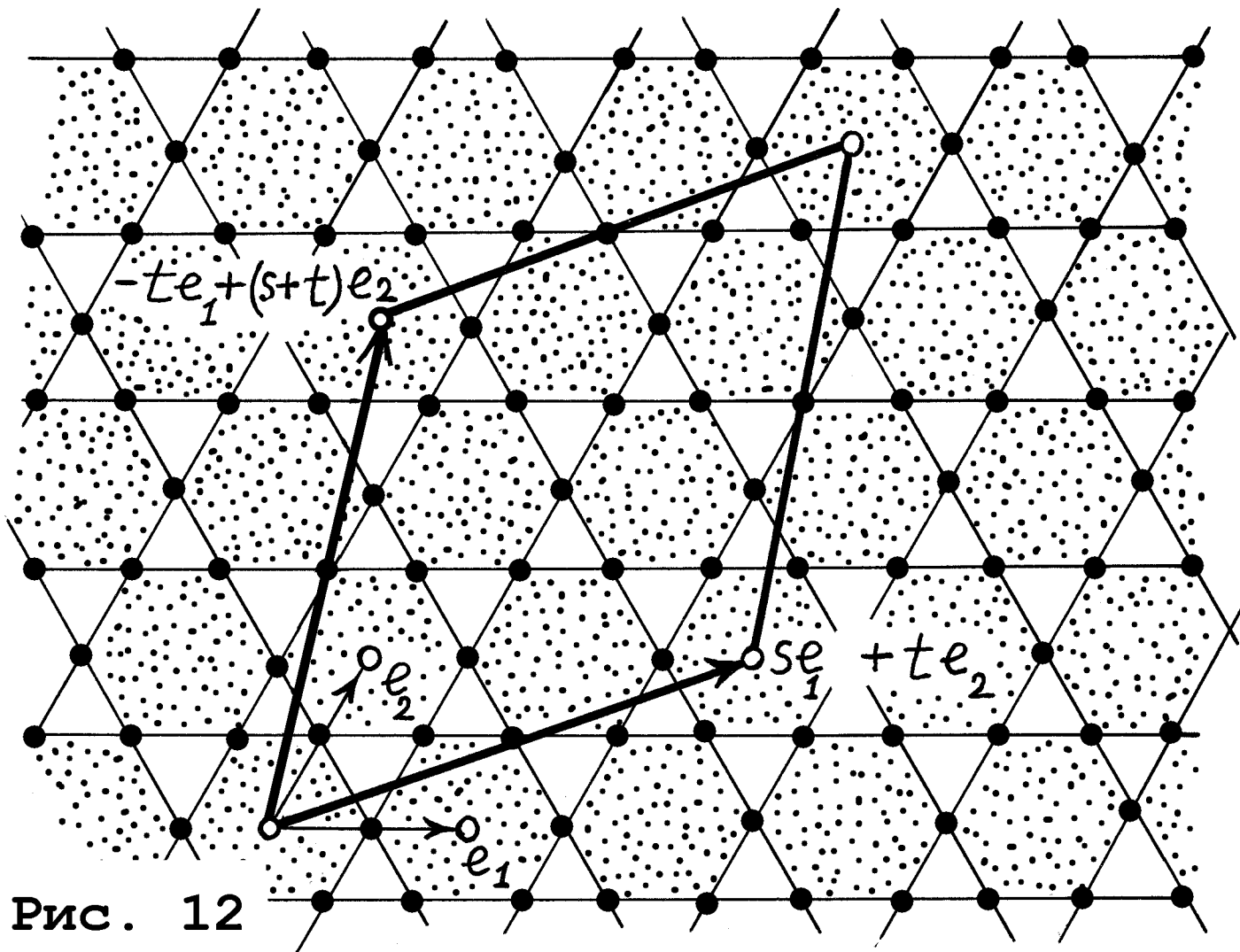


Рис. 12

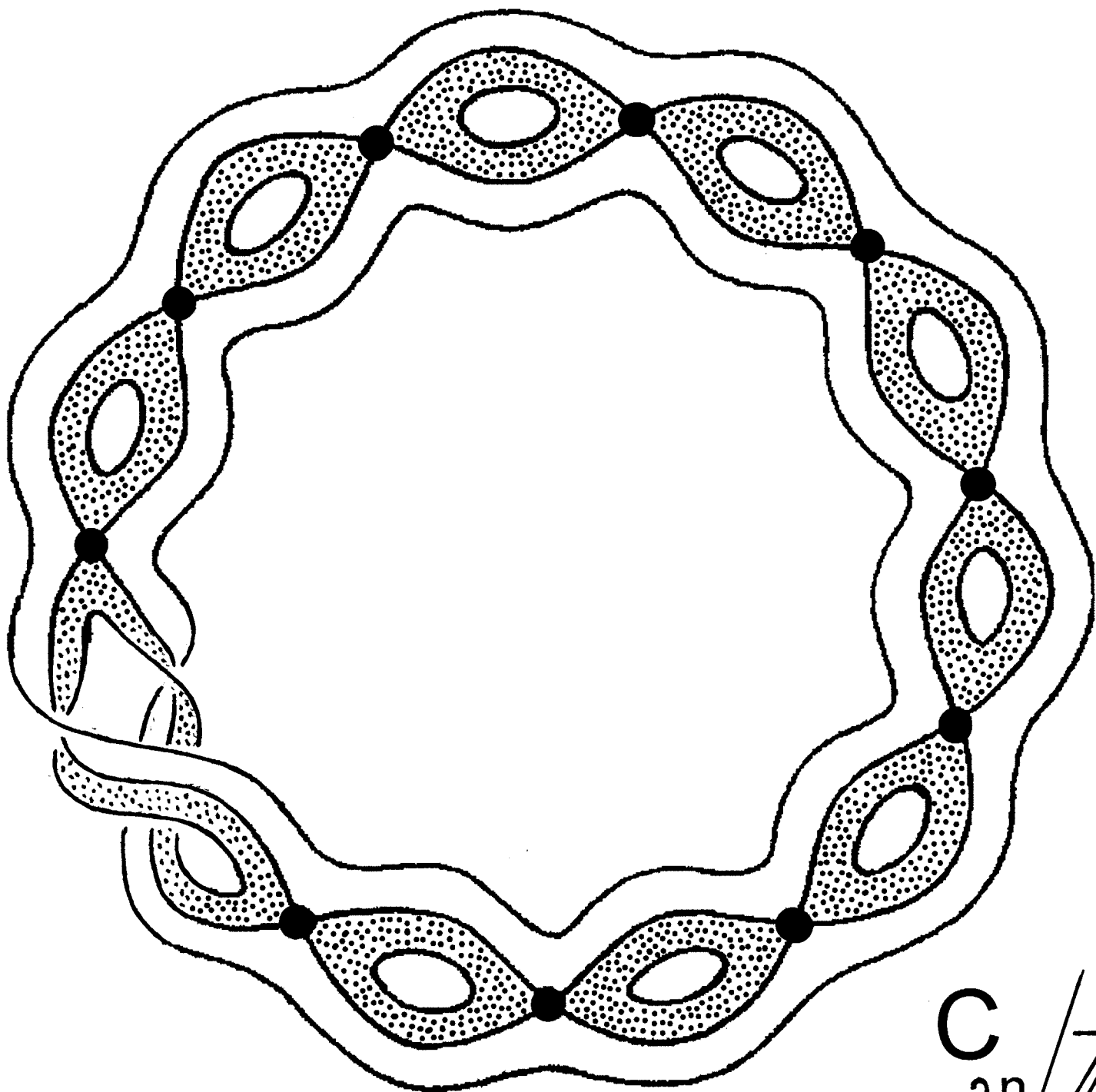


Рис. 13а

$$C_{2n}/Z_2$$

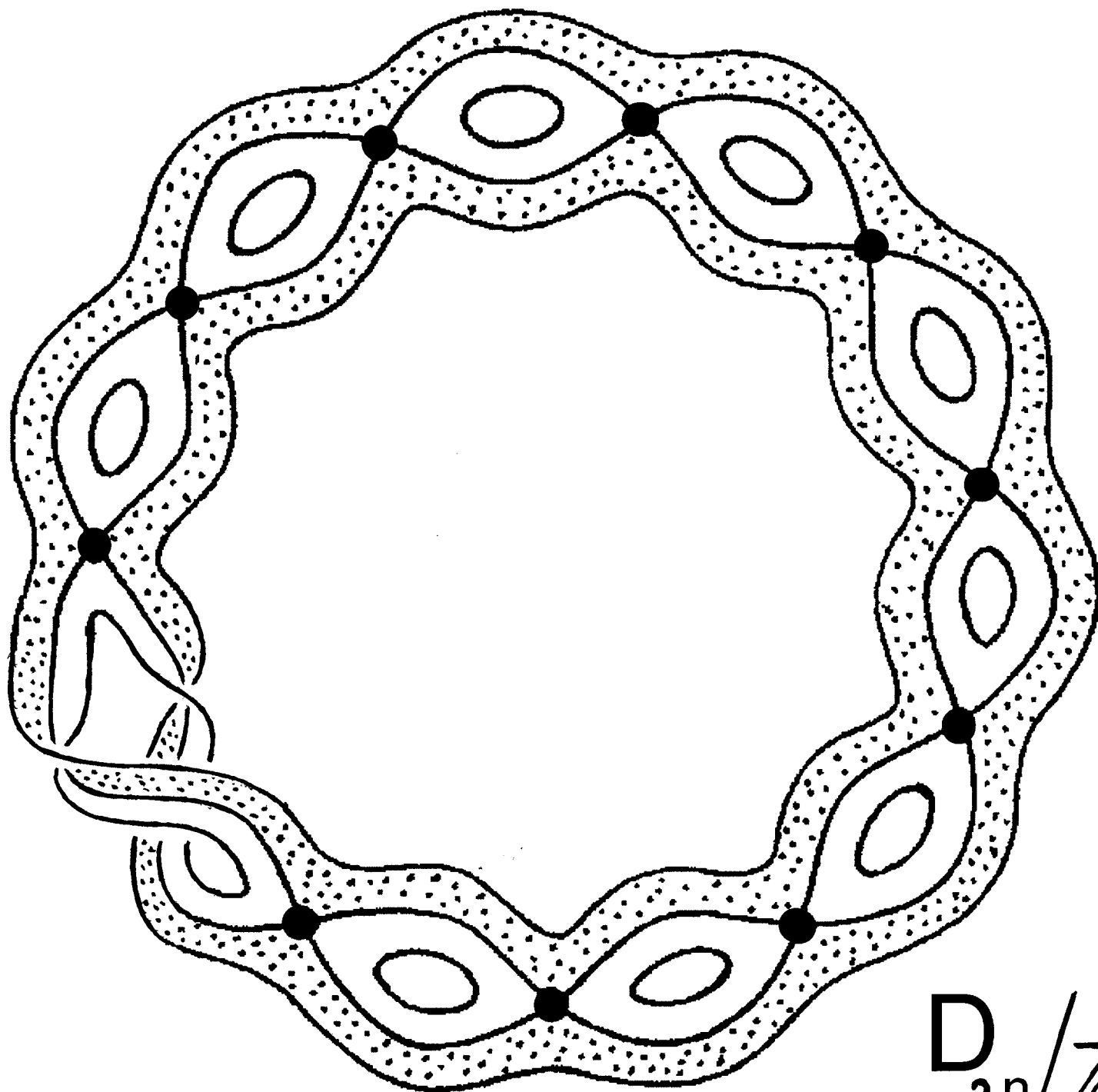
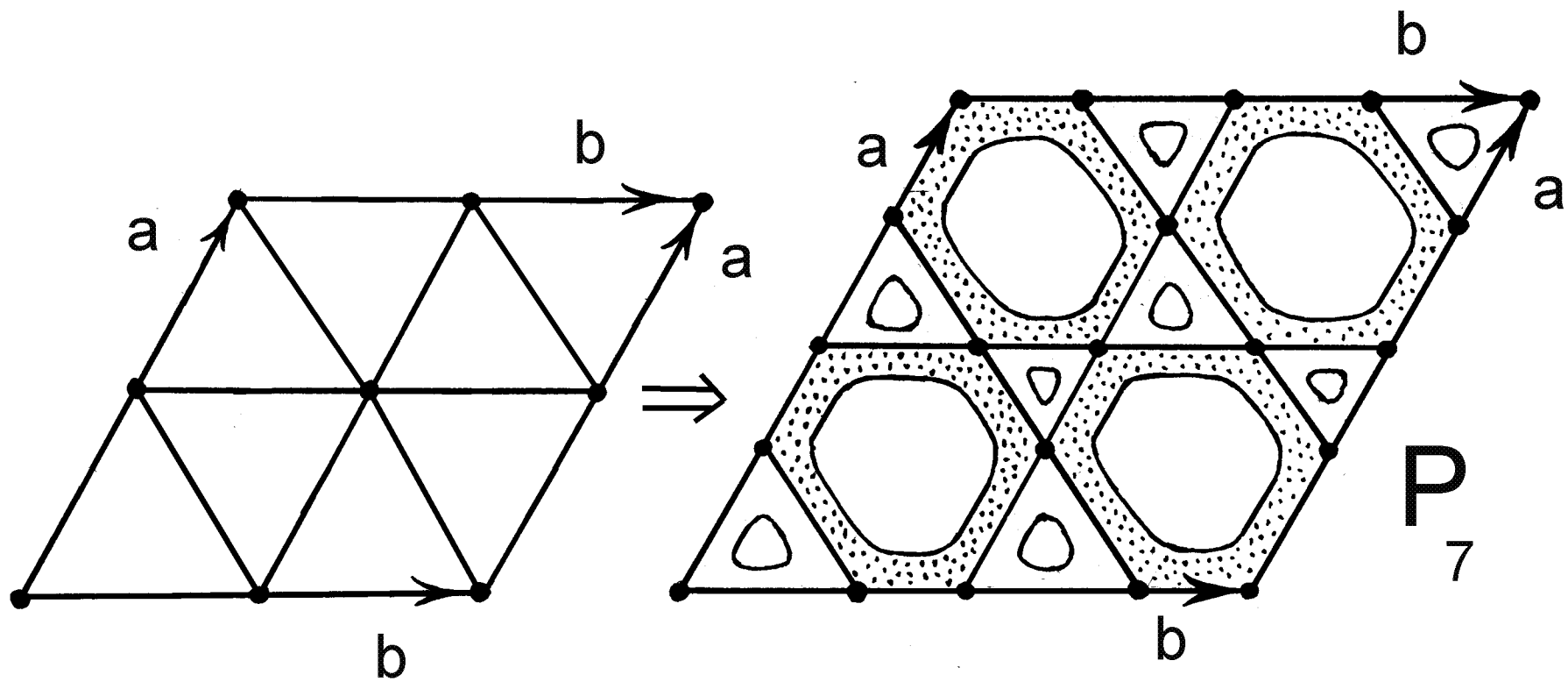


Рис. 13b

$$D_{2n}/Z_2$$



"псевдо-октаэдр"

усеченный "псевдо-октаэдр"

Рис. 14