# ТОПОЛОГИЯ ОСОБЕННОСТЕЙ ОТОБРАЖЕНИЯ МОМЕНТА КЛАССИЧЕСКИХ И КВАНТОВЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Цикл задач по материалам конференции
"Монодромия и геометрические фазы в классической и квантовой механике"
Лейден, Голландия (15–20 июня 2009)

А.В.БОЛСИНОВ, А.А.ОШЕМКОВ

---

*Конференция "Монодромия и геометрические фазы в классической и квантовой механике" успешно прошла в Лейдене (15–20 июня 2009). По существу она была посвящена топологии интегрируемых гамильтоновых систем. Эта тематика сейчас активно развивается, однако работы, идеи и результаты участников нашего семинара не используются в той мере, как могли бы. Нужно попытаться на ситуацию отреагировать.*

*Коллеги, занимающиеся приложениями, по-прежнему предпочитают работать со сложными аналитическими формулами при качественном анализе динамики. Это выглядит довольно странно. Они понимают, что топологические инварианты существуют, но предпочитают находить их при помощи довольно громоздких вычислений.*

*Нам кажется, что подход должен быть противоположным, поскольку топологические эффекты — более грубые и легко понимаются "из картинок". Разумеется оба подхода плодотворны, но наш подход должен быть "топология для динамики", а не наоборот "динамика и аналитика для топологии". Грубо говоря, глядя на картинку мы должны ее понимать и делать выводы относительно переменных действия и всего остального, в частности объяснить многие формулы, соотношения и прочее.*

*В качестве возможной реакции предлагается, в частности, заняться задачами, приведенными ниже. По своему уровню большинство из них вполне доступны нашим студентам, а отклик у наших коллег мы можем получить неплохой. Мы готовы обсуждать, комментировать, помочь с литературой и т. п.*

*Точные ссылки на работы, где обсуждаются близкие вопросы, не всегда сразу легко указать. Иногда после задачи мы указываем лишь фамилию автора, в работах которого скорее всего можно будет найти полезный материал. Их следует поискать в ArXiv'е. За дополнительной информацией нужно обращаться к нам.*

---

Версия от 31 августа 2009 г.

Новые версии этого текста будут появляться на сайте кафедры
http://dfgm.math.msu.su (раздел "Задачи для исследования")

## 1. МОНОДРОМИЯ ПОДСОЛНУХА

Если рассмотреть интегрируемую гамильтонову систему с двумя степенями свободы и регулярную часть образа отображения момента, то эта регулярная часть будет представлять собой некоторое двумерное многообразие с целочисленной аффинной струкутрой. Эта целочисленная структура задается переменными действие-угол, которые являются хорошими локальными координатами вне бифуркационной диаграммы. Если мы нарисуем линии уровня переменных действия с целыми значениями, то их точки пересечения дадут нам решетку, которая в общем-то не будет зависеть от того, каким именно циклам на торе отвечают выбранные переменные действия.

Эта решетка имеет фундаментальный смысл. Она приблизительно совпадает с точками совместного спектра соответствующих квантовых операторов. Мы не будем здесь в это углубляться, но следует помнить, что именно эта идея является одной из главных мотиваций для изучения топологии интегрируемых гамильтоновых систем. Грубо говоря, именно эту решетку и видно в экспериментах.

Если посмотреть на решетку в случае фокус-фокус, то она издалека напоминает картинку подсолнуха. Однако при более внимательном анализе оказывается, что в подсолнухе дело обстоит иначе и никакой монодромии нет. Решетка подсолнуха с топологической точки зрения — это обычная решетка полярной системы координат (в первом приближении). Вопрос в том, чтобы построить естественный пример интегрируемой гамильтоновой системы (или, точнее говоря, лагранжева слоения), реализующий эту решетку.

В общем-то понятно, как построить такой пример на диске с выброшенным центром (но это тоже нужно аккуратно сделать). Но пока совсем непонятно, можно ли такую некомпактную картинку компактифицировать. Компактификация означает добавление особого слоя, отвечающего центру диска. Что это за особый слой?

Поскольку клеточки при подходе к центру становятся все мельче и мельче, это может означать прямо противоположное. Вместо добавления компактного особого слоя мы должны рассматривать гамильтонову систему с особенностями и уходить не к особому слою, а на бесконечность. Такая картинка вроде бы предполагает, что одна из переменных действия неограниченно возрастает, так как число целочисленных клеток не ограничено.

На самом деле, решетка подсолнуха устроена иначе. Она не такая, как в полярных координатах, а имеет два семейства спиралей. Хотелось бы и для такой решетки что-то разумное сказать. Вполне возможно, что хорошей моделью была бы система на плоскости с магнитным полем, которое имеет в центре особенность и поэтому не задается точной 2-формой. Возможно, и потенциал нужно устремить к бесконечности.

Есть очень известный в физике пример ("эффект Ааронова–Бома"; см. Ландау–Лифшиц), где вроде бы движение просходит по торам и имеется нетривиальная монодромия, которая возникает из-за особенности магнитного поля на оси $z$. Этот пример может быть непосредственно связан с обсуждаемой задачей.

Какие в этом случае будут торы? Хотелось бы иметь торы, а не цилиндры. Из топологических соображений получается, что интегрируемая система должна реализовываться на $M^4 = T^2 \times (S^1 \times \mathbb{R}^1)$. Хотелось бы реализовать ее на каком-нибудь кокасательном пространстве с естественной гамильтоновой системой (т.е. кинетическая энергия, плюс потенциальная, плюс магнитное поле).

Из топологических соображений получается, что конфигурационным пространством такой системы должет быть либо тор (но тогда по каким-то причинам из кокасательного пространства следует удалить точку), либо система должна реализовываться на кольце, но тогда придется рассматривать как бы не всю систему, а только небольшую ее часть, где движение происходит по торам (т.е. некомпактные слои тоже допускаются, но мы их игнорируем). Впрочем, эти соображения могут и не оправдаться.

*Работы на эту тему*: B. Zhilinskii (про подсолнух), H. Dullin, R. Cushman, San Vu Ngoc.

## 2. ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ВРАЩЕНИЙ

Почти все доклады про монодромию, представленные на конференции были связаны с гамильтоновыми системами инвариантными относительно вращений. Это объясняется в первую очередь не тем, что такие системы наиболее интересны, а тем, что они самые простые для вычислений, поскольку по группе вращений можно провести редукцию. Это выглядело довольно странно, поскольку складывалось впечатление, что фокус-фокус и монодромия связаны именно с наличием явно заданной $S^1$-симметрии. На самом деле, ситуация — скорее противоположная. Фокус-фокус влечет существование $S^1$-симметрии. Она может быть достаточно сложной и никоим образом не связанной ни с какой группой, действующей на конфигурационном пространстве. Однако существование такой группы делает появление фокусных особенностей более вероятным, поскольку седло-седло оказывается запрещенным (седло-центр, фактически, тоже, поскольку множество критических точек для генератора действия оказывается двумерным симплектическим многообразием, а в разумных примерах это обычно просто точка). Кстати, на эту тему тоже интересно подумать: какие особенности могут быть у системы, если на конфигурационном пространстве действует каким-то разумным способом тор? Если действие не на конфигурационном пространстве, а на всем $T^*M$, то ответ, в принципе, известен и дается одной из очень общих теорем Зунга.

Так или иначе, системы с $S^1$-действием интересны и важны. Выглядит довольно странно, когда люди рассматривают такие примеры по отдельности, поскольку они удовлетворяют многим общим свойствам. Наше предложение состоит в том, чтобы изучить такие системы в целом, подобно тому, как это было сделано для квадратично интегрируемых геодезических потоков. Рассматривать следует несколько типов конфигурационных пространств: $T^2$, $\mathbb{R}^2$, $S^1 \times \mathbb{R}$, $S^2$. Наиболее интересным может оказаться случай, когда мы рассматриваем систему с магнитным полем, поскольку такие системы могут давать нетривиальные примеры аффинных структур на базе слоения Лиувилля.

Кроме того, стоит включить в рассмотрение случай, когда слои становятся некомпактными.

Нужно, вообще-то, сначала разобраться со следующим "простым" вопросом. Мы собираемся считать все наши объекты инвариантными относительно действия группы вращений. Такое впечатление, что векторное поле, задаваемое группой $S^1$, будет иметь глобально заданный гамильтониан только в том случае, когда магнитное поле задается точной формой. Этот случай как раз не очень интересен. Отсюда вроде бы следует, что при добавлении магнитного поля интегрируемость может теряться. Однако есть и противоположное соображение. Поднимем все на односвязную накрывающую. Там интегрируемость будет. Но торы Лиувилля могут стать некомпактными... Надо бы разобраться, что происходит.

Итак, задача состоит в топологическом анализе гамильтоновых систем инвариантных, относительно вращений. Имеются в виду системы с гамильтонианами вида $H = K + V$, где $K$ — кинетическая энергия, $V$ — потенциальная. Симплектическая структура в общем случае содержит магнитную добавку, т.е. $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i + \sum a_{ij}(q) dq_i \wedge dq_j$, где второе слагаемое представляет собой замкнутую 2-форму на конфигурационном пространстве. При этом предполагается, что все ингредиенты (т.е. метрика $K$, потенциал $V$ и магнитное поле $A$) инвариантны относительно группы вращений, действующей на конфигурационном пространстве.

Перечислим несколько конкретных вопросов, с которыми надо разобраться, прежде чем переходить к общей задаче.

**(2.a)** Разобрать работы на эту тему: K. Efstathiou, L. Bates, R. Cushman, D. Sadovskii, B. Kruglikov. В частности, в работах этих авторов содержатся примеры систем нужного вида (волчок Лагранжа, сферический маятник, бутылка шампанского, $^3$He). (См. также книгу: K. Efstathiou, “Metamorphoses of Hamiltonian systems with symmetries”, vol. 1864 of Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 2005.

**(2.b)** Описать “типичные” бифуркации для гамильтониана вида $H = p_1^2 + p_2^2 + f(q_1^2 + q_2^2)$ (дополнительный интеграл здесь: $p_1 q_2 - p_2 q_1$).

**(2.c)** То же самое для неплоской метрики.

**(2.d)** То же самое, но с магнитным полем.

## 3. Бифуркации особенностей

При изучении систем, инвариантных относительно вращений, естественным образом возникают некоторые интересные бифуркации. Наиболее характерными, на наш взгляд, являются следующие четыре:

- Бифуркация Хопфа, при которой точка центр-центр становится точкой фокус-фокус и переходит с границы образа отображения момента внутрь. Эта бифуркация вроде бы хорошо изучена, но мы ее до конца не понимаем. К тому же она вроде бы в основном обсуждается в неинтегрируемом случае, поэтому в интегрируемом контексте ее важно рассмотреть отдельно. Это может быть уже сделано, тогда нужно найти соответствующие работы, понять результаты и переформулировать в терминах теории топологической классификации.

- Вторая бифуркация тоже связана с переходом между точками фокус-фокус и центр-центр. Но сценарий совсем другой. Точка фокус-фокус на бифуркационной диаграмме превращается в “улыбку” с точкой “центр-центр” на нижней ветви (“возникновение треугольной улыбки”). Интересно заметить, что с топологической точки зрения особые точки, расположенные в прообразе улыбки, образуют погруженное многообразие, являющееся тором с перетяжкой. Именно такую топологию имел до бифуркации особый слой точки фокус-фокус. Непосредственной связи между этими особенностями не видно, хотя полезно заметить, что и до, и после бифуркации окрестность особого множества является деформационным ретрактом тора с перетяжкой. Следует заметить, что монодромия сохраняет свой тип.

- Третья бифуркация — это “появление улыбки” из ничего. Никаких положений равновесия нет. События, видимо, происходят в окрестности резонансного тора. С точки зрения особого множества из пустого множества возникает особый тор, половина которого — гиперболическая, половина — эллиптическая. Этот тор не является ни симплектическим, ни лагранжевым. Лагранжевость нарушается при переходе от гиперболических к эллиптическим.

- Четвертая бифуркация — возникновение “улыбки типа ласточкиного хвоста” на границе бифуркационной диаграммы. До бифуркации мы имеем просто семейство атомов $A$. Один из этих атомов становится вырожденным, а затем превращается в семейство гиперболических атомов и две параболические траектории. С точки зрения семейства особых траекторий происходит следующее: семейство траекторий остается гладким, но среди эллиптических появляется полоса гиперболических.

**(3.a)** Для каждой из этих бифуркаций нужно подробно описать топологию, монодромию, круговые молекулы и тому подобные вещи.

**(3.b)** Нужно найти наиболее простые (локальные) формулы для $H(p, q, \alpha)$ и $F(p, q, \alpha)$, где $\alpha$ — параметр бифуркации.

Как обычно, нужна теорема типа “от локального к глобальному”. Другими словами, мы накладываем некоторые ограничения на $H(p, q, \alpha)$ и $F(p, q, \alpha)$ в окрестности особой точки или особой траектории и отсюда делаем вывод о топологии всей бифуркации в целом. Идеально было бы доказать существование гомеоморфизма (или диффеоморфизма) между этими бифуркациями. Нужно понять, связаны ли такие бифуркации с наличием априорной $S^1$-симметрии, или они являются типичными для систем общего типа.

Бифуркации особенностей бывают двух типов: локальные и нелокальные. Поясним это на примере. Бифуркация Хопфа — локальная. Она вся целиком происходит в окрестности одной неподвижной точки, которая совпадает со слоем Лиувиллева слоения. Вторая бифуркация из списка — нелокальная, поскольку слой содержащий точку, большой и так большим и остается. Однако, скорее всего, все нетривиальные события по-прежнему происходят в малой окрестности неподвижной точки. А кусок, содержащий, всю оставшуюся часть слоя, вообще никак не меняется (просто приклеивается к разным вещам, изменившимся в результатае бифуркации). Было бы полезно разобраться с вопросом о локальности бифуркаций.

**(3.c)** Выяснить, восстанавливается ли полулокальная топология особенности по ее локальной нормальной форме.

Результатом анализа описанных особенностей должно стать их четкое формальное определение (кстати, надо сначала поискать его в литературе).

Хорошо бы понять, связана ли природа этих бифуркаций с наличием дополнительной $S^1$-симметрии, которая сохраняется при бифуркации. Другими словами, верно ли, что наличие $S^1$-симметрии автоматически следует из определения.

*Работы на эту тему* (примеры таких бифуркаций): K. Efstathiou, А. Москвин, Б. Кругликов, М. Ивочкин.

### 4. Топология "улыбок"

В предыдущей задаче мы обсуждали появление улыбок трех типов. Если механизм их появляения понятен, то их топология может быть восстановлена (в этом, собственно, смысл предыдущей задачи). Представим теперь, что мы не знаем, каким образом эти улыбки появились. Мы лишь видим их на бифуркационной диаграмме. Можем ли мы востановить топологию (в частности круговые молекулы и монодромию) просто из вида бифуркационной диаграммы?

*Работы на эту тему* (примеры таких бифуркаций): K. Efstathiou, А. Москвин, Б. Кругликов, М. Ивочкин.

### 5. "Lost in translation" и дробная монодромия

В топологии интегрируемых систем несколько лет назад появилось целое новое направление занимающееся изучением феномена дробной монодромии. Речь на самом деле идет о следующем.

Рассматривается круговая молекула вокруг особенности специального вида. Эта молекула содержит только один атом $A^*$. Этот атом обладает очень хорошим свойством: и до, и после бифуркации имеется ровно один тор. Имеется "монументальная работа"

> Nekhoroshev, Nikolai N.; Sadovskii, Dmitrii A.; Zhilinskii, Boris I. "Fractional Hamiltonian monodromy", Ann. Henri Poincaré 7 (2006), no. 6, 1099–1211

объемом 100 страниц, где описывается топология этой молекулы.

Дробной монодромией при этом называется следующее. Если попытаться выбрать базисные циклы на торах Лиувилля некоторым естественным образом, то есть так, чтобы они естественным образом трансформировались при переходе через бифуркационный уровень, то мы увидим, что базисных циклов с таким свойством не существует. Разумеется, речь идет о $\mu$-циклах (точнее, о циклах этого типа). Циклы $\lambda$ никакой проблемы не представляют, они через бифуркацию проходят без труда. Поскольку выбраные таким образом циклы не образуют базиса, то когда мы начнем писать матрицы склейки (а это и есть матрицы монодромии в терминологии авторов), то эти матрицы окажутся не целочисленными, а рациональными. Собственно, на этом очевидном наблюдении вся теория и построена.

Авторы уделяют очень много времени обсуждению понятия "passable cycle" и тому подобных вещей, что разумеется было подробно сделано в теории топологической классификации. В ее терминах бо́льшая часть этой работы состоит в описании метки $n$ (остальные две метки вычисляются очевидным образом, поскольку заведомо известно, что на всей системе определено глобальное действие окружности; отсюда сразу $r = 0$, $\varepsilon = 1$). Мы знаем прекрасно из теории топологической классификации, что одна метка почти наверняка может быть однозначно восстановлена, если известна топология изоэнергетической поверхности (эта идея была проработана подробно П. Топаловым). Ответа мы пока не знаем, но почти наверняка топология легко восстанавливается, поскольку "молекула" ретрагируется на особый слой, топология которого известна. В данном случае мы почти наверняка сможем продемонстрировать преимущества нашего подхода.

Работа должна состоять из нескольких частей. Во-первых следует перевести результат 100-страничной работы на язык круговых молекул. Это несложно. Нужно ясно продемонстрировать, что все эти проблемы вокруг "passable cycle" уже были решены в теории топологической классификации при помощи допустимых систем координат. Заодно можно сформулировать простой общий результат о том, какие атомы допускают, а какие не допускают эти самые "passable cycle".

Конкретный вопрос, с которого следует начать, следующий.

**(5.a)** Перевести формулировку авторов на язык круговых молекул. То есть, нужно вычислить круговые молекулы особенностей, о которых идет речь в упомянутой выше работе.

Имеется еще одна работа (гораздо более серьезная с математической точки зрения)

> Nekhoroshev, N. N. "Fractional monodromy in the case of arbitrary resonances." (Russian) Mat. Sb. 198 (2007), no. 3, 91–136

в которой сделано практическо то же самое. Но отличие состоит в том, что атом является вырожденным: он представляет собой цветок со многими лепестками, который поворачивается при движении вдоль оси атома. Однако, для применения методов теории топологической классификации это никакой отдельной проблемы не составляет. Все можно сделать по аналогии.

**(5.b)** Вычислить (независимым образом) соответствующую круговую молекулу.

Скорее всего доказательство получится довольно простым, если сначала описать топологию трехмерной поверхности. В общем случае ситуация несколько интереснее, поскольку молекула будет содержать два атома. В нашей терминологии эти атомы, однако, будут принадлежать одной и той же семье, поэтому снова инвариант будет задаваться одним числом: меткой $n$.

Вроде бы, в таких ситуациях метка $n$ просто совпадает с числом Эйлера глобально заданного расслоения Зейферта. Тем самым, полный ответ дается просто топологией $Q^3$. В принципе, топология Зейфертова слоения, по крайней мере в окрестности особого слоя, совершенно понятна: окрестность расслоена на концентрические сферы $S^3$ и каждая сфера несет на себе стандартное расслоение Зейферта (вроде бы, просто с одним особым слоем типа (1,2)). То же самое происходит в случае более высокого резонанса. Никаких априорных трудностей не видно. Хорошо бы по ходу дела разобраться с тем, важно ли, каким образом к этой сфере приклеивается "стандартный неособый кусок". Это важный момент: вне сферы никаких особенностей нет. Критические окружности очень маленькие и лежат целиком в сфере. Сделать специальный акцент на том, что обсуждаемая здесь монодромия носит локальный характер: для ее описания достаточно разобраться в том, что происходит в малой окрестности особой точки.

На самом деле, теория дробной монодромии весьма полезна, поскольку имеет вполне разумную физическую интерпретацию и приложения в теории атомов и молекул с симметриями. Одна из наших целей в этом контексте — продемонстрировать преимущества подхода Фоменко, которые в данном случае несомненны. Неудивительно, что люди не хотят изучать язык теории топологической классификации. Но в данном случае вопрос совсем не в терминологии, а в подходе. На этом нужно сделать специальный акцент, показав что перевод с одного языка на другой вообще никакого труда не представляет. Было бы, разумеется, приятнее, чтобы переводчиками выступали не мы, а авторы, переоткрывающие многие результаты теории топологической классификации. Но переводчиками придется быть нам. Заодно и покажем, что языковых проблем для нас не существует. Можно даже привести в работе, так сказать, словарь, переводящий термины с одного языка на другой.

Есть еще и другая очень длинная работа совсем других авторов, где то же самое число вычисляется при помощи теории связностей Гаусса–Манина. (См. доклад P. Mardesic'а на конференции.)

Здесь может быть также полезна работа

> Nguyen Tien Zung, "Convergence versus integrability in Birkhoff normal form", Annals of Maths. 161 (2005), No.1, 141–156.

## 6. Переменные действия в окрестности особенностей и квантование

В значительной мере интерес к теории топологической классификации обусловлен ее приложениями к задачам квантования. Как обычно, людей интересуют не глобальная топология молекул, а более простые вещи, связанные с поведением переменных действие-угол. Прокомментируем, что именно считается интересным и как это связано с теорией топологической классификации.

Рассмотрим интегрируемую гамильтонову систему с гамильтонианом $H$ и интегралом $L$. Квантование означает, что вместо $H$ и $L$ мы теперь будем рассматривать пару коммутирующих операторов $\hat{H}$ и $\hat{L}$, действующих в некотором бесконечномерном пространстве.

Задача квантования состоит в том, чтобы изучить (найти, построить) собственные значения для $\hat{H}$ и $\hat{L}$. Поскольку операторы коммутируют, то они будут иметь общие собственные функции и тем самым собственные значения будут возникать парами $(h_i, l_i)$. Эту пару собственных значений можно рассмотреть как точку на плоскости интегралов $H, L$. Где эти точки расположены?

Ответ состоит в том, что эти точки будут приблизительно совпадать с теми точками, в которых обе переменных действия $I_1$, $I_2$ (как функции первых интегралов) одновременно принимают целые значения (точнее, значения вида $\hbar m$, $m \in \mathbb{Z}$; "почему это так?" в нашу компетенцию пока не входит).

Замечательным является тот факт, что хотя сами переменные действия выбираются неоднозначно, точки, о которых идет речь (т.е. целочисленные точки пересечения линий уровня переменных действия) определены однозначно. Поэтому рисовать линии уровня мы не будем, а поставим просто точки. Именно такие точки и даются физическими экспериментами. Там нет интегрируемости, но если считать систему интегрируемой приближенно, то все имеет смысл.

Совершенно ясно, что наличие точек дает некое представление о целочисленной аффинной структуре на базе, определяемой переменными действия. Если мы находимся вдали от бифуркаций, то мы просто видим решетку. Эта решетка с локальной точки зрения никакой структуры не имеет. Однако как только мы будем подходить к особенностям или проходить вдоль нетривиальных циклов в базе, мы сразу же увидим какие-то особенности решетки. Именно таким образом была обнаружена нетривиальная монодромия в квантовых задачах.

До последнего времени вся активность в этой области сосредотачивалась вокруг особенностей типа фокус-фокус. Однако сейчас главный интерес будет концентрироваться вокруг гиперболических бифуркаций. Уже появилась нетривиальная “теория бидромии”. Речь, как выяснилось, идет о том, что наши коллеги просто изучают атом $B$. Более продвинутые коллеги изучают точки седло-седло. Они главным образом смотрят на спектр, пытаясь понять, какой же именно топологии эти все картинки соответствуют.

Про спектр мы ничего особенного сказать не можем, но про переменные действия мы знаем все, что нужно. Эти результаты можно извлечь из теории симплектических инвариантов (Нгуен Тьен Зунг, Сан Ву Нгок, Болсинов), но этого можно и не делать. Достаточно просто посмотреть на допустимые системы координат, трансверсальные площадки и т. п. Локальное поведение переменных действие-угол легко восстанавливается. Собственно, нужно понимать только взаимное расположение циклов и асимптотику (известно, что она имеет вид $x \ln x$).

**(6.a)** Нужно сделать следующее: нарисовать поведение целых точек для переменных действие-угол вблизи наиболее простых седловых бифуркаций. Объяснить, как выбирать циклы и тому подобные вещи. Главное — нарисовать разумные картинки.

Пользователям необходимо будет объяснить следующие простые вещи: почему одна из переменных действия выживает при гиперболической бифуркации, почему точки сгущаются при подходе к бифуркационной кривой, почему с одной стороны точки спектра в два раза гуще, зависит ли картинка от “сдвига” (если симплектическая форма не является точной, то действия определены с точность до произвольных констант). Надо не забывать, что $\hbar$ — маленькое число.

**(6.b)** Нужно показать различие между симметричными и несимметричными атомами.

Если взять ориентируемый атом, то решетка будет выглядеть очень просто: грубо говоря, она будет прямым произведением равномерной решетки на прямой и решетки (тоже на прямой) со сгущающимися в нуле точками. Если атом неориентируемый, то ситуация изменится. Мы увидим менее тривиальную картину. В статье про дробную монодромию (см. задачу 5) картинка нарисована, но было бы приятнее сделать честный эксперимент: нарисовать картинку, выдаваемую теорией, а затем сравнить ответы.

Далее, мы знаем, что любой неориентируемый атом является $\mathbb{Z}_2$-фактором своего дубля. Для дубля решетка “тривиальна”. Что происходит с ней при $\mathbb{Z}_2$-факторизации? Как получить результат без вычислений?

**(6.c)** С точки зрения рисования этих картинок наиболее интересным является случай, когда один тор перестраивается в один тор, поскольку в образе отображения момента будет всего один лист. Дать список из 3–4 атомов такого типа и сделать для них более подробные вычисления. Что, например, происходит в случае атома $A^{**}$.

**(6.d)** Кроме того, чтобы нарисовать все картинки в случае стандартных атомов, было бы полезно рассмотреть вырожденные атомы и найти для них асимптотику действия. Рассмотреть два случая: прямое произведение и фактор по $\mathbb{Z}_n$.

Еще раз подчеркнем, что с математической точки зрения здесь ничего сложного нет. Грубо говоря, нужно нарисовать на прямой в окрестности нуля точки, являющиеся решением уравнения вида $x \ln x + c(x) = \hbar m$, $m \in \mathbb{Z}$. Все давно, по существу, известно. Но людям, занимающимся приложениями, эти вопросы интересны.

*Работы на эту тему*: B. Zhilinskii

### 7. Квантование точек типа седло-седло

Эта задача является развитием предыдущей.

**(7.a)** Нужно сделать то же самое, но теперь в окрестностях точек седло-седло. Эффект, который требуется прояснить, легко предсказуем. Мы имеем две вещи — круговую молекулу особенности и картинку, которая задает решетку переменных действия. Как они связаны? Можно ли глядя на решетку сказать что-нибудь о метках молекулы (и, быть может, даже об атомах молекулы) и наоборот: каким образом метки влияют на решетку?

**(7.b)** Кроме того, нужно прояснить вопрос с симметриями. Если в результате бифуркации возникает насколько торов, то возможны два случая: торы могут оказаться симметричными (именно так и бывает чаще всего) или несимметричными. Картинки для симметричных торов будут просто совпадать, а для несимметричных — накладываться друг на друга. Нужно все эти эффекты прояснить, а попутно описать симметрии особенностей “седло-седло”.

**(7.c)** Хочется также разобраться с тем, каким образом симметрии самой особенности типа седло-седло связаны с группой симметрий, действующей на прямом произведении, накрывающем особенность.

**(7.d)** Было бы полезно включить сюда точки типа седло-центр и центр-центр. Для фокуса все сделано Сан Ву Нгоком, но нарисовать аккуратную картинку также было бы полезно.

*Работы на эту тему*: B. Zhilinskii

## 8. ВЛИЯНИЕ ИНДЕКСА МАСЛОВА

Эта задача является развитием двух предыдущих. Если мы просто хотим нарисовать решетку переменных действия, то эта задача решается в рамках классической симплектической геометрии. Классической в том смысле, что ничего квантовать не надо. Если мы все же хотим сказать что-то разумное про спектр, то придется учитывать некоторые дополнительные эффекты, в частности индекс Маслова.

Что такое индекс Маслова, мы примерно понимаем в топологических терминах. Как он влияет на поведение спектра — менее понятно, но по словам экспертов, спектр сдвигается, грубо говоря, на $1/2$ (т.е. вместо целой решетки мы увидим полуцелую решетку). Поскольку индекс Маслова не может быть определен во внутренних терминах лагранжева слоения, необходимо рассматривать не только сами торы, но и их проекции на конфигурационное пространство, т.е. понимать, как особенность расположена по отношению к конфигурационному пространству.

Подобного типа вопрос кажется несколько искуственным, но картинки реального спектра вроде бы подтверждают, что эффект имеет место. Так, Жилинский на конференции показал, как устроен спектр 4-мерного твердого тела, и там похоже на то, что мы видим не одну, а две различные решетки сдвинутые по отношению друг к другу. Он сам ничего про индекс Маслова не говорил (он даже говорил, что там имеется 4 решетки, а не две, что странно, поскольку торов в тех зонах было всего 2), но весьма вероятно, что эффект объясняется именно этим. Наложение двух или нескольких решеток наблюдается в трех областях, в четвертой области (между атомами $B$) спектральных решеток несколько (наверное 4, как и должно быть), но они почти совпадают между собой, другими словами, дают почти кратные собственные значения (кратности 4?). Если идея с индексом Маслова разумна, то это означает, что для всех торов в этой зоне индекс Маслова один и тот же, тогда как в других зонах торы имеют разные индексы Маслова (последнее утверждение выглядит странно, поскольку торы симметричны, но на самом деле это может как раз отвечать некоторым свойствам индекса).

Предлагается во всем этом разобраться. Даже без квантования задача совершенно осмысленная.

**(8.a)** Понять, что такое индекс Маслова в случае 4-мерного твердого тела и вычислить его для всех торов. Параллельно было бы разумно посмотреть на задачу Неймана на $S^2$. Она имеет точно такие же особенности, а индекс Маслова вычисляется очень просто по проекциям торов Лиувилля на базу.

На эту тему (про квантовое 4-мерное твердое тело) имеется большая статья с картинками:

> Sinitsyn, Evguenii; Zhilinskii, Boris “Qualitative analysis of the classical and quantum Manakov top.” SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 3 (2007), Paper 046, 23 pp. (electronic).

## 9. ЗАДАЧА ЖИЛИНСКОГО ПРО ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ С СИММЕТРИЯМИ

На конференции Жилинский задал “наивный вопрос” о том, почему все-таки геодезичесий поток на эллипсоиде и волчок Эйлера настолько похожи с топологической точки зрения? Почему они имеют одинаковые лагранжевы словения? Этот факт можно было бы, разумеется, объяснить тем, что имеется классификация квадратично интегрируемых геодезических потоков на сфере, обе системы относятся к этому классу, а про такие геозически потоки мы все знаем. Его такой ответ не устроил: слишком сложно.

Он предложил свое объяснение. Обе системы очевидным образом допускают естественную группу симметрий с четырьмя образующими: симметрии относительно координатных плоскостей и обращение времени. Он заметил, что такие системы автоматически будут иметь 3 (или 6, если учитывать направление) особые геодезические, остающиеся инвариантными при симметриях. Может быть такая структура молекул определяется этими симметриями и ничего другого быть просто не может? Примерно так он поставил вопрос. Разумеется, сразу выяснилось, что есть много других геодезических потоков с той же группой симметрий, но с более сложными молекулами. Гипотеза после этого естественным образом изменилась: молекулы геодезического потока на эллипсоде и случая Эйлера являются наиболее простыми возможными молекулами с данной группой симметрий. Гипотеза очень правдоподобная.

**(9.a)** Задача: доказать или опровергнуть.

В случае двумерной поверхности вопрос скорее всего решается достаточно простыми методами. Но вопрос, разумеется, можно обобщить. В частности, на бóльшие размерности. Например, для размерности 3. Как устроена бифуркационная диаграмма и молекулы — хорошо известно.

**(9.b)** Верно ли, что молекула эллипсоида — наиболее простая в классе интегрируемых метрик, которые симметричны относительно отражений?

Задача кажется довольно сложной, но на самом деле вполне разрешимой. Нужно иметь в виду следующее простое обстоятельство. Из соображений симметрии, плоские сечения такой гиперповерхности будут давать двумерные вполне геодезические подмногообразия. Ограничения геодезического потока на эти подмногообразия тоже вполне интегрируемы и, стало быть, мы знаем по предположению индукции, как устроен поток на них. Легко сообразить, что эти подмногообразия будут давать почти всю бифуркационную диаграмму, $l$-типы и много другой информации. Так что из симметрий мы извлекаем довольно много дополнительной информации. Вроде бы, ее должно хватать для полной реконструкции.

## 10. Теория Кодаиры и топология лагранжевых слоений с особенностями

Дюистермаат сделал отличный доклад про комплексные лагранжевы слоения в размерности 2. Легко проверяется, что если мы введем на 2-мерном комплексном многообразии комплексную симплектическую структуру, то можно рассмотреть комплексную интегрируемую систему с одной степенью свободы. Вещественная и мнимая часть гамильтониана будут, как хорошо известно, коммутировать относительно вещественной симплектической структуры, являющейся вещественной частью комплексной. Если брать просто произвольный комплексный гамильтониан, то вещественная гамильтонова система получится не очень приятная, поскольку не будет полноты потоков. Естественный вопрос можно поставить так: как описать комплексные гамильтоновы системы с хорошими свойствами. Это подход со стороны гамильтоновой механики. Но можно вопрос попытаться сформулировать с точки зрения комплексной геометрии.

Комплексное отображение момента — это отображение из двумерного комплексного многообразия в одномерное. Слоем такого отображения будет комплексная кривая, и условие, что слои хорошие, заключается в том, что эта кривая с комплексной точки зрения — эллиптическая (с топологической точки зрения, это тор, что нам и надо). Таким образом, с комплексной точки зрения наиболее естественная формулировка такова: описать все комплексные расслоения с особенностями $\Phi : M^2 \to S$, регулярными слоями которых являются эллиптические кривые (здесь $M^2$ — комплексная поверхность, а $S$ — комплексная кривая).

В такой постановке задача была решена Кодаирой в 60-х годах. Он рассматривал более общий вопрос о структуре таких расслоений. В частности, он объяснил, как они устроены, когда слоем является $\mathbb{C}P^1$. В каком стиле написаны оригинальные работы Кодаиры, не очень понятно, но Дюистермаат расказал про эту теорию в абсолютно понятных терминах симплектической геометрии. Скорее всего, у него или его аспирантов есть работы на эту тему, где теория Кодаиры изложена на языке теории интегрируемых гамильтоновых систем.

**(10.a)** Найти и разобрать эти работы.

По-видимому, Дюистермаат дал полное описание особенностей, которые могут в этом контексте появляться, в терминах топологии интегрируемых систем (монодромия, переменные действия и пр.) Разобрать эти работы полезно по нескольким причинам:

1) из чисто эстетических соображений (это исключительно красивая и вполне доступная для понимания теория);

2) с точки зрения образования (технология и многие промежуточные результаты имеют фундаментальный характер и каждому профессиональному математику нужно иметь о них представление);

3) для лучшего понимания феноменов топологии интегрируемых систем (теория Кодаиры полностью описывает целый класс естественных лагранжевых слоений с особенностями).

Ничего особенно сложного в этой теории нет. Грубо говоря, она утверждает, что наиболее типичным особым слоем является хорошо известный нам слой типа фокус-фокус. Все остальные распадаются на фокусные при малом шевелении. Например, могут быть особенности, содержащие несколько точек типа фокус-фокус (нам тоже хорошо известно). Но не только: фокусные точки могут слипаться более сложным образом, в результате чего получаются вырожденные особенности. Главный результат в том, что возможных сценариев слияния фокусных особенностей конечное число и все их можно описать. Результат (наверное не очень удивительный) состоит в том, что классификация Кодаиры "совпадает" с классификацией простых особенностей по Арнольду (те же типы $A, D, E$).

При разборе этой теории некоторые новые вопросы появятся сами собой. Вот, например, два темы для исследования.

**(10.b)** Пусть нам дана вещественная особенность типа фокус–фокус. Можно ли ее сделать комплексной? Другими словами, можно ли ввести комплексную структуру так, чтобы исходная симплектическая форма стала вещественной частью некоторой комплесной симплектической структуры, а слоение задавалось одной комплесной функцией?

Ответ, по идее, должен даваться через симплектические инварианты фокусных особенностей, которые полностью описаны в работе Сан Ву Нгока. Симплектический инвариант представляет собой просто формальный степенной ряд от двух переменных. Скорее всего, условие просто означает, что этот ряд задается некоторой голоморфной функцией. После того, как этот вопрос будет прояснен, можно задать следующий.

**(10.c)** Мы знаем несколько естественных примеров особенностей типа фокус-фокус в конкретных задачах (Клебш, сферический маятник, Лагранж). Являются ли эти особенности комплексными?

Вторая тема следующая.

**(10.d)** Пусть нам дана комплесная функция от двух переменных $F(z, w)$. Локально она задает некоторое некомпактное лагранжево слоение. Можно ли его компактифицировать? То есть построить лагранжево слоение с компактными слоями так, что в окресности одной из точек оно будет совпадать с исходным лагранжевым слоением. Иными словами, вопрос в том, какие комплексные особенности лагранжево компактифицируются?

Разумеется этот вопрос немедленно обобщается на чисто веществененый случай.

**(10.e)** Пусть в окресности некоторой точки даны коммутирующие функции. Если особенности нет, то это локальное слоение можно представлять себе как маленький кусочек расслоения на лагранжевы торы. Если особенность невырождена, то компактификация также возможна. Однако существуют такие локальные особенности, которые компактифицировать не удастся. Есть ли какие-то препятствия к тому, чтобы сделать лагранжевы слои компактными? В чем эти препятствия состоят? Какой вообще у них характер: топологический, аналитический или симплектический?

Любые результаты на эту тему были бы, наверное, интересны. Вроде бы никто такой вопрос не рассматривал.

*Работы по теме*: Кодаира, Duistermaat, San Vu Ngoc

### 11. Задача Такенса

Такенс сделал отличный доклад про инварианты "того, что осталось от лагранжева слоения в результате малого неинтегрируемого возмущения".

Идея простая и естественная. Представим себе, что мы имеем интегрируемую систему без особых слоев. Мы возмущаем ее и видим, что многие торы исчезли. Однако выжившие торы "довольно плотны". Если мы смотрим только на них, то, в принципе, видим "всю" необходимую информацию о прежнем расслоении. В частности, монодромия, класс Черна и лагранжев класс Черна могут быть восстановлены по остаточной информации. Вопрос в том, как это сделать. Решение предлагается такое. Рассмотрим "остаточное слоение" на торы, обладающее свойством близости слоев. Вместо того, чтобы пытаться восстановить прежнее слоение, мы будем пытаться определить инварианты самого остаточного слоения. У Такенса все получилось кроме лагранжева класса Черна.

Хочется тем не менее попытаться ответить на исходный вопрос (Такенс сказал, что думал об этом, но у него не получилось). Какие условия на остаточное слоение нужно наложить, чтобы прежнее восстанавливалось однозначно с точностью до гомотопии. Это условие должно быть про близость торов. По-видимому, имеет смысл рассматривать две различные ситуации:

1) когда расслоение может восстановиться совершенно однозначно,

2) ситуация типа расслоения Зейферта со стертыми особыми слоями (тогда локального-тривиальное расслоение может просто не получиться).

Возможны ли вообще ситуации типа расслоения Зейферта в гамильтоновом случае?

Вопрос, вообще-то, можно формулировать для расслоений произвольного типа: пусть у нас имеется тотальное пространство с остаточным расслоением. Другими словами, мы видим довольно много слоев и они достаточно плотны. Можно ли наложить какие-то условия на близость слоев, чтобы слоение однозначно восстанавливалось?

Нужно иметь в виду некоторые характерные примеры. Так, если взять расслоение Зейферта и стереть особые слои, то мы получим вполне нормальное расслоение, которое не восстанавливается до докально тривиального. То же самое будет, если взять лагранжево слоение и стереть все особые слои. Но в этих двух случаях "условие близости" на самом деле нарушается. Что такое условие близости пока непонятно, но какие-то естественные вещи можно сразу предложить:

- Можно потребовать, чтобы слой на себя не наматывался: если мы рассмотрим отображение слоя в себя, которое сдвигает каждую точку не более чем на $\varepsilon$ в смысле объемлющего многообразия, то это отображение гомотопно тождественному, причем гомотопия близка к тождественному отображению.

- Если две точки близки друг к другу в смысле объемлющего многообразия, то слои между ними тоже близки в том смысле, что существует гомеоморфизм слоя в слой, мало сдвигающий каждую точку слоя.

На самом деле, вопрос такого рода на нашем семинаре уже поднимался: что происходит с молекулой интегрируемой системы при возмущении? Ясно, что информация выживает. Нужно придать всему этому определенный смысл. Теперь должно быть проще это сделать, поскольку появился хороший инструмент — так называемая, глобальная КАМ теория.

*Работы по теме*: H. Broer, Takens.

### 12. КАЛАШНИКОВ VERSUS ЖИЛИНСКИЙ

В своем докладе на конференции Жилинский упомянул свои работы об изучении, как он сказал, устойчивых бифуркаций в интегрируемых системах с двумя степенями свободы. По-видимому, имеются в виду следующие две работы:

> Zhilinskii, B. I.; Pavlichenkov, I. M. "Critical phenomena in rotational spectra." Soviet Phys. JETP 65 (1987), no. 2, 221–229; translated from Zh. Eksper. Teoret. Fiz. 92 (1987), no. 2, 387–403(Russian)

> Pavlichenkov, I. M.; Zhilinskii, B. I. "Critical phenomena in rotational spectra." Ann. Physics 184 (1988), no. 1, 1–32.

Результаты он не сформулировал, но, по-видимому, они должны быть очень близки к тому, что сделано в диссертации Калашникова. Хорошо бы в этом разобраться. Сравнить две работы и точно понять, кто и что сделал. Кроме того, в целом результаты Калашникова по своей сути носят фундаментальный характер в теории бифуркаций, и поэтому нужно как-то их постараться популяризировать. Поскольку топология интегрируемых систем сейчас активно развивается, то, наверняка, кто-то что-то близкое сделал. Хорошо бы найти работы на эту тему и провести сравнительный анализ. В MathSciNet можно посмотреть, кто на работу Калашникова ссылался; было бы интересно взглянуть на эти работы.

В работах

> Nekhoroshev, Nikolai "Fuzzy fractional monodromy and the section-hyperboloid." Milan J. Math. 76 (2008), 1–14.

> MR2401915 Nekhoroshev, N. N. Fuzzy fractional monodromy. SPT 2007—Symmetry and perturbation theory, 156–163, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2008.

тоже скорее всего что-то близкое должно быть, судя по картинкам.

### 13. SAN VU NGOC VERSUS NGUYEN TIEN ZUNG И ИЗОСИМОВ: ЧТО ТАКОЕ "TWISTING NUMBER"?

Сан Ву Нгок сделал доклад о симплектической классификации интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, которые допускают глобальное гамильтоново действие окружности, но не имеют гиперболических особенностей. В общем-то, его конструкция не содержала для нас больших неожиданностей. Похожую задачу даже в более общей постановке решал А. Изосимов. По сути различие было только в формулировке.

Однако имеется некоторая пока непонятная вещь. Одним из инвариантов, введенных Саном, было так называемое *число вращения*. Оно связывало между собой две точки фокус-фокус, расположенные на удалении друг от друга. Мы пока не понимаем, какой смысл имеет это число в той конструкции, которую развивал Изосимов, следуя Нгуен Тьен Зунгу. Общая теорема Зунга утверждает, что для симплектической эквивалентности систем нам нужно знать локальные симплектические инварианты, аффинную структуру и некоторые обобщенные класса Черна (которых в данном случае вроде бы не бывает, поскольку топология базы, фактически, тривиальна). Проблема в том, что у Зунга никакого числа вращения в списке инвариантов не было. Изосимов тоже без него обошелся.

Итак, вопрос в том, что такое число вращения? Кто прав Зунг и Изосимов или Сан?

Скорее всего, никакого противоречия нет. Все дело в четких определениях. По-видимому, у Сана, когда он говорит о локальных инвариантах в окресности фокуса, эти инварианты определены по модулю некоторого целого числа, которое собственно и есть монодромия. Как только мы захотим что-то рассматривать глобально, это число появится само собой. Скорее всего, противоречие объясняется следующим образом.

Когда Сан строит свои полулокальные симплектические инварианты, он должен выбрать некоторый базис и рассмотреть регулярную часть переменной угол в таком базисе. Эта регулярная часть определена по модулю $\mathbb{Z}$, поэтому всегда можно считать, что базис выбран так, что первый член разложения в ряд Тейлора принадлежит отрезку $[0, 1)$. Тогда базис будет полностью определен. То же самое можно сделать и для другой особенности типа фокус-фокус. Тогда возникнет естественная матрица перехода между этими базисами, которая будет треугольной, поскольку один из базисных циклов определен глобально. Другими словами, матрица будет задаваться одним целым числом. Именно о нем и идет речь. Если мы будем сравнивать базы расслоений как аффинные многообразия с точностью до *диффеоморфизмов*, то совпадение этих чисел будет вроде бы автоматически гарантировано. Так что противоречия вроде бы никакого нет, но в этом нужно аккуратно разобраться.

*Работы по теме*: San Vu Ngoc, Nguyen Tien Zung