ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ НА АЛГЕБРАХ ЛИ. ОСОБЕННОСТИ ОТОБРАЖЕНИЯ МОМЕНТА

А.В.БОЛСИНОВ, А.А.ОШЕМКОВ

Здесь сформулированы некоторые задачи об интегрируемых системах на алгебрах Ли, а также об особенностях отображения момента интегрируемых систем. Этот список задач позволяет составить представление о некоторых направлениях научных исследований, ведущихся на кафедре Дифференциальной геометрии и приложений.

Большинство из предлагаемых задач могут служить темами курсовых и дипломных работ.

В основном, задачи сформулированы достаточно коротко. Все, кого заинтересовала эта тематика или какая-либо из конкретных задач, могут обращаться к авторам этого текста за дополнительными комментариями по поводу формулировок, необходимой литературы и т. п.

Версия от 29 февраля 2008 г.

Новые версии этого текста будут появляться на сайте кафедры http://dfgm.math.msu.su

(раздел “Материалы”; с/с “Алгебры Ли и интегрируемые системы”)

I. Коприсоединенное представление и скобка Пуассона–Ли

Основные понятия и результаты, связанные с интегрируемыми системами на алгебрах Ли, содержатся в книге [36]. Сама теория алгебр Ли изложена в этой книге не очень подробно. Для знакомства с этой теорией имеется много хороших книг. Наиболее подходящими (для наших целей) из них являются [12] и [15].

1. ИНВАРИАНТЫ КОПРИСОЕДИНЕННОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Общий вопрос. Вычисление инвариантов коприсоединенного представления для алгебр Ли следующего вида: полупрямые суммы $\mathfrak{g} +_\rho V$, где $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, а $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(V)$ — некоторое представление.

Частный случай этого вопроса (который наиболее интересен в первую очередь) — это случай, когда $\mathfrak{g}$ — простая, а $\dim V < \dim \mathfrak{g}$.

Комментарий. Если размерность V большая, то вопрос сводится к вычислению инвариантов представления ρ^*, что в большинстве случаев — сложная задача.

В случае, когда $\mathfrak{g}$ — одна из классических алгебр Ли, а ρ — ее стандартное представление, ответ (в основном) известен: см. [31, 17, 14, 36].

Для особых простых алгебр Ли ответ нам неизвестен.

Полный список представлений для маленьких размерностей V (где $\mathfrak{g}$ — простая, а ρ неприводимо) см. в [1].

Для коприсоединеного представления ответ содержится в работах А.В. Браилова (частный случай метода сжатия; см. [10] и Предложение 17 на стр. 211 в [36]) и в книге [36] (частный случай метода тензорных расширений; см. § 38).

2. ПОЛНОТА И МАКСИМАЛЬНОСТЬ СДВИГОВ ИНВАРИАНТОВ

Общий вопрос. Для каких алгебр Ли вида $\mathfrak{g} +_\rho V$ (см. предыдущую задачу) набор, построенный методом сдвига инвариантов является полным?

Ответ на этот вопрос для списка Андреева–Винберга–Элашвили [1] (за исключением простых особых алгебр Ли) имеется в работе А.В. Болсинова [3] (см. также § 45 книги [36]). Там рассматривается случай, когда $\mathfrak{g}$ — простая классическая, а ρ — неприводимое представление.

Случай, когда $\mathfrak{g}$ — полупростая, а ρ может быть приводимо (но малой размерности), также интересен и не исследован.

Согласно критерию полноты А.В. Болсинова (см. [4], а также § 41 книги [36]), для проверки полноты в этом случае надо вычислить коразмерность множества сингулярных элементов.

После ответа на вопрос о полноте возникают следующие задачи:

(2.a) в случае, когда нет полноты, необходимо понять

— “сколько” функций не хватает,

— чем можно их дополнить (этот вопрос, фактически, сводится к описанию аннулятора алгебры функций, порожденной сдвигами инвариантов).

(2.b) в случаях, когда полнота есть, интересно понять, максимальны ли построенные наборы (в работе [46] имеется достаточное условие максимальности аналогичное критерию полноты).

Комментарий. Различные методы построения полных коммутативных наборов подробно обсуждаются в книге [36]. По поводу метода сдвига аргумента см. также [28, 2].

3. "КАНОНИЧЕСКИЙ" КОММУТАТИВНЫЙ НАБОР СДВИГОВ ИНВАРИАНТОВ

Общая задача. Описать построение "канонического" коммутативного набора сдвигов инвариантов.

Примерная процедура: выбираются линейные функции, затем квадратичные и т. д. Этот процесс сводится к линейной алгебре (в отличие от процесса поиска инвариантов, где надо решать дифференциальные уравнения).

(3.a) Четко (конструктивно) описать эту процедуру, т. е. системы линейных уравнений, которые нужно решать на каждом шаге. Можно ли "канонически" выписать решения этих систем? Как устроено пространство всех квадратичных функций в этом наборе, кубических и т. д.?

(3.b) Системы линейных уравнений получаются при рассмотрении разложения (по λ) функций $f(a+\lambda x)$, где f — инвариант. Насколько окончательный результат зависит от выбора базиса из этих инвариантов?

(3.c) Является ли "каноническая" алгебра полиномиальной (т. е. содержит ли она набор полиномов, через которые однозначно выражается любой полином из алгебры)? Тот же вопрос для централизатора "канонической" алгебры.

(3.d) Когда "каноническая" алгебра является максимальной?

Комментарий. В работе Д.И. Панюшева и О.С. Якимовой [46] (о максимальности наборов, построенных сдвигом аргумента) рассматриваются лишь алгебры, удовлетворяющие следующим условиям: 1) алгебра Ли предполагается алгебраической; 2) полиномиальные инварианты можно выбрать так, что сумма их степеней равна $\frac{1}{2}(\dim\mathfrak{g}+\operatorname{ind}\mathfrak{g})$. При рассмотрении канонического набора эти условия представляются несущественными (для исследования этого набора на максимальность).

4. ПОСТРОЕНИЕ ПОЛНЫХ КОММУТАТИВНЫХ НАБОРОВ МЕТОДОМ САДЭТОВА

Имеется несколько примеров построения полных коммутативных наборов методом С.Т. Садэтова (обсуждение метода Садэтова см. в [5]).

Для полупрямых сумм (с коммутативным идеалом) это было сделано А.В. Болсиновым (случай алгебр $\mathrm{so}(n,\mathbb{R})$ и $\mathrm{gl}(n,\mathbb{R})$ рассмотрен в [5]; случай алгебры $\mathrm{sp}(2n,\mathbb{R})$ — в [6], см. также [18]).

Для алгебры $\mathrm{sl}(n,\mathbb{R})$ задача до конца не доделана.

Следующий класс алгебр Ли, для которых было бы интересно попытаться построить полные коммутативные наборы — это параболические подалгебры Ли полупростых алгебр Ли. Предлагается начать с рассмотрения самых простых примеров.

Комментарий. Для борелевских подалгебр полные коммутативные наборы были построены В.В. Трофимовым при помощи метода цепочек подалгебр (см. [34, 35]). Метод цепочек подалгебр обсуждается также в работах [27, 52].

5. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД ДЛЯ ПОДАЛГЕБР МИЩЕНКО–ФОМЕНКО

Набор функций, полученных методом сдвига аргумента, является коммутативным, но при сдвиге на сингулярный элемент, вообще говоря, не является полным. Можно рассмотреть предельный переход для полных коммутативных подалгебр (подалгебр Мищенко–Фоменко).

Для полупростых алгебр такая процедура рассматривалась (см. [30, 38, 39]).

Перечислим некоторые вопросы, связанные с этой конструкцией.

(5.a) Как корректно определить такую процедуру (в общем случае или, например, для полупрямых сумм, описанных в задаче 1). Отметим, что если просто устремлять аргумент сдвига к какому-либо (сингулярному) элементу, то результат (и корректность самой процедуры) зависит от выбора пути, по которому совершается предельный переход.

(5.b) Получаются ли таким образом наборы, построенные методом Садэтова (например, для полупрямых сумм)?

(5.c) Рассмотреть примеры. Возможно, некоторые из ранее известных конструкций могут быть описаны на этом языке.

6. ТИПЫ ОРБИТ И АННУЛЯТОРЫ

(6.a) Описать типы орбит (ко)присоединенного представления классических простых групп Ли $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$. Описать соответствующие стационарные подалгебры (аннуляторы).

Комментарий. Речь идет, фактически, о приведении к жордановой нормальной форме, с которой потом и нужно работать. Для $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ здесь нет никаких проблем, а для $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ и $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ нужно сначала изучить вопрос о том, как жорданова форма устроена. Ответ известен, его нужно просто найти в литературе.

(6.b) Описать все типы орбит коприсоединенного представления для групп Ли (полупрямые произведения по стандартному представлению ρ)

$$\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})\times_\rho\mathbb{R}^n,\qquad \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})\times_\rho\mathbb{R}^n,\qquad \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\times_\rho\mathbb{R}^n,\qquad \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})\times_\rho\mathbb{R}^{2n}$$

и соответствующие аннуляторы.

Комментарий. Этот вопрос в отличие от предыдущего, по-видимому, является новым и никем не исследованным. Он особенно интересен в случае $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})\times_\rho\mathbb{R}^n$. Здесь нужно будет использовать формулу М. Раиса [49] (точнее, идею ее доказательства) и его статью [48], посвященную аффинной группе $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\times_\rho\mathbb{R}^n$.

7. НИЛЬПОТЕНТНЫЕ И РАЗРЕШИМЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ

(7.a) Рассмотрим орбиты коприсоединенного представления разрешимых и нильпотентных алгебр Ли. Известно, что каждая такая орбита диффеоморфна $\mathbb{R}^{2k}$. Верно ли, что они симплектоморфны $\mathbb{R}^{2k}$ или некоторой области из $\mathbb{R}^{2k}$? Верно ли, что они имеют бесконечный объем в смысле симплектической структуры?

(7.b) Есть такой экспериментальный факт: если строить полные коммутативные наборы для разрешимых или нильпотентных алгебр Ли методом цепочек подалгебр, то можно всегда обойтись многочленами степени не выше двух. Почему? Какой степени многочлены будут получаться при использовании метода Садэтова?

Комментарий. Для решения этих задач должны быть полезны работы М. Вернь [53], В.В. Трофимова [34, 35] и М.В. Милованова [27].

8. О ДРУГОЙ ПОЛНОТЕ

Здесь под полнотой динамической системы понимается возможность продолжения траекторий по параметру на всю числовую прямую. Когда речь идет об интегрируемости по Лиувиллю, это условие всегда подразумевается и для гамильтониана, и для интегралов. В компактном случае полнота имеет место автоматически. В некомпактной ситуации возникают нетривиальные вопросы.

(8.a) Являются ли полными системы, построенные методом сдвига аргумента? В первую очередь надо рассмотреть полупростой некомпактный случай.

(8.b) Аналогичный вопрос для метода цепочек подалгебр и метода Садэтова.

(8.c) Какова связь между полнотой геодезического потока на группе Ли (или на однородном пространстве) и полнотой соответствующей редуцированной системы на двойственном пространстве алгебры Ли?

9. РАЦИОНАЛЬНАЯ ТОЧНОСТЬ ФОРМЫ КИРИЛЛОВА

С.Т. Садэтов доказал теорему о том, что форма Кириллова ω точна в классе рациональных форм (см. [31, 32]). Задача состоит в том, чтобы разобрать доказательство и найти явно рациональную 1-форму α такую, что $\omega = d\alpha$, для интересных примеров алгебр Ли. Здесь наиболее интересен случай компактных алгебр Ли, для которых форма Кириллова заведомо не является точной в гладком случае.

Комментарий. Некоторые результаты в этом направлении получены А.С. Воронцовым [13].

II. Операторы Мищенко–Фоменко

Этот раздел является непосредственным продолжением предыдущего. В нем собраны задачи, связанные с одной общей конструкцией (которая не обсуждалась в предыдущем разделе) из теории интегрируемых систем на алгебрах Ли. Эти задачи выделены в отдельный раздел еще и потому, что в последнее время А.В. Болсиновым и В.С. Матвеевым были обнаружены интересные связи этой конструкции с теорией проективно эквивалентных метрик (см. [42]).

Оператором Мищенко–Фоменко называется самосопряженный оператор из $\mathfrak{g}^*$ в $\mathfrak{g}$ (где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли) такой, что соответствующий квадратичный гамильтониан дает систему, которая интегрируема при помощи метода сдвига аргумента.

Такие операторы были введены и изучались в работах А.С. Мищенко и А.Т. Фоменко (см. [29], а также главу 8 книги [36]).

10. ОБОБЩЕНИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ КОНСТРУКЦИИ

В работе [29] приведено явное описание компактной и нормальной серий операторов Мищенко–Фоменко (для вещественных полупростых алгебр Ли). При этом элемент $a \in \mathfrak{g}^*$, на который производится сдвиг для интегрирования соответствующей гамильтоновой системы, предполагается “элементом общего положения” (фактически, рассматриваются регулярные полупростые элементы).

Чтобы подробнее изучить операторы Мищенко–Фоменко в более общей ситуации (т. е. как произвольные самосопряженные операторы из $\mathfrak{g}^*$ в $\mathfrak{g}$, для которых соответствующие гамильтоновы системы интегрируемы при помощи сдвига аргумента), необходимо решить следующие задачи.

(10.a) В полупростом случае описать операторы Мищенко–Фоменко для сдвигов на неполупростые элементы.

(10.b) Явно описать операторы Мищенко–Фоменко в неполупростом случае.

Комментарий. Для решения этих задач могут быть полезны работы [24, 30], в которых, в частности, доказано, что для полупростой алгебры при сдвиге на полупростой элемент все операторы Мищенко–Фоменко имеют вид, указанный в работе [29].

11. Однозначность

Согласно [29], оператор Мищенко–Фоменко в полупростом случае (т. е. для полупростой вещественной алгебры Ли $\mathfrak{g}$) задается тремя (для компактной серии) или двумя (для нормальной серии) параметрами.

Вопрос. Можно ли по оператору Мищенко–Фоменко однозначно восстановить эти параметры? Рассмотреть отдельно случаи сдвига на полупростой и неполупростой элементы.

Комментарий. Этот вопрос очень важен в теории проективно эквивалентных метрик.

Некоторые результаты на эту тему получены А.Ю. Коняевым [21]

12. Стационарные точки

Поскольку гамильтоновы системы, определяемые с помощью операторов Мищенко–Фоменко, связаны с алгебрами Ли, некоторые их топологические характеристики можно попытаться описать в терминах самой алгебры Ли.

Например, в случае, когда система, соответствующая оператору Мищенко–Фоменко, интегрируется методом сдвига аргумента при сдвиге на полупростой регулярный элемент из самой алгебры Ли, Ю.А. Браилов доказал, что стационарными точками такой системы будут в точности пересечения орбиты с картановской подалгеброй [11, 45].

Интересно было бы получить аналогичное (т. е. в терминах алгебры Ли) описание стационарных точек для других случаев.

(12.a) Описать стационарные точки при сдвиге на неполупростые элементы.

(12.b) Что будет в случае нормальной серии, когда сдвиг берется на элемент из большей алгебры?

(12.c) Определить типы стационарных точек и условия их невырожденности.

Комментарий. По поводу задачи b) недавно получен некоторый результат [44], согласно которому для серии Эйлера–Манакова все точки ранга 0 суть пересечения орбит с подалгебрами Картана специального вида.

13. Резонансность

Общий вопрос. Являются ли гамильтоновы системы, соответствующие операторам Мищенко–Фоменко, резонансными?

Прежде чем искать ответ на этот вопрос, полезно решить следующую задачу.

(13.a) Рассмотреть линеаризацию системы, соответствующей оператору Мищенко–Фоменко, в стационарных точках и найти условия, при которых линеаризованная система является нерезонансной.

Сформулируем еще один вопрос, связанный с резонансностью (в несколько другом смысле).

(13.b) Описать квадратичные функции (соответствующие операторам Мищенко–Фоменко), которые являются резонансными в алгебраическом смысле, т. е. для которых аннулятор больше обычного.

Комментарий. Л.Г. Рыбников доказал [30], что квадратичные функции из семейства, полученного сдвигом аргумента, позволяют однозначно восстановить все остальные функции этого семейства (взятием аннулятора). Это — утверждение об алгебраичной совместной нерезонансности. Последний вопрос можно переформулировать так: что можно утверждать, если взять всего одну квадратичную функцию?

14. Один конкретный пример

Для алгебры Ли $\mathrm{sp}(2n,\mathbb{R})$ имеется следующая интересная серия согласованных скобок Пуассона. Реализуем $\mathrm{sp}(2n,\mathbb{R})$ как пространство симметрических матриц, а коммутатор зададим формулой $[X,Y]_A = XAY - YAX$, где A — кососимметричная матрица. Если она невырождена, то такой коммутатор задает в точности симплектическую алгебру Ли. Все эти скобки согласованы и позволяют, следовательно, построить примеры интегрируемых гамильтоновых систем (в том числе с квадратичными гамильтонианами).

(14.a) Связана ли эта конструкция с методом сдвига аргумента? Соответствуют ли полученные таким способом квадратичные гамильтонианы операторам Мищенко–Фоменко?

(14.b) Аналогичный вопрос для лиева пучка на $\mathrm{gl}(n,\mathbb{R})$.

Комментарий. Очень похожие вопросы обсуждаются в работе [47]. В этой работе утверждается, что построенный пример интегрируемой системы на $\mathrm{sp}(2n,\mathbb{R})$ не является частным случаем общей конструкции Мищенко–Фоменко. Однако, по нашему мнению, этот вопрос нуждается в дополнительном исследовании.

III. Особенности отображения момента

Основные понятия и результаты, связанные с особенностями отображения момента интегрируемых гамильтоновых систем, содержатся в книге [7] и в статье [43]. Кроме того, в статье [43] некоторые из перечисленных ниже задач обсуждаются более подробно.

15. Топологическая классификация фокусных особенностей

Вопрос. Какими бывают чисто фокусные особенности ранга 0 в случае произвольной размерности? Верно ли, что такая особенность сложности 1 единственна?

Комментарий. По теореме Н.Т. Зунга ([54], Theorem 7.3) такие особенности представляются в виде почти прямого произведения $F_{k_1} \times \cdots \times F_{k_l}/G$, где F_k — четырехмерная (стандартная) фокусная особенность сложности k. Поскольку любая особенность допускает естественное действие окружности (и, следовательно, любой циклической группы), то вариантов можно придумать очень много. Какие из них дают гомеоморфные особенности? По Зунгу ([54], Proposition 7.4) такая модель (т. е. представление особенности в виде почти прямого произведения) однозначно определена, если каждый элемент группы G действует нетривиально хотя бы на двух сомножителях. На самом деле, это неверно. Гипотеза состоит в том, что для однозначности модели достаточно запретить действие окружности.

В связи с этим можно выделить следующие задачи.

(15.a) Описать полную группу симметрий фокусной особенности.

(15.b) Найти условия для действия группы на фокусной компоненте, гарантирующие однозначность (минимальной) модели. (См. также задачу 19.)

(15.c) Получить полную классификацию чисто фокусных особенностей (произвольной сложности).

(15.d) Аналогичный вопрос для фокусных особенностей произвольного ранга (т. е. с кольцевыми компонентами).

16. Препятствия к существованию особенностей типа фокус-фокус

В случае двух степеней свободы имеется следующее существенное отличие фокусных особенностей сложности 1 от особенностей большей сложности. Особенность типа фокус-фокус сложности 1 является локальной в том смысле, что она вкладывается в $\mathbb{R}^4$. Особенность большей сложности в $\mathbb{R}^4$ не вкладывается, поскольку ее особый слой состоит из "цепочки" лагранжевых (вложенных) сфер, а лагранжевых вложений двумерной сферы S^2 в $\mathbb{R}^4$ не существует (это следует, например, из теоремы Громова о несуществовании точных лагранжевых подмногообразий в $\mathbb{R}^{2n}$).

Общий вопрос. Как по данному симплектическому многообразию понять, какие фокусные особенности оно допускает?

Комментарий. Особый слой фокусной особенности (сложности $k \geq 2$) на симплектическом многообразии M^4 — это цепочка из k лагранжевых (вложенных) сфер, каждая из которых реализует нетривиальный цикл, т. е. ненулевой элемент в группе двумерных гомологий $H_2(M^4, \mathbb{Z})$. При этом соседние сферы трансверсально пересекаются по одной точке, число пересечения несоседних сфер равно 0, а число самопересечения для каждой из сфер равно 2 (так как все сферы лагранжевы). Возникает естественная матрица Грама относительно формы пересечения.

Первый вопрос, который здесь можно сформулировать — чисто алгебраический.

(16.a) Для каких форм пересечения существует набор целочисленных "векторов" с данной матрицей Грама?

Далее, из вида матрицы Грама следует, что на фиксированном многообразии M^4 сложность допустимой особенности типа фокус-фокус ограничена. Прежде чем искать ответ на сформулированный выше общий вопрос, интересно было бы разобрать конкретные примеры "простых" симплектических многообразий.

(16.b) Получить точные оценки сложности фокусной особенности для симплектических многообразий, являющихся связными суммами $S^2 \times S^2$, $\mathbb{C}P^2$ и $\overline{\mathbb{C}P^2}$ (= $\mathbb{C}P^2$ с обращенной ориентацией).

17. Гладкие инварианты для особенностей типа фокус-фокус

Известно, что особенности типа фокус-фокус сложности 1 диффеморфны между собой (см. [25, 55, 56, 7, 43]). Особенности типа фокус-фокус сложности ≥ 2 гомеоморфны, но не диффеоморфны. Задача состоит в описании гладких инвариантов. Вероятно, такие инварианты существуют для каждого класса гладкости.

Общий вопрос. Получить гладкую классификацию особенностей фокус-фокус произвольной сложности. Интересно исследовать также аналитический случай.

Основной результат в этом направлении получен А.М. Изосимовым [19]. Он построил нетривиальный гладкий инвариант (например, для особенности сложности 2 этот инвариант есть просто вещественное число).

(17.a) Верно ли, что инвариант Изосимова является полным в случае C^1-гладкости?

(17.b) Описать локальные автоморфизмы слоения типа фокус-фокус, т. е. диффеоморфизмы, переводящие слоение в себя (разумеется, с возможным перемешиванием слоев).

Можно в качестве эквивалентности особенностей рассматривать не диффеоморфизмы, а симплектоморфизмы. Такой подход приводит к вопросу о более тонкой классификации фокусных особенностей. В работе Сан Ву Нгока [51] построены симплектические инварианты особенностей типа фокус-фокус сложности 1.

(17.c) Описать полный набор симплектических инвариантов особенностей типа фокус-фокус произвольной сложности.

18. Топологическая классификация седловых особенностей ранга 0 сложности 1

(18.a) Классифицировать (с точностью до лиувиллевой эквивалентности) седловые особенности ранга 0 сложности 1 для произвольной размерности.

Комментарий. В размерности 4 эта задача была решена Л.М. Лерманом и Я.Л. Уманским [22], а в размерности 6 — В.В. Калашниковым [20]. Полученные ими списки (4 особенности для размерности 4 и 32 особенности для размерности 6) содержатся в книге [7] (см. также [43]).

Различные подходы к классификации седловых особенностей ранга 0 (не только сложности 1) описаны в следующих статьях: Л.М. Лерман, Я.Л. Уманский [22]; А.В. Болсинов [41]; Н.Т. Зунг [54]; В.В. Калашников [20]; В.С. Матвеев, А.А. Ошемков [26] (см. также [7] и [43]).

Отметим, что в работе В.В. Калашникова [20] есть теорема, утверждающая, что в качестве компонент почти прямого произведения (для седловых особенностей ранга 0 сложности 1) достаточно брать лишь следующие 4 атома: B, C_2, D_2, P_4. Это один из аргументов в пользу того, что классификация (именно для сложности 1) вполне обозрима для любой размерности.

Весьма вероятно, что доказательство Калашникова можно сделать более понятным, что, в частности, позволило бы описать атомы, которые могут быть компонентами почти прямого произведения для сложности 2, 3, и т. д.

(18.b) Попытаться упростить (возможно, изложить в других терминах) доказательство Калашникова и получить аналогичный результат для сложности 2.

19. Минимальные (канонические) модели

В работе Н.Т. Зунга сформулировано утверждение о том, что каждая особенность типа почти прямого произведения имеет однозначно определенную минимальную модель ([54], Proposition 7.4). Для особенностей ненулевого ранга это утверждение неверно. Для произвольных особенностей ранга 0 тоже (см. задачу 15). Тем не менее, при некоторых дополнительных ограничениях на характер действия группы G на компонентах (кое-какие действия нужно запретить) в случае ранга 0, по-видимому, можно корректно определить понятие минимальной модели.

(19.a) Как определить минимальную модель для особенностей ранга 0? (Частный случай этого вопроса — задача (15.b).)

(19.b) Доказать единственность минимальной модели для седловых особенностей ранга 0 и указать канонический способ их построения.

(19.c) Нельзя ли определить какую-то каноническую (пусть даже не минимальную) модель в случае произвольного ранга?

(19.d) В каких случаях можно дать описание всех минимальных моделей? (Пример такой ситуации — дубли для 3-атомов; см. § 3.5 в [7].)

20. Невырожденные особенности малой сложности для трех степеней свободы

(20.a) Составить полный список невырожденных особенностей сложности 1 и 2 для трех степеней свободы.

(20.b) Получить их представление в виде почти прямых произведений.

(20.c) Описать топологию лиувиллева слоения в расширенных окрестностях таких особенностей (в частности, перестройки торов и монодромию — аналог круговых молекул).

Комментарий. Этот вопрос обсуждался в докторской диссертации Я.Л. Уманского [37].

Седловые особенности сложности 1 ранга 0 (для трех степеней свободы) перечислены в работе В.В. Калашникова [20] (32 штуки); для классификации седловых особенностей сложности 2 ранга 0 можно попытаться использовать тот же подход (см. задачу (18.b). Список статей, где описаны другие подходы см. в задаче 18.

Седловые особенности ранга 2 описаны в работе А.С. Лермонтовой [23] (см. также § 5.1 в [43]).

21. УСТОЙЧИВЫЕ НЕВЫРОЖДЕННЫЕ ОСОБЕННОСТИ

Особенность (нерасщепимая) называется устойчивой, если она сохраняет свой топологический (послойный) тип при малых интегрируемых возмущениях. (Обсуждение понятия расщепимости и различные примеры расщепимых особенностей см. в [7], § 9.9 и в [43], § 5.3.)

Общий вопрос. Какие из невырожденных (нерасщепимых) особенностей являются устойчивыми в этом смысле?

Несложно понять, что особенности сложности 1 устойчивы. Кроме того, как хорошо известно, в случае одной степени свободы все особенности (сложности больше 1) неустойчивы. Поэтому простейшая ситуация, в которой могут возникать нетривиальные примеры устойчивых особенностей — это особенности сложности 2 для двух степеней свободы.

(21.a) Выяснить, какие из особенностей сложности 2 типа седло-седло (т. е. 4-мерные седловые особенности ранга 0) являются устойчивыми.

Комментарий. Если невырожденная (нерасщепимая) седловая особенность ранга 0 сложности 2 распадается при возмущении, то в результате могут получиться только две невырожденные седловые особенности ранга 0 сложности 1. Поскольку имеются полные списки таких особенностей (39 особенностей сложности 2 и 4 особенности сложности 1; см. [7], § 9.5–9.7 и [43], § 5.2), то можно перебрать все варианты и в результате получить примеры тех особенностей сложности 2, для которых распадение на две особенности сложности 1 невозможно.

(21.b) Описать любые другие примеры устойчивых особенностей.

22. ОСОБЕННОСТИ, НЕ ЯВЛЯЮЩИЕСЯ ПОЧТИ ПРЯМЫМИ ПРОИЗВЕДЕНИЯМИ

Имеется пример расщепимой невырожденной особенности типа седло-седло, особый слой которой состоит из треугольников и шестиугольников (пример 4 в § 5.3 работы [43]). Эта особенность не является почти прямым произведением (особый слой особенности типа седло-седло, являющейся почти прямым произведением, “склеен” из квадратов). Она неустойчива и при малом возмущении распадается на три особенности сложности 2.

(22.a) Существуют ли устойчивые “шестиугольные” (неквадратные) особенности?

(22.b) Можно ли найти такие особенности сложности 3? (В примере, описанном в [43], особенность имеет сложность 6.)

(22.c) Доказать, что таких особенностей сложности 2 не бывает.

23. КРУГОВЫЕ МОЛЕКУЛЫ КАК ПОЛНЫЕ ИНВАРИАНТЫ

Н.Т. Зунгом была высказана гипотеза о том, что топологический тип невырожденной особенности полностью определяется структурой соседних особенностей коранга один. Более слабое утверждение состоит в том, что особенность восстанавливается по своей границе. Другими словами, мы рассматриваем насыщенную окрестность особого слоя, затем берем ее границу. На границе имеется естественная структура слоения Лиувилля. Гипотеза состоит в том, что это слоение (на границе) позволяет реконструировать топологию слоения Лиувилля во всей окрестности.

Обе гипотезы неверны, как показывает контрприммер А.В. Грабежного (см. [16], а также [43], § 7.3).

Тем не менее, остается открытым вопрос о том, при каких дополнительных предположениях гипотеза верна. Другими словами, в каких случаях можно сформулировать верную гипотезу о том, что топологический тип особенности (некоторого специального вида) однозначно определяется круговой молекулой? Например, для всех особенностей типа седло-седло сложности 2 круговые молекулы различны, т. е. однозначно определяют саму особенность (см. таблицу 9.1 в [7] или таблицу 3 в [43]).

24. ТОЧНОСТЬ СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ В ОКРЕСТНОСТИ ОСОБОГО СЛОЯ

(24.a) Доказать, что симплектическая структура точна в окрестности особого слоя слоения Лиувилля. (разобрать два различных случая: невырожденная особенность и вырожденная).

(24.b) Можно ли считать, что форма действия обращается в нуль на особом слое (экзактность)?

Комментарий. Скорее всего, в вырожденной ситуации могут возникать патологические примеры (рассмотреть конструкцию с разбиением единицы). Вероятно, чтобы их исключить, достаточно требовать стратификации особого слоя, где каждый страт изотропен.

В окрестности вложенного лагранжева подмногообразия оба утверждения верны.

(24.c) Верны ли оба утверждения для погруженных лагранжевых подмногообразий (без всякой связи с особенностями)?

25. ИЗОЛИРОВАННОЕ ОСОБОЕ ЗНАЧЕНИЕ В СЛУЧАЕ ТРЕХ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Может ли в случае трех степеней свободы быть изолированное особое значение (разумеется, вырожденное)? Более точно. Рассматривается интегрируемая гамильтонова система с тремя степенями свободы и соответствующее отображение момента. Образ отображения момента трехмерен. Может ли в образе быть изолированная особая точка (особое значение), аналогично фокусной точки для двух степеней свободы. Тривиальный пример строится (устранимая особенность).

26. ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ТРАЕКТОРИЯ В ЗАМЫКАНИИ ОРБИТЫ ГОМЕОМОРФНОЙ ПЛОСКОСТИ

Может ли в интегрируемой системе орбита, гомеоморфная плоскости, иметь в замыкании периодическую траекторию (аналитический и неаналитический случай)?

Переформулировка: может ли особая траектория содержать в своей трубчатой окрестности куски двумерных орбит, гомеорфных плоскости. Вопрос связан с существованием гамильтонова действия (периодического интеграла) в окрестности периодической траектории. Речь идет, разумеется, о послойном действии. Во всех известных нам случаях такое действие существует. В невырожденной ситуации это теорема Зунга, в вырожденной — наблюдение. Существование примера, о котором идет речь в задаче, давало бы препятствия к S^1-действию.

27. ДИСКРЕТНЫЕ СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ

Скажем, что две особенности d-эквивалентны, если существует послойный диффеоморфизм ξ такой, что ω_1 и $\xi^*\omega_2$ лежат в одной компоненте связности множества симплектических структур, относительно которых слои лагранжевы. (Другими словами, одна система получается из другой деформацией симплектической структуры.)

Очевидно, это отношение d-эквивалентности сильнее, чем лиувиллева эквивалентность (для которой требуется просто существование послойного диффеоморфизма). Поэтому, априори, классов d-эквивалентности может быть больше, чем классов лиувиллевой эквивалентности.

Вопрос. Выяснить, насколько больше классов d-эквивалентности будет для особенностей, списки которых известны (малая размерность и малая сложность), и получить аналогичные списки для таких особенностей, рассматриваемых с точностью до d-эквивалентности.

Комментарий. 1) Как легко видеть, в случае одной степени свободы каждому незеркальному атому соответствует два класса d-эквивалентности, а каждому зеркальному атому — один.

2) Количество невырожденных особенностей типа седло-седло сложности 2 (при замене лиувиллевой эквивалентности на d-эквивалентность), по-видимому, увеличится. Для лиувиллевой эквивалентности их 39 (см. [7], а также [43]), а для d-эквивалентности — 41 (этот результат не проверен и не опубликован).

IV. Примеры интегрируемых систем

В задачах этого раздела речь идет о конкретных интегрируемых системах (геодезические потоки, натуральные механические системы, многомерные обобщения некоторых задач механики и математической физики). Вопросы, возникающие при исследовании этих систем, связаны как с механизмами их интегрируемости, так и с топологией соответствующих лиувиллевых слоений.

28. НОВЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПОТОКИ НА СФЕРАХ

Недавно (в работах А.В. Борисова, И.С. Мамаева, В.В. Соколова) на алгебре Ли so(4) были обнаружены новые примеры интегрируемых систем с квадратичными гамильтонианами (аналог случая Ковалевской). Согласно общей конструкции каждая такая система индуцирует интегрируемый поток левоинвариантной метрики на группе SO(4) и на любом ее однородном пространстве. Например, на сфере S^3. Интересно было бы сравнить между собой эти геодезические потоки на сфере. Разные они или одинаковые? Что можно сказать про топологию соответствующих лиувиллевых слоений? Мы знаем топологию систем на so(4). Как эта информация отражается на топологии геодезических потоков? Бифуркационная диаграмма (для геодезических потоков) будет двумерной в силу однородности. Построить ее.

Комментарий. Формулы для соответствующих гамильтонианов и интегралов можно найти в работах В.В. Соколова, А.В. Борисова, И.С. Мамаева [33, 9]; см. также книгу [8] и статью М.Адлера, П.Ван Мербеке [40].

29. ИНТЕГРАЛЫ СТЕПЕНИ 3 И 4 НА СФЕРЕ

В недавней работе Матвеева и Дуллина [9] был построен новый явный пример натуральной системы на двумерной сфере с интегралом степени 3. В работе, в частности, показано, что эта система отлична от известных. Задача состоит в исследовании топологии системы (бифуркационная диаграмма, молекулы, проекции торов на конфигурационное пространство). Этот вопрос был подробно исследован Москвиным (см. диплом).

Есть работа Цыганова [10] с некой хорошей заменой. Замена может помочь упростить и прояснить вычисления Москвина, а также довести до конца исследование этой задачи (у Москвина исследован не самый общий случай).

У Цыганова есть также работа [11], в которой аналогичным образом построена интегрируемая натуральная система на сфере с интегралом степени 4. Задача: исследовать топологию этой системы.

Еще один вопрос, связанный с этими системами: сравнить эти системы с системами, описанными в работах Селивановой (и др.) [см. ссылки в работах 10,11]. По-видимому, установить связь между системами Селивановой и Цыганова (если она есть!) можно аналитически. Другой возможный способ: попытаться описать топологию систем Селивановой (что, наверное, сложно, поскольку они заданы неявным образом).

30. Особенности штеккелевых систем

Описать особенности штеккелевых систем.

На торе - это прямые произведения. На сфере ситуация усложняется. Пример - многомерный эллипсоид (считается сделанным Зунгом [13]), но там есть пропущенные особенности. Этим вопросом очень интересовал Х.Дуллин.

Хочется иметь общую конструкцию для произвольных штеккелевых систем. Чтобы можно было сферу Пуассона, в частности, включить. Обратить внимание на вырожденные особенности - именно они были пропущены Зунгом. Обратить внимание на работы Матвеева [14]: он описывал особенности геодезических потоков проективно эквивалентных метрик (это частный случай штеккелевых).

Частный случай вопроса 19.

Рассмотреть эллипсоид, у которого некоторые полуоси равны. В этом случае возникают фокусные особенности. Описать их типы в терминах почти прямых произведений.

31. Особенности новых (многомерных) интегрируемых случаев Соколова–Одесского

Недавно в работе [18] была обнаружена новая серия интегрируемых случаев на $\mathrm{so}(n,\mathbb{R})$ ($n \geq 5$; при $n = 4$ получается случай Ляпунова–Стеклова).

Задача: исследовать особенности этих интегрируемых систем. Интересны любые результаты.

Изучение особеннностей этих систем интересно еще и потому, что пока нет строгого доказательства того, что эти случаи отличны от ранее известных.

32. Особенности многомерных аналогов классических интегрируемых систем

Начать с серии Эйлера-Манакова [19].

Результатов мало. Есть неопубликованный результат Riccombeni (о серии Эйлера-Манакова), согласно которому все точки ранга 0 суть пересечения орбит с подалгебрами Картана специального вида.

Предлагается начать с обсуждения следующих вопросов:

1) описание локального типа точек ранга 0

2) полулокальное описание точек ранга 0 (в терминах почти прямых произведений)

V. Другие задачи

Здесь приведено еще несколько задач, не вошедших в предыдущие разделы.

33. Лагранжевы слоения над бутылкой Клейна

Обобщить результат Мишачева [15] о классификации лагранжевых слоений над тором на случай бутылки Клейна. См. также работы Symington [16], [17].

34. Наследуемость интегрируемости по Лиувиллю

Пусть на алгебраическом симплектическом многообразии заданы интегрируемая по Лиувиллю система с рациональными интегралами и некоторое инвариантное алгебраическое симплектическое подмногообразие. Останется ли система интегрируемой после ограничения на это подмногообразие?

С.Т. Садэтов доказал, что для подмногообразий размерности 4 система остается интегрируемой, т. е. обладает дополнительным рациональным интегралом.

Комментарий. Нетривиальность утверждения в том, что интегрируемость будет иметь место даже в том случае, когда ограничения исходных первых интегралов на данное подмногообразие являются константами.

(34.a) Задача заключается в том, чтобы разобрать доказательство Садэтова (см. [31] и [50]) и написать более понятный текст.

(34.b) Остается ли утверждение справедливым, если все объекты не алгебраические, а аналитические?

(34.c) Что можно утверждать о наследуемости интегрируемости по Лиувиллю для подмногообразий произвольной размерности?

35. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ЭНТРОПИЯ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ

Известно, что существуют естественные интегрируемые гамильтоновы системы с положительной топологической энтропией [Butler], [Болсинов, Тайманов]. Гамильтонианы этих систем аналитические, а интегралы лишь гладкие.

(35.a) Существует ли гамильтонова система интегрируемая в классе аналитических интегралов с положительной топологической энтропией?

(35.b) Доказать, что алгебраически интегрируемые гамильтоновы системы имеют нулевую топологическую энтропию.

Комментарий.

В работе [Paternain] доказано, что для интегрируемой системы с невырожденными особенностями энтропия равна нулю.

Список литературы

[1] Андреев Е.М., Винберг Э.Б., Элашвили А.Г. *Орбиты наибольшей размерности полупростых линейных групп Ли* // Функц. анализ и его прил., т. 1, вып. 4, с. 3–7 (1967).

[2] Болсинов А.В. *Согласованные скобки Пуассона на алгебрах Ли и полнота семейств функций в инволюции* // Изв. АН СССР, сер. матем., т. 55, № 1, с. 68–92 (1991).

[3] Болсинов А.В. *Интегрируемые по Лиувиллю гамильтоновы системы на алгебрах Ли* // Канд. диссертация (1988).

[4] Болсинов А.В. *О полноте семейств функций в инволюции, связанных с согласованными скобками Пуассона* // Труды семин. по вект. и тенз. анализу, вып. 23, с. 18–38 (1988).

[5] Болсинов А.В. *Полные инволютивные наборы полиномов в пуассоновых алгебрах: доказательство гипотезы Мищенко–Фоменко* // Труды семин. по вект. и тенз. анализу, вып. 26, с. 87–109 (2005).

[6] Болсинов А.В. *Complete commutative subalgebras in Poisson algebras: A proof of the Mischenko–Fomenko conjecture* // Препринт (2007).

[7] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация* // Ижевск: Издательский дом “Удмуртский университет” (1999).

[8] Борисов А.В., Мамаев И.С. *Динамика твердого тела* // Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика (2001).

[9] Борисов А.В., Мамаев И.С., Соколов В.В. *Новый интегрируемый случай* $so(4)$ // Доклады РАН, т. 381, № 5, с. 614–615 (2001).

[10] Браилов А.В. *Некоторые конструкции полных семейств функций, находящихся в инволюции* // Труды семин. по вект. и тенз. анализу, вып. 22, с. 17–24 (1985).

[11] Браилов Ю.А. *Геометрия особенностей интегрируемых систем на алгебрах Ли* // Канд. диссертация (2003).

[12] Винберг Э.Б., Онищик А.Л. *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам* // М.: Наука (1988).

[13] Воронцов А.С. .... // Препринт (2007).

[14] Воронцов А.С. *Построение инвариантов для полупрямых сумм алгебр Ли* // Дипл. работа (2007).

[15] Гото М., Гроссханс Ф. *Полупростые алгебры Ли* // М.: Мир (1981).

[16] Грабежной А.В. *Инварианты лиувиллевых слоений 4-мерных особенностей типа седло-седло* // Дипл. работа (2005).

[17] Гусейнов А.Э. *Инварианты коприсоединенных представлений некоторых групп Ли* // Дипл. работа (2006).

[18] Жданова М.М. *Построение полных коммутативных наборов полиномов на полупрямых суммах алгебр Ли методом Садэтова* // Дипл. работа (2007).

[19] Изосимов А.М. *Гладкие инварианты особенностей типа фокус-фокус* // Курс. работа (2006).

[20] Калашников В.В. *Простые гиперболические особенности пуассоновых действий* // В кн.: *Топологические методы в теории гамильтоновых систем*, изд-во «Факториал» (1998).

[21] Коняев А.Ю. *Секционные операторы на простых комплексных алгебрах Ли и бифуркационная диаграмма отображения момента для интегрируемых систем, связанных с ними* // Дипл. работа (2007).

[22] Лерман Л.М., Уманский Я.Л. *Классификация четырехмерных интегрируемых гамильтоновых систем и пуассоновских действий* $\mathbb{R}^2$ *в расширенных окрестностях простых особых точек. I; II; III* // Матем. сборник, т. 183, № 12, с. 141–176 (1992); т. 184, № 4, с. 105–138 (1993); т. 186, № 10, с. 89–102 (1995).

[23] Лермонтова А.С. *Особенности коранга 1 интегрируемых гамильтоновых систем* // Дипл. работа (2005).

[24] Мещеряков М.В. *О характеристическом свойстве тензора инерции многомерного твердого тела* // Успехи мат. наук, т. 138, вып. 5, с. 201–202 (1983).

[25] Матвеев В.С. *Интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы. Топологическое строение насыщенных окрестностей точек типа фокус-фокус и седло-седло* // Матем. сборник, т. 187, № 4, с. 29–58 (1996).

[26] Матвеев В.С., Ошемков А.А. *Алгоритмическая классификация инвариантных окрестностей точек типа седло-седло* // Вестник Моск. ун-та., Сер. 1. Матем., механ., вып. 2, с. 62–65 (1999).

[27] Милованов М.В. *Интегрируемость разрешимых алгебр Ли* // Матем. сборник, т. 190, № 5, с. 45–92 (1999).

[28] Мищенко А.С., Фоменко А.Т. *Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли* // Изв. АН СССР, сер. матем., т. 42, № 2, с. 396–415 (1978).

[29] Мищенко А.С., Фоменко А.Т. *Интегрируемость уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли* // Труды семин. по вект. и тенз. анализу, вып. 19, с. 3–94 (1979).

[30] Рыбников Л.Г. *О квантовании некоторых коммутативных подалгебр в алгебрах Пуассона* // Канд. диссертация (2006).

[31] Садэтов С.Т. *Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли* // Докт. диссертация (2004).

[32] Садэтов С.Т. *Симплектическая структура на орбитах коприсоединенного представления — дифференциал рациональной 1-формы* // Успехи мат. наук, т. 60, вып. 4, с. 179–180 (2005).

[33] Соколов В.В. *Об одном классе квадратичных гамильтонианов на* $so(4)$ // Доклады РАН, т. 69, № 1, с. 108–111 (2004).

[34] Трофимов В.В. *Уравнения Эйлера на борелевских подалгебрах полупростых алгебр Ли* // Изв. АН СССР, сер. матем., т. 43, № 3, с. 160–174 (1979).

[35] Трофимов В.В. *Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли* // Изв. АН СССР, сер. матем., т. 44, № 5, с. 1191–1199 (1980).

[36] Трофимов В.В., Фоменко А.Т. *Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений* // М.: Факториал (1995).

[37] Уманский Я.Л. .... // Докт. диссертация (200?).

[38] Шувалов В.В. *О пределах подалгебр Мищенко–Фоменко в алгебрах Пуассона полупростых алгебр Ли* // Функц. анализ и его прил., т. 36, вып. 4, с. 55–64 (2002).

[39] Шувалов В.?. .... // Канд. диссертация (200?).

[40] Adler M., P. van Moerbeke, *Geodesic flow on* $SO(4)$ *and intersection of quadrics* // Proc. Nat. Acad. Sci. USA, v. 81, p. 4613–4616 (1984).

[41] Bolsinov A.V. *Methods of calculation of the Fomenko–Zieschang invariant* // In book: *Topological classification of integrable systems* (Adv. in Soviet Math., v. 6), AMS, Providence, p. 147–183 (1991).

[42] Bolsinov A.V. *Mischenko–Fomenko operators and projective equivalence* // Preprint (текст доклада на семинаре "Современные геометрические методы" 15 ноября 2006) (2006).

[43] Bolsinov A.V., Oshemkov A.A. *Singularities of integrable Hamiltonian systems* // In book: *Topological methods in the theory of integrable systems*, Cambridge Sci. Publ., p. 1–67 (2006).

[44] Bolsinov A.V., Oshemkov A.A., Riccombeni D., *Singularities of the momentum mapping for the multi-dimensional rigid body problem* // Preprint (2008).

[45] Brailov Yu.A. *Geometry of singularities of integrable systems on Lie algebras* // Reviews in Math. & Math. Phys., v. 12, p. 1–51 (2005).

[46] Panyushev D.I., Yakimova O.S. *The argument shift method and maximal commutative subalgebras of Poisson algebras* // arXiv:math/0702583 (2007).

[47] Ratiu T., ????? .... // ....

[48] Rais M. *La représentation coadjointe du groupe affine* // Ann. Inst. Fourier , v. 28, № 1, p. 207–237 (1978).

[49] Rais M. *L'indice des produits semi-directs* $E \times_\rho \mathfrak{G}$ // Comp. Rend. Acad. Sci. Paris, v. 287, № 4, p. 195–197 (1978).

[50] Sadetov S.T. *On algebraic integrals of the motion of point over a quadric in quadratic potential* // Regular and chaotic dynamics, v. 5, № 2, p. 201–212 (2000).

[51] San V.N. *On semi-global invariants for focus-focus singularities* // Topology, v. 42, № 2, p. 365–380 (2003). (См. также arXiv:math/0208245)

[52] Thimm A. *Integrable geodesic flows on homogeneous spaces* // Ergod. Th. & Dynam. Sys., v. 1, p. 495–517 (1981).

[53] Vergne M. *La structure de Poisson sur l'algèbre symétrique d'une algèbre de Lie nilpotente* // Bull. Soc. Math. France, v. 100, № 3, p. 301–335 (1972).

[54] Zung N.T. *Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems. I. Arnold-Liouville with singularities* // Compositio Math., v. 101, p. 179–215 (1996). (См. также arXiv:math/0106013)

[55] Zung N.T. *A note on focus-focus singularities* // Diff. Geom and Appl., v. 7, p. 123–130 (1997). (См. также arXiv:math/0110147)

[56] Zung N.T. *Another note on focus-focus singularities* // Lett. Math. Phys., v. 60, p. 87–99 (2002). (См. также arXiv:math/0110148)