Пуассонова геометрия и бигамильтоновы системы: Миникурс как предисловие к семинару

А.В.Болсинов

6 октября 2010 г.

Аннотация

Цель лекций — напомнить основные определения и результаты пуассоновой геометрии и теории бигамильтоновых систем, а также сформулировать открытые вопросы, большинство из который можно будет использовать для курсовых и дипломных работ. Предполагается, что в течение семестра участники семинара подготовят цикл докладов, в которых подробно разберут темы, которые в сжатой форме представлены ниже. В следующем семестре хотелось бы перейти к обсуждению открытых вопросов.

Программа максимум — написать разумный текст на эту тему, доступный для студентов.

В целом наша идея состоит в следующем. Люди, занимающиеся интегрирумыми гамильтоновыми системами, идут вперед большими шагами, не всегда уделяя внимание простым и элементарным фактам, лежащим в основаниях теории. В значительной степени это происходит потому, что профессионалы эти вещи понимают и часто считают само собой разумеющимися. Однако обычно эти вещи понимаются как принципы, а не как строгие математические утверждения. Для дальнейшего развития теории тем не менее совершенно необходимо в таких элементарных, но фундаментальных вещах разобраться до конца, доведя их до строгих математических результатов. Там, где это сделать не удается, следует четко указать на имеющиеся трудности. Собственно этим и предлагается заняться участникам семинара.

Тема 1: Пуассоновы многообразия, пуассоновы алгебры и теорема Дарбу

Определение 0.1. *Скобкой Пуассона* на гладком многообразии M называется билинейная операция на пространстве гладких функций $C^\infty(M)$, которая удовлетворяет трем свойствам:

1. кососимметричность;
2. правило Лейбница;
3. тождество Якоби.

Скобка Пуассона задается тензорным полем типа (2,0).

Примеры пуассоновых многообразий:

- симплектические многообразия,
- постоянные скобки Пуассона,
- линейные скобки Пуассона (скобки Пуассона-Ли),
- есть естественные примеры квадратичных скобок и скобок более высокой степени,
- есть довольно экзотические примеры: скобка пуассона на пространстве многоугольников (доклады Табачникова и Ина Маршалла на ГДИС–2010), и др. (см. список литературы).

Основные понятия, связанные с пуассоновой структурой:

- ранг в точке,
- ранг на всем многообразии,
- симплектические листы,
- функции Казимира,
- гамильтоновы векторны поля.

Различные интерпретации симплектических листов: слои распределения, орбиты бесконечномерной гамильтоновой группы, совместные поверхности уровня Казимиров. Другие элементарные свойства.

Пример ситуации, когда функции Казимира глобально не определены: на трехмерном торе можно задать пуассонову структуру постоянного ранга два, листы которой являются двумерными всюду плотными обмотками. Функции Казимира определены лишь локально и до глобальных не продолжаются.

Абстрактный подход к пуассоновым структурам через пуассоновы алгебры: алгебру функций с заданной на ней скобкой Пуассона можно рассматривать с чисто алгебраической точки зрения, каждая такая пуассонова алгебра определяет некоторое пуассоново многообразие (возможно с особенностями).

Примеры пуассоновых алгебр:

1. Пусть имеется некоторая гамильтонова система. Множество ее интегралов образует пуассонову алгебру.
2. Гамильтонову систему можно понимать как действие группы $\mathbb{R}$. На самом деле можно рассмотреть действие совершенно произвольной группы. Но оно должно быть гамильтоновым. Инварианты этого действия образуют пуассонову алгебру.
3. Пусть имеется некоторая алгебра Пуассона, а в ней заданы какие-то функции (лучше, чтобы они порождали образовывали подалгебру, но это необязательно). Рассмотрим все функции, которые с ними коммутируют. Это пуассонова алгебра.
4. Интересный и важный для приложений пример пуассоновых алгебр связан с алгебрами Ли. Пусть $\mathfrak{g}^*$ — двойственное пространство конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ — некоторая подалгебра. Рассмотрим множество всех полиномов в $P(\mathfrak{g})$, коммутирующих с $\mathfrak{h}$. Это пуассонова алгебра. Геометрическая интерпретация этой алгебры очень естественная. Можно рассмотреть группу H, отвечающую этой подалгебре $\mathfrak{h}$ и ее естественное коприсоединенное действие на $\mathfrak{g}^*$. Обсуждаемая подалгебра — это пуассонова алгебра на пространстве орбит.

Полезно иметь в виду следующую естественную интерпретацию процедуры гамильтоновой редукции. Пусть у нас имеется гамильтонова система на некотором пуассоновом многообразии. Предположим, что гамильтониан этой системы включается в некоторую пуассонову подалгебру. Тогда редукция — это переход к такому же самому уравнению, но уже для подалгебры. Иногда нам может повезти и эта подалгебра “задает” некоторое гладкое пуассоново многообразие. Тогда от алгебраической картинки можно снова вернуться к геометрической и получить гамильтонову систему на редуцированном пуассоновом многообразии. Часто, однако, это многообразие оказывается с особенностями. Тогда говорят о сингулярной редукции.

Теорема 1 (Теорема Дарбу)**.** *Пусть имеется пуассонова подалгебра $\mathcal{F} \subset C^\infty(M)$, замкнутая в смысле гладких функций. Пусть $x \in M$ — точка общего положения в том смысле, что размерность и индекс пространства $D\mathcal{F}(x)$ локально постоянны. Тогда в окрестности этой точки можно выбрать независимые функции $p_i, q_i, h_k \in \mathcal{F}(x)$ ($i = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, l$) так, что $p_i, q_j = \delta_{ij}$, а все остальные скобки равны нулю. При этом $2m + k = \dim D\mathcal{F}(x)$, $k = \operatorname{ind} D\mathcal{F}(x)$.*[1]

Поискать в современной литературе это утверждение. Я его видел только у самого Софуса Ли. Написать простое и понятное доказательство было бы хорошей курсовой работой. Очень похожее утверждение должно быть в работах Мищенко-Фоменко и Браилова по некоммутативной интегрируемости. Доказательство на самом деле сразу работает и для теоремы Вейнстейна о расщеплении.

[1]В "Симплектической геометрии"(и в других источниках) эта теорема называется теоремой Картана. Хотелось бы выяснить, что и где по этому поводу написал Картан. Важно также понимать, что в точке общего положения никакой разницы между этим утверждением и стандартной теоремой Дарбу нет.

Гипотеза Мищенко–Фоменко о связи коммутативной и некоммутативной интегрируемости в терминах пуассоновых алгебр: всякая гамильтонова система интегрируемая в некоммутативном смысле интегрируема также и в коммутативном смысле.

Приведенная выше теорема Дарбу говорит, в частности, что эта гипотеза справедлива локально (в окрестности точки общего положения и даже в окрестности неособой поверхности уровня интегралов). Глобальная версия на языке пуассоновых алгебр означает, что всякая пуассонова алгебра имеет полную коммутативную подалгебру. Эта версия, разумеется, не совпадает с оригинальной постановкой Мищенко и Фоменко, и почти наверняка в такой общей постановке утверждение является неверным[2].

Полную коммутативную подалгебру $\mathcal{A}$ (в пуассоновой алгебре $\mathcal{F}$) можно определить двумя способами. Сначала введем понятие точки общего положения (для $\mathcal{F}$). Это такая точка $x \in M$, в которой размерность пространства $D\mathcal{F}(x)$, порожденного дифференциалами функций $f \in \mathcal{F}$ максимальна и кроме того максимальным является ранг скобки на этом подпространстве. Мы будем рассматривать только такие пуассоновы алгебры (точнее подалгебры в $C^\infty(M)$), для которых множество точек общего положения открыто и всюду плотно. Числа $\dim D\mathcal{F}$ и $\operatorname{corank} A|_{D\mathcal{F}(x)}$ называются дифференциальной размерностью и дифференциальным индексом алгебры $\mathcal{F}$. Коммутативная подалгебра $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ называется полной, если $\operatorname{ddim} \mathcal{A} = \frac{1}{2}(\operatorname{ddim} \mathcal{F} + \operatorname{dind} \mathcal{F})$. Другое определение таково: требуется, чтобы в (почти всех) точках общего положения подпространство $D\mathcal{A}$ было максимальным изотропным в $D\mathcal{F}$.

Частный случай этой гипотезы — эта гипотеза Мищенко-Фоменко о полных коммутативных наборах полиномов на двойственных пространствах алгебр Ли:

Алгебра Ли-Пуассона $P(\mathfrak{g})$ конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ всегда обладает полной коммутативной подалгеброй.

Для других полиномиальных алгебр, не таких простых как алгебра Ли-Пуассона, вопрос является очень важным, интересным и остается открытым.

Открытые вопросы, вопросы для обсуждениния на семинаре, упражнения:

1. Проблема Мищенко-Фоменко: верно ли, что всякая пуассонова алгебра всегда допускает полную коммутативную подалгебру. Еще одна почти эквивалентная переформулировка: верно ли, что всякое пуассоново многообразие (в том числе сингулярное) допускает вполне интегрируемую по Лиувиллю гамильтонову систему?

   Комментарий. Правильнее было бы сформулировать это вопрос

[2] Было бы правильным спросить у авторов гипотезы, какую терминологию нам следует в этой дискуссии использовать: просто гипотеза Мищенко-Фоменко или обобщенная гипотеза Мищенко-Фоменко, или еще как-то, чтобы не опровергать того, чего они не говорили.

так: какие пуассоновы алгебры и какие пуассоновы многообразия допускают... Проблема состоит не только в том, чтобы построить контрпример (он наверняка есть, см. про пример Лео Батлера ниже) и не в том, чтобы найти разумные необходимые и достаточные условия (не верится, что в такой общей постановке у нас есть средства для решения этой проблемы). Вопрос в исследовании связанных с этой проблемой феноменов. Это очень сложная, важная и содержательная задача. Как минимум тема для кандидатской диссертации.

2. В качестве упражнения предлагается рассмотреть следующую пуассонову алгебру. Пусть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ — подалгебра Картана полупростой алгебры Ли. Рассмотрим в $P(\mathfrak{g})$ подалгебру $\mathcal{F}_{\mathfrak{h}}$, состоящую из $\mathfrak{h}$–инвариантных полиномов. Верна ли для этой алгебры гипотеза Мищенко-Фоменко?

   Комментарий. Ответ положительный. Результат поучительный и использует технологию согласованных скобок Пуассона. На этой алгебре можно ввести еще одну скобку $\{\ ,\ \}_a$ (ту же самую, что в методе сдвига аргумента), а потом применить стандартную технологию, о которой будет рассказано в одной из следующих лекций. Этот пример еще раз показывает, что “правильным” объектом служит сама пуассонова алгебра. Ответ на поставленный вопрос (быть может в несколько другой формулировке) можно извлечь из работы Болсинов, Йованович про интегрируемость магнитных геодезических потоков.

3. Совершенно аналогичный вопрос можно задать относительно произвольной подалгебры полупростой алгебры Ли (например, редуктивной, или борелевской, или параболической).

   Комментарий. Вопрос абсолютно открытый и очень важный. Его ответ дает очень серьезное продвижение в задаче об описании интегрируемых геодезических потоков на однородных пространствах. См. дискуссию на эту тему в работах Болсинова–Йовановича. Тема как минимум для кандидатской диссертации. В общей постановке вопрос является скорее всего очень сложным, но вполне можно заняться построением нетривиальных примеров “интегрируемых пар” $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Каждая такая новая пара дает как минимум новый нетривиальный пример геодезического потока на однородном пространстве полупростой группы Ли. Например, надавно появилась работа Федорова и Йовановича, новый результат которой (если слегка утрировать) состоит в аккуратном доказательстве интегрируемости пары $(so(n), so(k))$.

4. Лео Батлер (Leo Butler), главный специалист по построению экзотических геодезических потов, в одной из своих работ привел пример геодезического потока, который интегрируемтся в некоммутативном смысле при помощи хороших интегралов (вроде бы даже полиномиальных), но коммутативной интегрируемости в классе хороших функций нет, поскольку существуют некие нетривиальные топологические препятствия. С точки зрения пуассоновых алгебр это означает, что имеется (некоммутативная) пуассонова алгебра, которая не допускает полной ком-

мутативной подалгебры (контрпример к обобщенной гипотезе Мищенко-Фоменко). Хотелось бы разобрать его работу с этой точки зрения, чтобы понять, какой алгебраический феномен стоит за этим геометрическим примером.

Комментарий. У меня нет стопроцентной уверенности, что из работы Батлера мы получим простой и понятный контрпример к гипотезе Мищенко-Фоменко. Но скорее всего это так. Точно предсказать результат разбора этой работы Батлера сложно. Может случиться, что из нее мы вообще ничего полезного не извлечем, или наоборот, мы обнаружим и осознаем какой-то новый феномен, связанный с природой пуассоновых алгебр и построим целую новую теорию. Но скорее всего мы получим что-то между. Небольшая красивая заметка почти гарантирована.

5. Как правильным образом определить формальную пуассонову алгебру (почти наверняка можно в литературе найти ответ, скорее всего в книжке K. H. Bhaskara, K. Viswanath, Poisson algebras and Poisson manifolds, Longman 1988, ISBN 0-582-01989-3.), как для этой алгебры определить понятие функциональной размерности, функционального индекса и полной коммутативной подалгебры?

   Можно ли сформулировать теорему типа Дарбу-Вейнстейна-Ли для абстрактных пуассоновых алгебр? В случае полиномиальных пуассоновых алгебр обойтись полиномами невозможно (т.е. локальные координаты, о которых идет речь полиномами не будут). Но скорее всего можно сформулировать интересующий нас результат на уровне формальных рядов (полезной может оказаться технология, использованная в работе Болсинова и Зуева о формальном методе сдвига аргумента.

   Комментарий к вопросам 5 и 6. Эти вопросы важны для общего понимания природы пуассоновых структур. Здесь прежде всего нужно заниматься поиском и изучением литературы. Начать с того, что в Google поискать "пуассоновы алгебры". Скорее всего основные концептуальные вещи где-то уже разъяснены. Если их осознать, то теоремы типа Дарбу-Вейнстейна-Ли докажутся легко. Хороший материал для дипломной работы. Достаточно было бы разобраться с правильными абстрактнуми определениями.

6. Насколько плохими могут быть функции Казимира скобок Пуассона-Ли? Дать разумное определение хаотической скобки Пуассона и разобрать примеры.

   Комментарий. Вопрос относится к хаотическим скобам Пуассона, определения для которых пока нет, но есть следующий экспериментальный факт. Бывают пуассоновы структуры ранга 2 для которых гамильтоновы векторные поля демонстрируют хаотическую динамику. Это странно, поскольку симплетические листы двумерны и на них любая гамильтонова система интегрируема. Хаос возникает из-за того, что симплектические листы вложены в пуасоово многообразие каким-то хаотическим образом. В частности, пуассонова структура не обладает разумными функциями Казимира. Такого типа вопросы могли уже обсуждаться в литературе, но в несколько другом контексте. А именно, в теории слоений. Именно там нужно искать определение хаоса в данном контексте. Программой минимум была бы статья, в которой было бы разъяснено, что динамическая система, гамильтонова относительно пуассоновой структуры ранга два, вполне может оказаться неинтегрируемой и даже хаотической. Хотелось бы иметь простой модельный пример.

7. Верно ли, что скобки Пуассона-Ли не могут быть хаотическими? К какому классу принадлежат функции Казимира скобок Пуассона-Ли? Верно ли, что гамильтонова система на алгебре Ли с орбитами коприсоединенного представления размерности два не может быть хаотической, а наоборот всегда интегрируема?

   Комментарий. Скобки Пуассона-Ли иногда не имеют хороших функций Казимира. Однако поведение симплектических листов не слишком сложное. В примерах оно похоже на всюду плотные обмотки торов. Поэтому настоящего хаоса там не ожидается. Кроме того, поскольку гипотеза Мищенко-Фоменко для алгебр Ли-Пуассона справедлива, то эта пуассонова структура заведомо допускает гамильтоновы системы с интегрируемой динамикой. Интегрируемость в случае, когда у нас имеется только одна степень свободы по модулю функций Казимира (т.е. симплектические листы двумерны), можно понимать, например, в том смысле, что почти каждая траектория совпадает со своим замыканием (т.е. нужно запретить существование всюду плотных обмоток и других траекторий с плохим предельным множеством).

8. Разобрать примеры квадратичных скобок Пуассона, возникающих в классической механике (см. работы Борисова и Мамаева). Разобраться в алгебраической структуре этих скобок. Допускают ли они естественные многомерные обобщения? Какими будут их функции Казимира?

   Комментарий. Мы сами в рамках нашего семинара квадратичные скобки Пуассона никогда не обсуждали. Они, однако, естественным образом возникают в математической физике (скобки Склянина, скобки для цепочки Тоды и др.) и даже в классической механике при изучении динамики в искривленном пространстве. Нам следовало бы хотя бы для общего развития с такими примерами разобраться.

9. Вообще имеются пуассоновы структуры, глобальная природа которых не описана и не понята. Например, упомянутая выше пуассонова структура на пространстве многоугольников. Какая пуассонова алгебра за этим стоит, какое пуассоново многообразие, листы, функции Казимира и прочее. Как эта структура связана с другими структурами? Получается ли она при помощи некоторой редукции и пр.? Есть и другие примеры такого рода.

   Комментарий. В основном это работа с литературой. Нужно разбираться с работами наших коллег. Они сами занимаются другими вопросами, а на обсуждение природы и свойств возникающих пуассоновых структур у них времени не остается. Для них это не основной, а вспомогательный объект. Однако, ответы на поставленные выше вопросы их тоже очень интересуют, и это направление деятельности, безусловно, получит положительный отклик.

Тема 2: Теорема Вейнстейна о расщеплении и проблема линеаризации.

Теорема Дарбу дает локальное описание пуассоновой структуры в тех точках, где ранг локально постоянен. Терема Вейнстейна, напротив, относится к тем в точкам, где ранг не является локально постоянным.

Теорема 2. *Локально любое пуассоново многообразие является прямым произведением симплектического многообразия и (трансверсального) пуассонова многообразия с точкой нулевого ранга.*

Переформулировка на языке нормальных форм: если пуассонова структура имеет в точке $p_0 \in M$ ранг $2m$, то в ее окрестности найдутся локальные координаты p_i, q_i, z_k $(i = 1, \dots, m,\ k = 1, \dots, l)$, $2m + k = \dim M$ такие, что

$$A = \begin{pmatrix} 0 & E_m & 0 \\ -E_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B(z) \end{pmatrix}$$

где E_m — единичная $m \times m$ матрица, а $B(z)$ — матрица, элементы которой являются гладкими функциями лишь от переменных z, причем все они обращаются в нуль в точке $p_0 \in M$[3].

Таким образом, вопрос о локальной классификации пуассоновых структур сводится к структурам, обращающимся в нуль в рассматриваемой точке.

Для пуассоновых структур ранга ноль (в точке $p_0 \in M$) имеется естественная процедура линеаризации.

Наиболее простой способ состоит в следующем. Мы рассматриваем пуассонов тензор A как кососимметрическую матрицу, элементами которой являются некоторые гладкие функции $a_{ij}(x)$. Поскольку ранг A в рассматриваемой точке равен нулю, то все функции a_{ij} в точке p_0 обращаются в нуль, и их тейлоровские разложения начинаются с линейных членов (мы считаем для определенности, что все координаты точки p_0 равны нулю):

$$a_{ij}(x) = c_{ij}^k x_k + \dots$$

Константы c_{ij}^k образуют тогда структурный тензор некоторой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и мы можем рассмотреть соответствующую ей линейную скобку Пуассона:

$$\{f, g\}_{\text{lin}} = c_{ij}^k x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j},$$

которая и называется линеаризацией исходной скобки Пуассона.

[3]В книге А.Т.Фоменко "Симплектическая геометрия" это утверждение сформулировано как предложение Браилова (стр. 233, предложение 6) к сожалению без ссылки на соответствующую работу. Браилов свои основные работы опубликовал в 1983 г., т.е. в том же самом, что и Вейнстейн. Хотелось бы выяснить, есть ли это утверждение в работах Браилова, в частности, в его кандидатской диссертации. Разумеется и работу Вейнстейна нужно тоже внимательно прочесть, он может ссылаться на что-то более раннее. Это было бы интересно с точки зрения приоритета, хотя сам результат был доказан Софусом Ли.

Второе определение более инвариантное. Согласно ему линеаризованная пуассонова структура определяется на касательном пространстве $T_{p_0}M$ к нашему многообразию в точке p_0. Эта структуру достаточно определить лишь на линейных функциях $\xi, \eta : T_{p_0}M \to \mathbb{R}$. Линейные функции на $T_{p_0}M$ можно (и нужно) интерпретировать как ковекторы. В частности, существуют функции f и g на M такие, что $\xi = df(p_0)$, $\eta = dg(p_0)$. Тогда мы полагаем по определению

$$\{\xi, \eta\}_{\mathrm{lin}} = d\{f, g\}(p_0) \in T^*_{p_0}M.$$

Проблема линеаризации: какие скобки Пуассона эквивалентны своей линейной части? Другими словами, когда мы можем найти такую замену переменных, что исходная скобка в новых координатах станет линейной (и будет, следовательно, совпадать со своей линеаризацией).

Некоторые результаты в этом направлении известны.

Теорема 3 (Гладкий случай). *Если линейная часть отвечает полупростой компактной алгебре Ли, то скобка Пуассона линеаризуется.* [4]

Теорема 4 (Аналитический случай). *Если линейная часть отвечает полупростой алгебре Ли, то скобка Пуассона линеаризуется*

Пример, показывающий, что вторая теорема в гладком случае неверна, — очень простой. Нужно рассмотреть скобку, отвечающую алгебре Ли $sl(2, \mathbb{R})$. Она имеет семейство симпектических листов, представляющих собой однополостные гиперболоиды. Можно слегка возмутить эту пуассонову структуру, не меняя линейной части так, что симплектические листы станут спиралевидными (эффект тот же самый как если бы мы возмутили на плоскости семейство концентрических поверхностей, превратив эти окружности в спирали). Ясно, что такая возмущенная структура не эквивалентна исходной, поскольку изменилась топология симплектических листов.

Вопрос о том, какие алгебры Ли гарантируют линеаризуемость подробно обсуждается в книге Дюфура-Зунга.

Важный пример: линеаризация трансверсальной пуассоновой структуры к орбите коприсоединенного представления — это структура Пуассона-Ли аннулятора. Это наблюдение имеет два следствия.

Следствие 1 (Теорема о коммутативности аннулятора общего положения). *Пусть $a \in \mathfrak{g}^*$ — регулярный элемент, тогда* $\mathrm{Ann}\, a$ *— коммутативная подалгебра.*

Следствие 2 (Теорема об индексе аннулятора). *Пусть $a \in \mathfrak{g}^*$ — произвольный элемент. Тогда* $\mathrm{ind}\,\mathrm{Ann}\, a \geq \mathrm{ind}\, \mathfrak{g}$.

[4] В “Симплектической геометрии” это утверждение сформулировано и доказано для случая $so(3)$ скобки (Предложение 7 (А.В.Браилов), стр. 235). Полезно доказательство изучить.

Следствие для теории особенностей: Если трансверсальная пуассонова структура линеаризуется, то функции Казимира могут быть приведены к хорошему виду (а именно к такому, какой имеют инварианты коприсоединенного представления соответствующей алгебры Ли) [5].

Теорема 5. *Гамильтоново векторное поле (точнее его поток) сохраняет пуассонову структуру. На аналитическом языке это означает, что*

$$\mathcal{L}_\xi A = 0,$$

где ξ — гамильтоново векторное поле, а A — пуассонова структура.

Иногда могут существовать и другие векторные поля (негамильтоновы), которые тем не менее пуассонову структуру сохраняют. Простой пример: вырожденная постоянная пуассонова структура. Хотелось бы разобраться со структурой таких полей.

Открытые вопросы, вопросы для обсуждениния на семинаре, упражнения:

1. Сделать краткий обзор книги Дюфура и Зунга по проблеме линеаризации.

2. Пусть гладкое векторное поле сохраняет пуассонову структуру. Верно ли, что оно является гамильтоновым? Локально это не так. Но глобально (например для полупростых компактных структур Пуассона-Ли) это верно. Доказать или найти доказательство. Нужна ли компактность? Верно ли это для полупростых скобок (гладкий и аналитический случаи скорее всего отличаются)? Разобрать в деталях $so(3)$ и $sl(2)$. Обсудить связь с когомологиями пуассоновых структур. Разобрать все трехмерные алгебры Ли (можно сделать руками, и это будет хорошая курсовая/дипломная).

3. Привести примеры нелинеаризуемых пуассоновых структур. Привести примеры сингулярных элементов $a \in \mathfrak{g}^*$ для которых имеет место строгое неравенство $\operatorname{ind} \operatorname{Ann} a > \operatorname{ind} \mathfrak{g}$ (в этом случае трансверсальная пуассонова структура к орбите не линеаризуется).

   Комментарий. Это не очень сложный вопрос. Им занимался А. Воронцов, но как-то никакого результата пока не сообщил. Вопрос важен из-за следующего утверждения: метод сдвига аргумента дает полный набор на конкретной орбите $\mathcal{O}(a)$ коприсоединенного представления тогда и только тогда, когда имеет место равенство $\operatorname{ind} \operatorname{Ann} a = \operatorname{ind} \mathfrak{g}$.

4. Для приложений оказывается важным вопрос о линеаризуемости трансверсальной пуассоновой структуры к орбите присоединенного представления полупростой группы Ли. Такой вопрос в литературе обсуждался: Pantelis A. Damianou, Herve Sabourin,

[5] О линеаризуемости трансверсальной пуассоновой структуры в случае полупростой скобки Пуассона-Ли см. работу Pantelis A. Damianou, Herve Sabourin, Pol Vanhaecke Transverse Poisson structures to adjoint orbits in semi-simple Lie algebras

Pol Vanhaecke Transverse Poisson structures to adjoint orbits in semi-simple Lie algebras. Можно поискать и другие работы. Разобраться и сделать доклад на семинаре.

Тема 3: Согласованные скобки Пуассона и бигамильтоновы системы

Определение 0.2. Две скобки Пуассона называются *согласованными*, если их линейная комбинация с постоянными коэффициентами снова является скобкой Пуассона.

Примеры согласованых скобок Пуассона

1. Две постоянные скобки согласованы
2. Линейная скобка и постоянная скобка (метод сдвига аргумента), можно сделать обобщение (какой тогда будет критерий полноты?)
3. Две линейные скобки (лиев пучок)
4. Согласованные скобки, связанные с симметрическими разложениями полупростых алгебр Ли
5. Классификация Цыганова согласованных скобко Пуассона на $so(4)$ и $e(3)$
6. Согласованные скобки на пуассоновых подалгебрах
7. Согласованные скобки на кокасательном расслоении (магнитное поле?)
8. Согласованные скобки на кокасательных расслоениях, связанные с геодезически эквивалентными метриками
9. Согласованные скобки, связанные с цепочкой Тоды
10. Согласованные скобки из классической механики (см. Борисов и Мамаев)

Бигамильтоновы системы (три разных определения)

Определение 0.3. Пусть заданы две согласованные скобки Пуассона $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Система дифференциальных уравнений называется бигамильтоновой, если она гамильтонова относительно (здесь возможны 3 варианта, которые в общем случае отличаются друг от друга):

1. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$;
2. всех линейных комбинаций $\lambda\mathcal{A} + \mu\mathcal{B}$ общего положения;
3. всех нетривиальных линейных комбинаций $\lambda\mathcal{A} + \mu\mathcal{B}$.

В этом контексте полезно в целом разобраться с (локальной) гамильтоновостью в случае пуассоновых многообразий. Выяснить отличие от симплектического случая. В симплектическом случае, как мы знаем, локальная гамильтоновость эквивалентна условию $\mathcal{L}_\xi \omega = 0$, поэтому если все согласованные скобки из пучка всюду невырождены, то три приведенных выше определения совпадают.

В пуассоновом случае легко доказывается следующий критерий:

Теорема 6. *Если ранг скобки Пуассона локально постоянен, то (локальная) гамильтоновость векторного ξ эквивалентна выполнению двух условий:*

1. *$\mathcal{L}_\xi \mathcal{A} = 0$, т.е. ξ сохраняет пуассонову структуру;*

2. *ξ касается симплектических листов.*

Вопрос: верна ли эта теорема, если отказаться от условия постоянства ранга? Скорее всего ответ отрицательный. Привести простой контрпример.

В случае полупростых алгебр Ли (по крайней мере, если ограничиться аналитическим случаем) свойство гамильтоновости почти наверняка совпадает с условием $\mathcal{L}_\xi \mathcal{A} = 0$.

Вопрос: доказать этот факт или построить контрпример. (Скорее всего при доказательстве мы получим какие-то алгебраические условия, которые можно будет выразить в терминах когомологий алгебр Ли, а поскольку когомологии тривиальны, то это окажется эквивалентным гамильтоновости). Скорее всего ответ на этот вопрос известен. Нужно спросить у Зунга.

В качестве следствия вроде бы получается тот факт, что в случае полупростых скобок из первого определения бигамильтоноости следует второе (и даже вроде бы третье при условии, что все скобки имеют одинаковый ранг).

Еще такое утверждение нужно осознать: если в пучке есть полупростая скобка, то почти все скобки в пучке — полупростые. Наверное это есть в книжке Зунга-Дюфура. Этот вопрос непосредственно связан с когомологиями пуассоновых структур.

Объяснение того факта, что бигамильтоновы системы как правило оказываются интегрируемыми: гамильтоново поле сохраняет пуассонову структуру и все, что из нее получается. Например, функции Казимира. Если сохраняются две согласованные скобки, то будут сохраняться характеристические числа пары.

Итак, мы имеем

Теорема 7. *Если система уравнений является бигамильтоновой (в смысле второго определения), то функции Казимира регулярных скобок пучка и характеристические числа пары скобок (лучше рассмотреть на самом деле не сами характеристические числа, а симметрические полиномы от них) будут первыми интегралами.*

Как уже было сказано, это утверждение доказывать не надо, оно очевидным образом следует из очень общих соображений.

Кроме него имеет место следующий результат:

Теорема 8. *Характеристические числа коммутируют между собой и с функциями Казимира. Функции Казимира регулярных скобок пучка также коммутируют между собой.*

Пока не очень понятно, есть ли концепуальное объяснение этих фактов.

Было бы полезно (в качестве задачи) разобраться с тем, какой вид примут эти теоремы в случае других двух определений бигамильтоновсти.

Описанные выше коммутирующие функции обладают еще одним гораздо менее тривиальным свойством. А именно, они дают бигаитльтоновы потоки.

Теорема 9. *Пусть f — функция Казимира одной из регулярных скобок пучка $\mathcal{A}_\lambda$ (все делаем локально). Тогда ее гамильтоново векторное поле в смысле другой скобки $\mathcal{A}_\mu$ является гамильтоновым относительно любой другой скобки пучка.*

Возможно формулировку этой теоремы придется видоизменить. Нужно в этом разобраться.

Теорема 10. *Пусть f — характеристическое число (или быть может лучше взять сумму степеней характеристических чисел). Тогда ее гамильтоново векторное поле в смысле другой скобки $\mathcal{A}_\mu$ является гамильтоновым относительно любой другой скобки пучка.*

Доказательство этого утверждения нигде не написано. И даже нет полной уверенности в ее справделивости. Она верна в случае, кода пучок является симплектическим, т.е. почти все скобки в пучке невырождены (см., например, Болсинов, Борисов в Мат.заметках).

При работе с согласованными скобками Пуассона важную роль играет так называемый оператор рекурсии. Его можно естественным образом определить в случае симплектического пучка. Это делается следующим образом. Пусть пучок порождается пуассоновыми структурами $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, причем $\mathcal{A}$ — невырожденна. Тогда можно определить оператор $P = \mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}$. Из согласованности скобок вытекает

Теорема 11. *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — пуассоновы структуры, причем $\mathcal{A}$ - невырождена. Эти структуры согласованы тогда и только тогда, когда тензор Нийенхейса оператора рекурсии $P = \mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}$ равен нулю.*

Это утверждение является очень важным для описания канонического вида согласованных пуассоновых структур. На нем фактически основано доказательство теоремы Тюриэля.

Напомним, что такое тензор Нийенхейса.

Пусть P — тензорное поле типа (1,1), т.е. линейный оператор. Его тензором Нийенхейса называется тензор типа $(1, 2)$, который паре векторных полей ξ и η ставит в соответствие новое векторное поле по следующему правилу:

$$N_P(\xi, \eta) = P^2[\xi, \eta] - P[P\xi, \eta] - P[\xi, P\eta] + [P\xi, P\eta]$$

Упражнение: проверить, что это действительно тензор.

Роль этого тензора объясняется следующим утверждением (все рассматривается локально).

Теорема 12. *Если в каждой точке спектр оператора P простой и вещественный, то существует система координат, в которой оператор имеет диагональный вид, причем каждый диагональный элемент зависит только от соответствующей переменной.*

Это самая простая версия. Если не предполагать, простоты спектра, но предположить полупростоту и то, что кратность каждого собственного значения постоянна, то к хорошему виду тоже можно привести.

Полного описания нет в случае жордановых клеток. Например, непонятно, что будет в случае нильпотентного опертора с нулевым тензором Нийенхейса.

Важную роль в этой тематике играют также так называемые иерархии, или бигамильтоновы цепочки.

Определение 0.4. Мы скажем, что последовательность функций f_i образует иерархию, если имеет место следующая цепочка соотношений:

$$\mathrm{sgrad}_{\mathcal{A}} f_i = \mathrm{sgrad}_{\mathcal{B}} f_{i+1}$$

При этом имеет смысл рассматривать иерархии разных типов: бесконечные в обе стороны, бесконечные в одну сторону и заканчивающиеся нулем.

Открытые вопросы, вопросы для обсуждениния на семинаре, упражнения:

1. Найти условия при которых квадратичная скобка согласована с постоянной.

   Комментарий. Вопрос связан с одним из результатов Изосимова, из которого вроде бы следует, что $so(3)$ скобка, помноженная на свой Казимир (она станет кубической), не должна быть согласована ни с какой постоянной скобкой. Проверить эту гипотезу. Точная формулировка: Пусть $\mathcal{A}$ — стандартная $so(3)$ скобка и $\mathcal{B} = (x^1 + y^2 + z^2)\mathcal{A}$. Существует ли постоянная скобка, согласованная с $\mathcal{B}$? Существует ли какая-нибудь скобка, не обращающаяся в нуль в начале координат, согласованная с $\mathcal{B}$?

2. Разобраться, как соотносятся три определения бигамильтоновости, данные выше. Привести примеры, показывающие, что они не эквивалентны. А также описать достаточные условия, при которых они эквивалентны.

   Комментарий. Задача несложная. Вполне подходит для курсовой работы.

3. Упражнение: доказать, что функции из иерархии коммутируют. Что можно сказать о коммутировании функции из двух разных иерархий?

4. Какие функции могут образовывать иерархии? Как они связаны с функциями Казимира и характеристическими числами. Верно ли, например, что в симплектическом случае бигамильтоновость (в предположении, что все характеристические числа λ_i различны и непостоянны) дают функции вида $\sum f_i(\lambda_i)$ и только они?

   Комментарий. Это непростой вопрос. Заведомо можно описать естественные серии.

5. Коняев говорил, что при некоторых условиях если можно сделать один шаг иерархии, то ее можно продолжить до бесконечности. Какова точная формулировка? Что будет в симплектическом случае.

   Комментарий.

6. Какие функции являются бигамильтонианами? Более частный вопрос: интересным было бы рассмотреть пространство (алгебру) функций, порожденных Казимирами регулярных скобок и

в ней выделить бигамильтонианы. Два случая следует рассмотреть отдельно в качестве важных примеров: две постоянные скобки и метод сдвига аргумента.

Комментарий.

7. Как в симплектическом случае связаны характеристические числа с разделением переменных (λ_i и есть разделяющте переменные?). (по этому поводу нужно посмотреть работы А.Цыганова).

   Комментарий.

8. Рассмотреть примеры согласованных скобок Пуассона (см. выше) в деталях.

   Комментарий.

9. До сих пор нет хорошего доказательства теоремы о каноническом виде тензора P с нулевым тензором Нийенхейса в случае комплексных собственных значений. Можно ли какой-нибудь трюк придумать для ее доказательства?

   Комментарий.

10. Доказать Теорему 10 (в случае вырожденных скобок). Выяснить, кто первым ее доказал в симплектическом случае.

    Комментарий.

11. Верна ли теорема 6, если отказаться от условия постоянства ранга скобки?

    Комментарий.

12. Открытой проблемой в течение многих лет остается локальная классификация согласованных скобок Пуассона общего положения. Было бы полезным разобраться в положении дел.

    Комментарий. Разбирать работы Тюриэля, Олвера, Гельфанда–Захаревича.

13. Являются ли плоскими пучки согласованных скобок для случая Манакова и для других аналогичных случаев, связанных с полупростыми лиевыми пучками?

    Комментарий. Скорее всего ответ положительный и получается применением теории Захаревича. Необходимые сведения содержатся в работе А. Коняева.

14. Построить аналог оператора рекурсии в случае вырожденных скобок Пуассона (хотя бы локально) и описать его свойства.

    Комментарий. Напомним, что главным свойством оператора рекурсии в симплектическом случае является обнуление тензора Нийенхейса. Что-то аналогичное должно иметь место и в общем случае. Трудность в том, что этот оператор не будет определен на касательном пространстве. Нужно будет факторизовать по ядру. Была бы хорошая дипломная работа.

15. Мне не удалось найти в общедоступной математической литературе четкой формулировки и доказательства теоремы о приведении к каноническому виду (локально) тензорного поля типа $(1,1)$ с нулевым тензором Нийенхейса. Нужно либо найти такую

формулировку вместе с доказательством в литературе, либо самостоятельно доказать такую теорему.

Комментарий. Отдельные варианты, разумеется, есть и они обсуждаются во многих статьях. В общем случае, как мне сказали эксперты, возникают серьезные технические проблемы, если имеется собственное значение, которому отвечают две или более жордановы клетки. Хотелось бы разобраться, в чем состоит трудность. С другой стороны если клетка одна или все клетки имеют имеют размер 1, то вроде бы никаких проблем не возникает и оператор приводится к естественному каноническоиу виду. Технология разбиения на обобщенные собственные подпространства описана, например, в работе Болсинова-Матвеева. Случай одной жорданой клетки также в целом понятен (у меня есть на эту тему материалы). Разобраться со всем этим (в частности, найти и изучить соответствующую литературу) было бы хорошей курсовой (дипломной?) работой.

16. Есть еще один вопрос очень похожий по форме. Предположим, что имеется ковариантно постоянное тензорное поле типа $(1,1)$. К какому каноническому виду его можно привести заменой координат?

    Комментарий. Это условие более сильное, чем обнуление тензора Нийенхейса. (Упражнение: доказать этот факт). Задача исключительно важна в случае псевдоримановых связностей. Это известная открытая проблема. (статьи Солодовникова, книга Аминовой, статья Болсинова-Матвеева)

Тема 4: Немного линейной алгебры: Теорема Жордана-Кронекера и ее приложения

Теорема 13. *Пусть A и B — две кососимметричные формы, заданные в конечномерном комплексном пространстве. Тогда существует базис, в котором обе они одновременно приводятся к блочно-диагональному виду. Для краткости мы сразу выпишем блоки для общей матрицы пучка $A + \lambda B$:*

$$A + \lambda B = \begin{pmatrix} A_1(\lambda) & & & \\ & A_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k(\lambda) \end{pmatrix}$$

Блоки $A_i(\lambda)$ могут быть трех типов:

- *Жорданов блок для $\lambda_i \in \mathbb{C}$:*

$$\begin{pmatrix} & \begin{matrix}\lambda_i-\lambda & 1 & & \\ & \lambda_i-\lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i-\lambda\end{matrix} \\ \begin{matrix}\lambda-\lambda_i & & & \\ -1 & \lambda-\lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & \lambda-\lambda_i\end{matrix} & \end{pmatrix},$$

- *Жорданов блок для $\lambda_i = \infty$*

$$\begin{pmatrix} & \begin{matrix}1 & \lambda & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \lambda \\ & & & 1\end{matrix} \\ \begin{matrix}-1 & & & \\ -\lambda & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -\lambda & -1\end{matrix} & \end{pmatrix},$$

- *Кронекеров блок*

$$
\begin{pmatrix}
 & & & & 1 & \lambda & & & \\
 & & & & & 1 & \lambda & & \\
 & & & & & & \ddots & \ddots & \\
 & & & & & & & 1 & \lambda \\
-1 & & & & & & & & \\
-\lambda & -1 & & & & & & & \\
 & -\lambda & \ddots & & & & & & \\
 & & \ddots & -1 & & & & & \\
 & & & -\lambda & & & & &
\end{pmatrix}
$$

Тривиальный одмерный блок $A_i(\lambda) = (0)$ рассматривается как (1×1) кронекеров блок.

Следствия из этой теоремы (для интегрируемости)

Следствие 3. *Ядра двух разных форм "коммутируют", т.е. являются ортогональными относительно любой из форм. Пространство, порожденное ядрами скобок общего положения, является изотропным.*

Пространсство, порожденное ядрами скобок общего положения, является максимально изотропным тогда и только тогда, когда в разложении Жордана-Кронекера отсутствуют жордановы блоки. Эквивалентным образом: тогда и только тогда, когда все мартрицы из пучка $A_\lambda = A + \lambda B$, $\lambda \in \bar{\mathbb{C}}$, имеют одинаковый ранг.

С парой кососимметрических матриц связана естественная группа Ли, которая эти формы сохраняет:

$$G_{A_\lambda} = \{C \in GL(n, \mathbb{R}) \mid CA_\lambda C^\top \; \forall \, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Ее структуру можно описать (описание недавно получено Pumei Zhang, аспиранткой из Лафборо). Эта группа в теории согласованных скобок Пуассона играет ту же роль, что и ортогональная группа с римановой геометрии или симплектическая группа в симплектической.

Дополнительная польза от этой группы состоит в следующем. Она помогает "сравнивать пучки по уровню их регулярности". Поскольку в случае скобок непостоянного ранга структура этой группы будет зависеть от точки на многообразии, то мы будем иметь следующее полезное утверждение: подмножество $X \subset M$, состоящее из точек с фиксированным типом группы $G_{\mathcal{A}_\lambda}$, инварианто относительно бигамильтонова векторного поля.

Пусть D — инвариантное подпространство $G_{\mathcal{A}_\lambda}$ (сейчас мы предполагаем, что структура этой группы всюду одна и та же). Верно ли, что соответствующее распределение интегрируемо. Это не всегда так, но какие-то интересные случаи, вероятно, можно выделить.

Разложение Жордана-Кронекера позволяет естественным образом определить некоторые новые инварианты конечномерной алгебры Ли. Их естественно назвать инвариантами Жордана-Кронекера. Вряд ли эта идея ранее кем-нибудь обсуждалась, а она может оказаться полезной.

Итак, пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная конечномерная алгебра Ли. Рассмотрим на двойственном пространстве две стандартные согласованные скобки Пуассона $\{\ ,\ \}$ и $\{\ ,\ \}_a$, связанные с методом сдвига аргумента. Пусть $(a, x) \in \mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^*$ — пара общего положения в том смысле, что тип разложения Жордана-Кронекера для форм $\mathcal{A} = c_{ij}^k x_k$ и $\mathcal{A}_a = c_{ij}^k a_k$ в "точке" (x, a) локально постоянен. Такие пары образуют всюду плотное открытое по Зарисскому множество в $\mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^*$ (почему?). Этот тип (число кронекеровых блоков, число жордановых блоков, размеры этих блоков, число различных характеристических чисел) явлется инвариантом алгебры Ли.

Полезность этого инварианта связана с тем, что он оказывается естественным образом связанным с разными вопросами, возникающими при изучении гамильтоновых систем на алгебрах Ли. Например,

Теорема 14.

- *Число Кронекеровых блоков совпадает с индексом алгебры Ли*
- *Сдвиги инвариантов полны тогда и только тогда, когда нет жордановых блоков*
- *Жордановы блоки отсутствуют тогда и только тогда, когда коразмерность множества сингулярных орбит больше единицы*
- *Размеры кронекеровых блоков дают оценку на степени полиномиальных инвариатов коприсоединенного представления (теорема Воронцова)*

Характеристические числа пары форм $\mathcal{A} = c_{ij}^k x_k$ и $\mathcal{A}_a = c_{ij}^k a_k$, разумеется зависят от x и a. Как мы знаем, сами характеристические числа не являются хорошими функциями, симметрические полиномы от них гораздо лучше. В данном случае эти функции вроде бы оказываются полиномами на двойственном пространстве. Надо бы в этом разобраться. Эти полиномы будут коммутировать и между собой, и со сдвигами инвариантов.

Такого типа конструкции могут оказаться очень полезными. С ними нужно поработать. Может быть на этом пути мы получим альтернативное доказательство гипотезы Мищенко-Фоменко.

В работе
A.V. Bolsinov, A.A. Oshemkov, Bi-Hamiltonian structures and singularities of integrable systems, Regul. Chaotic Dyn., 2009, 14 (4-5), pp. 431-454.
объяснено, как особенности бигамильтоновых систем могут быть описаны при помощи особенностей соответствующих согласованных скобок Пуассона. Сформулируем в общих чертах одну из теорем, которые проясняет природу связи между этими особенностями.

Рассмотрим пучок согласованных пуассоновых структур $\mathcal{J} = \{\mathcal{A}_\lambda\}$, $\lambda \in \bar{\mathbb{C}}$. Обозначим через S_λ множество тех точек в которых ранг пуассоновой структуры $\mathcal{A}_\lambda$ меньше ранга пучка.

Рассмотрим коммутативную алгебру функций $\mathcal{F}$, состоящую из функций Казимира всех скобок общего положения из данного пучка. Напомним, что эта алгебра состоит из первых интегралов любой бигамильтоновой системы (в смысле второго определения).

Мы хотим описать множество точек, где интегралы становятся зависимы. Удобно формализовать такие точки следующим образом. Мы скажем, что $x \in M$ — особая (критическая) точка для алгебры $\mathcal{F}$, если размерность пространства, порожденного дифференциалами функций $f \in \mathcal{F}$ в этой точке меньше, чем нужно для полной интегрируемости, т.е. $< \frac{1}{2}(\dim M + \operatorname{corank} \mathcal{J})$.

Теорема 15. *Точка $x \in M$ — критическая для $\mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда существует $\lambda \in \bar{\mathcal{C}}$ такое, что $x \in S_\lambda$.*

Открытые вопросы, вопросы для обсуждениния на семинаре, упражнения:

1. Имеется давно стоящий вопрос о полноте системы функций на полупрямых суммах. Его общая формулировка такова. Рассмотрим полупростую алгебру Ли $\mathfrak{g}$ и ее симметрическое разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$. Предполагается естественное отождествление алгебры и двойственного пространства, учитывающее это разложение. Пусть $a \in \mathfrak{p}$. Тогда функции вида $f(\lambda k + p + \lambda^2 a)$, где f — инвариант присоединенного представления $\mathfrak{g}$, $k \in \mathfrak{k}$, $p \in \mathfrak{p}$, находятся в инволюции относительно естественной скобки на полупрямой сумме $\mathfrak{g}_\theta = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ (отличие от исходной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в том, что $\mathfrak{p}$ предполагается теперь коммутативным подпространством). Эти функции коммутируют. Они также коммутируют со всеми функциями на $\mathrm{St}\, a$. Рассмотрев все эти функции вместе, мы получаем некоторую алгебру функций. Требуется доказать (или построить контрпример), что эта алгебра полна на всех орбитах присоединенного представления алгебры $\mathfrak{g}_\theta$.

   Комментарий. Прочитать про эту конструкцию можно в

   Bolsinov A.V., *Compatible Poisson brackets on Lie algebras and the completeness of families of functions in involution*, Izv. Acad. Nauk SSSR, Ser. matem. **55** (1) : 68–92 (1991).

   или в оригинальной работе А.Г.Реймана

   Reyman, A. G. Integrable Hamiltonian systems connected with graded Lie algebras, Zap. Nauchn. Semin. LOMI AN SSSR **95**, 3-54, (1980) (Russian); English translation: J. Sov. Math. **19**, 1507-1545, (1982).

   см. также книжку или обзор Реймана и Семенова-Тян-Шанского, или статью Болсинова, Борисова в Мат. заметках.

2. Описать особенности четырехмерного твердого тела (случай Манакова на $so(4)$), пользуясь бигамильтоновой технологией.

   Комментарий. Особенности уже были описаны другим способом в работе А.А.Ошемкова. Предлагается сделать это независимым образом, а потом сравнить результаты. задача решается на 100 процентов. заодно полезно было бы проинтегрировать эту систему на критических подмногообразиях, т.е. найти специальные критические решения. Это такжк заведомо можно сделать не решая дифференциальных уравнений, поскольку на особых многообразиях мы получим систему с одной степенью свободы. что-то похожее уже делал Ин Маршалл. Технология будет важна для изучения тех же самых вопросов в случае $so(n)$.

3. Описать особенности случая Ковалевской, пользуясь бигамильтоновой технологией.

   Комментарий. Наиболее разумная бигамильтонова интерпретация случая Ковалевской была дана И.Маршаллом (он, кстати, сейчас работает в Москве и его можно было бы использовать).

4. Та же самая задача для случая Ковалевской в двух полях.

   Комментарий. Топологический анализ проведен Харламовым, но подробные доказательства в его работах не представлены. Было бы очень полезно и важно получить описание критического множества и бифуркационной диаграммы альтернативным (бигамильтоновым) способом.

5. Для алгебр Ли малой размерности вычислить инварианты Жордана–Кронекера.

6. Эти же инварианты было бы полезно вычислить и для других алгебр Ли. Например, полупрямых сумм.

   Комментарий. Это совсем новый вопрос, и речь пока идет об отработке технологии и сборе экспериментальных материалов.

7. Как было объяснено, добавляя к сдвигам инвариантов симметрические многочлены для пары скобок $\{\ ,\ \}$, $\{\ ,\ \}_a$ мы получаем коммутативную алгебру полиномов (?) на $\mathfrak{g}^*$. Когда такое расширенное семейство оказывается полным?

   Комментарий. Это очень хороший вопрос, пока совсем непонятный. Любые продвижения будут очень интересны. Программа максимум: альтернативное доказательство гипотезы Мищенко-Фоменко.

8. Вопрос, уже сформулированный выше. Пусть D — инвариантное подпространство $G_{\mathcal{A}_\lambda}$ (сейчас мы предполагаем, что структура этой группы всюду одна и та же). Верно ли, что соответствующее распределение интегрируемо. Это не всегда так, но какие-то интересные случаи, вероятно, можно выделить.

   Комментарий. Это важный вопрос для локальной классификации согласованных скобок Пуассона.

9. Обычно в примерах бигамильтоновых систем согласованные скобки Пуассона бывают полупростыми. В этом случае бигамильтонова технология работает очень хорошо. А что будет в случае, когда скобки не являются полупростыми? Какого типа вырожденные особенности в этом случае появляются? Хотелось бы какие-нибудь характерные примеры рассмотреть.

10. С алгебраической точки зрения естественным вопросом, который возникает сразу же после теоремы Жордана-Кронекера, является изучение структуры орбит действия группы замен в пространстве пучков (или пар кососимметрических матриц). Например, легко понять, что в случае четной размерности пучок общего положения состоит из жордановых блоков размера 2 на 2 с различными характеристическими числами. Пучок общего положения в нечетномерном случае состоит из одного кронекерова блока. Какова коразмерность множества пучков не общего положения?

Еще один вопрос естественный вопрос можно сформулировать так: пусть у нас имеется некоторый конкретный пучок. Рассмотрим его орбиту. Какие пучки (более сингулярные) лежат в замыкании этой орбиты?

Литература с комментариями

- Общая теория пуассоновых структур и согласованных скобок Пуассона

  1. http://en.wikipedia.org/wiki/Poisson_manifold
  2. V. Guillemin, S. Sternberg, Symplectic Techniques in Physics, Cambridge Univ. Press 1984.
  3. P. Libermann, C.-M. Marle, Symplectic geometry and analytical mechanics, Reidel 1987.
  4. K. H. Bhaskara, K. Viswanath, Poisson algebras and Poisson manifolds, Longman 1988, ISBN 0-582-01989-3.
  5. I. Vaisman, Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds, Birkhauser, 1994. See also the review by Ping Xu in the Bulletin of the AMS.
  6. A. Weinstein, "The local structure of Poisson manifolds J. Diff. Geom. 18 (1983), 523-557. Errata and addenda J. Diff. Geom. 22 (1985), 255.
  7. Фоменко А.Т. Симплектическая геометрия, МГУ, 1988.
  8. Мохов О.И. Симплектическая и пуассонова геометрия на пространствах петель гладких многообразий и интегрируемые уравнения, 2004. 248 с. (издана у Борисова?)
  9. Franco Magri, Carlo Morosi, A geometrical characterization of Hamiltonian systems through the theory of Poisson-Nijenhuis manifolds Quaderno n. 3/2008 (у меня есть файл)
  10. J.-P. Dufour, Nguyen Tien Zung, Poisson Structures and Their Normal Forms (Progress in Mathematics). Birkhauser Basel; 1 edition (October 26, 2005)
  11. В. И. Арнольд, А. Б. Гивенталь, “Симплектическая геометрия”, Динамические системы – 4, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 4, ВИНИТИ, М., 1985, 5–135
  12. Borisov A.V. and Mamaev I.S. *Современные методы теории интегрируемых систем*, (Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003).
  13. А.Г.Рейман, М.А.Семенов-Тян-Шанский, Интегрируемые системы Институт компьютерных исследований, 2003 г.
  14. говорят, что есть книжка Дорфман, но я ее никогда не видел и не знаю, что внутри

- Простейшие примеры согласованных скобок Пуассона, связанные с алгебрами Ли

  1. Bolsinov A.V., *Многомерные случаи Эйлера и Клебша и лиевы пучки*, В кн.:Труды семинара по вект. и тенз. анализу, Вып. 24, 1991, М.: Изд-во МГУ, с. 8-12.
  2. А. В. Болсинов, А. В. Борисов, Согласованные скобки Пуассона на алгебрах Ли. Матем. заметки 2002 Т. 72, 1 с. 11–34. Где скачать: A.Bolsinov’s home page: www-staff.lboro.ac.uk/ maab2/

   3. Bolsinov A.V., *Compatible Poisson brackets on Lie algebras and the completeness of families of functions in involution*, Izv. Acad. Nauk SSSR, Ser. matem. **55** (1) : 68–92 (1991). [English translation: Math. USSR-Izv. **38** (1) : 69–90 (1992).] Где скачать: A.Bolsinov's home page: www-staff.lboro.ac.uk/ maab2/
   4. A.G. Reyman and M.A. Semenov-Tian-Shansky, Compatible Poisson structures for Lax equations: an r-matrix approach, *Phys. Lett. A* , **130**(8-9), 456–460, 1988.
   5. Работы Одесского и Соколова

- Другие примеры согласованных (и не только) скобок Пуассона
   1. A. Ibort, F. Magri, G. Marmo, *Bihamiltonian structures and Stäckel separability,* J. Geom. Phys. 33 (2000), no. 3–4, 210–228.
   2. I.Z. Golubchik and V.V. Sokolov, Compatible Lie brackets and Yang-Baxter equation, *Theoret. and Math. Phys.*, **146**(2), 159–169, 2006.
   3. Borisov A.V. and Mamaev I.S. *Современные методы теории интегрируемых систем*, (Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003).
   4. Доклады Табачникова и Ian Marshall на конференции GDIS-2010
   5. Что-то на пространстве Тейхемюллера (Л.Чехов и другие)
   6. Склянин (квадратичные скобки)
   7. Мохов О.И. Симплектические и пуассоновы структуры на пространствах петель гладких многообразий и интегрируемые системы // УМН. 1998. Т. 53, № 3. С. 85–192 .
   8. Mykytyuk, I. V. and Panasyuk A. Bi-Poisson structures and integrability of geodesic flows on homogeneous spaces. Transformation Groups **9**, no. 3, 289-308 (2004)
   9. Bolsinov, Matveev Geometric characterization of Benenti systems
   10. Работы Бененти и Co.
   11. работы Одесского и Соколова

- Локальная классификация согласованных скобок Пуассона
   1. Gelfand I.M. and Zakharevich I.S. *On the local geometry of a bihamiltonian structure*, in: The Gelfand mathematical seminars, 1990–1992, : 51–112 (Boston: Birkhäuser, 1993).
   2. Olver P., *Canonical forms and integrability of bi-Hamiltonian systems*, Phys. Lett. A **148** (3, 4) : 177–187 (1990).
   3.
   4. Turiel F.G., *Classification locale d'un couple des formes symplectiques Poisson–compatible*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. 1 **308** : 575–578 (1989).
   5. У Тюриэля есть еще несколько (более продвинутых) работ по классификации
   6. Panasyuk A. Veronese webs for bihamiltonian structures of higher corank// in: Poisson Geometry, Banach Center Publications, Vol. 51, Warszawa, 2000, pp. 251–261.

7.

- Вопросы полноты и полной интегрируемости
  1. Bolsinov A.V., *Compatible Poisson brackets on Lie algebras and the completeness of families of functions in involution*, Izv. Acad. Nauk SSSR, Ser. matem. **55** (1) : 68–92 (1991). [English translation: Math. USSR-Izv. **38** (1) : 69–90 (1992).] Где скачать: A.Bolsinov's home page: www-staff.lboro.ac.uk/ maab2/
  2. A.V. Bolsinov, A.A. Oshemkov, Bi-Hamiltonian structures and singularities of integrable systems, Regul. Chaotic Dyn., 2009, 14 (4-5), pp. 431-454. Где скачать: A.Bolsinov's home page: www-staff.lboro.ac.uk/ maab2/
  3.
- Некоммутативная интегрируемость гамильтоновых систем с точки зрения пуассоновых алгебр
  1. Мищенко, Фоменко
  2. Фоменко "Симплектическая геометрия"
  3. Болсинов, Йованович
  4. Нехорошев
  5. Браилов
  6. Leo Butler
  7. Обзор
  8. Ли (второй том)
- Вопросы истории (кто был первым в бигамильтоновой геометрии?)
  1. И. М. Гельфанд, И. Я. Дорфман, "Гамильтоновы операторы и бесконечномерные алгебры Ли", Функц. анализ и его прил., 15:3 (1981), 23–40 (были и другие работы этих авторов, посмотреть в MathSciNet)
  2. Гельфанд И.М., Дорфман И.Я. *Гамильтоновы операторы и связанные с ними алгебраические структуры*, Функц. анализ и прил. **13** (4) : 13–30 (1979).
  3. Magri F., *A simple model of the integrable Hamiltonian equation*, J. Math. Phys. **19** (5) : 1156–1162 (1978).
  4. Reyman, A. G. Integrable Hamiltonian systems connected with graded Lie algebras, Zap. Nauchn. Semin. LOMI AN SSSR **95**, 3-54, (1980) (Russian); English translation: J. Sov. Math. **19**, 1507-1545, (1982).
  5. Mishchenko A.S. and Fomenko A.T., *Euler equations on finite-dimensional Lie groups*, Izv. Acad. Nauk SSSR, Ser. matem. **42** (2), 396–415 (1978). [English translation: Math. USSR-Izv. **12** (2) : 371–389 (1978).]
  6. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Интегрируемость уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли// В кн.: Труды семинара по вект. и тенз. анализу, Вып. 19, 1979, М.: Изд-во МГУ, с. 3-94.

- Вспомогательные, но очень важные конструкции типа тензора Нийенхейса, теоремы Фробениуса, производной Ли
    1. Alexey V. Bolsinov, Vladimir S. Matveev, Splitting and gluing constructions for geodesically equivalent pseudo-Riemannian metrics // arXiv:0904.0535v1
    2. A new proof of the Newlander-Nirenberg theorem S. M. Webster
    3. Newlander-Nirenberg original paper?
    4. Надо бы поискать в литературе простое доказательство
    5. Что-то было у Тюриэля
    6. У меня было написанное мною доказательство теоремы о приведении к каноническому виду одной жордановой клетки (нужно найти)
- Классификация скобок Пуассона на алгебрах Ли
    1. Цыганов про классификацию согласованных скобок
    2.
    3.
- Теорема Жордана-Кронекера, ее приложения и другие алгебраические конструкции
    1. Thompson В его статье есть доказательство
    2. P. Zhang, Algebraic properties of compatible Poisson structures. Preprint Loughborough University 2010, N 10-02. Где скачать: http://www.lboro.ac.uk/departments/ma/research/preprints/papers10/10-02.pdf
    3. A.V. Bolsinov, A.A. Oshemkov, Bi-Hamiltonian structures and singularities of integrable systems, Regul. Chaotic Dyn., 2009, 14 (4-5), pp. 431-454. Где скачать: A.Bolsinov's home page: www-staff.lboro.ac.uk/ maab2/
    4. Воронцов Статья, сданная в Мат. заметки
- Особенности бигамильтоновых систем
    1. A.V. Bolsinov, A.A. Oshemkov, Bi-Hamiltonian structures and singularities of integrable systems, Regul. Chaotic Dyn., 2009, 14 (4-5), pp. 431-454. Где скачать: A.Bolsinov's home page: www-staff.lboro.ac.uk/ maab2/
    2. есть тексты докладов
    3. есть незаконченные тексты про случай Жуковского–Вольтерра и случай Рубановского
    4. есть работы Браилова и Коняева про дискриминант
- Интегралы бигамильтоновых систем
    1. Magri F., *A simple model of the integrable Hamiltonian equation*, J. Math. Phys. **19** (5) : 1156–1162 (1978).
    2. Коняев (Андрей, сами ссылки напишите!)
    3. A. Ibort, F. Magri, G. Marmo, *Bihamiltonian structures and Stäckel separability,* J. Geom. Phys. 33 (2000), no. 3–4, 210–228.

4.

- Редукция и сингулярная редукция.
  1. Я пока не готов дать список
  2.
- Пуассоновы алгебры
  1. K. H. Bhaskara, K. Viswanath, Poisson algebras and Poisson manifolds, Longman 1988, ISBN 0-582-01989-3.
  2. Болсинов, Йованович (обзор и что-нибудь еще)
  3. Федоров, Йованович