Интегрирование бигамильтоновых систем, расширенный метод сдвига аргумента и теорема о коммутанте аннулятора

Антон Изосимов

16 декабря 2010

Пусть $A + \lambda B$ - пучок скобок Пуассона, v - векторное поле, бигамильтоново относительно этого пучка. Тогда функции Казимира всех регулярных скобок пучка являются интегралами в инволюции для поля v.

В случае, когда функций Казимира скобок пучка недостаточно для полной интегрируемости поля v, набор интегралов можно расширить, добавив собственные числа пучка, то есть такие функции $\lambda(x)$, что ранг $A(x) + \lambda(x)B(x)$ меньше ранга пучка. Будет доказана следующая

Теорема 1. *Описанный расширенный набор интегралов является полным тогда и только тогда, когда для всякого собственного числа $\lambda(x)$ и почти для всех x_0 линейная часть скобки $A(x)+\lambda(x_0)B(x)$ в точке x_0 изоморфна $\mathfrak{aff}(1) \oplus \mathbb{K}^m$, где m - коранг пучка.*

Кроме того, будет показано, что собственные числа пучка задают бигамильтоновы потоки (в предположении, что каждому собственному числу соответствует хотя бы одна жорданова клетка размера один).

В качестве приложения будут рассмотрены алгебры Ли, для которых множество сингулярных элементов в $\mathfrak{g}^*_{\mathbb{C}}$ имеет коразмерность один. Для таких алгебр метод сдвига аргумента не дает полного коммутативного набора. Следуя описанной выше конструкции, к сдвигам инвариантов нужно добавить собственные числа пучка. Вместо этого можно добавить сдвиги многочлена $D_{\mathfrak{g}}(x)$, где уравнение $D_{\mathfrak{g}}(x) = 0$ задает сингулярное множество (точнее, его компоненту максимальной размерности). Будет доказана следующая

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{g}$ - вещественная или комплексная алгебра Ли, причем множество сингулярных элементов в $\mathfrak{g}^*_{\mathbb{C}}$ имеет коразмерность один. Если $a \in \mathfrak{g}^*$ - регулярный элемент, то сдвиги инвариантов и многочлена $D_{\mathfrak{g}}(x)$ на элемент a образуют полную систему тогда и только тогда, когда для сингулярного элемента $x \in \mathfrak{g}^*_{\mathbb{C}}$ общего положения* $\operatorname{ann} x \simeq \mathfrak{aff}(1) \oplus \mathbb{C}^{\operatorname{ind} \mathfrak{g}}$.

Предположение $\operatorname{ann} x \simeq \mathfrak{aff}(1) \oplus \mathbb{C}^{\operatorname{ind} \mathfrak{g}}$ достаточно естественно. Дело в том, что если множество сингулярных элементов имеет коразмерность один, то коммутант аннулятора сингулярного элемента общего положения не более, чем одномерен. Поэтому $\mathfrak{aff}(1) \oplus \mathbb{C}^{\operatorname{ind}\mathfrak{g}}$ является “наименее вырожденным” из всех возможных аннуляторов (точнее, одним из двух наименее вырожденных вариантов).

Оценка на размерность коммутанта аннулятора сингулярного элемента общего положения может быть обобщена до следующей теоремы:

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{g}$ - вещественная или комплексная алгебра Ли. Тогда множество элементов $x \in \mathfrak{g}^*$ таких, что $\dim[\operatorname{ann} x, \operatorname{ann} x] \geq k$, имеет коразмерность по крайней мере k.*

Эта теорема является естественным обобщением теоремы о коммутативности аннулятора регулярного элемента.