Задачи по курсу «Дифференциальная геометрия и топология»

I. ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА

Простейшие типы задач по данной теме:

— для наборов чисел, заданных в каждом базисе, проверить, образуют ли они тензор
— по компонентам данного тензора в одном базисе вычислить его компоненты в другом базисе
— для данной операции над компонентами тензора проверить, является ли она тензорной
— для данных тензоров вычислить результат применения к ним основных тензорных операций (тензорное произведение, свертка, симметрирование, альтернирование, опускание и поднятие индексов)

---

1. Доказать, что числа $\delta^i_j = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j \\ 1, & \text{если } i = j \end{cases}$ являются компонентами некоторого тензора типа $(1,1)$.

2. Пусть f — гладкая функция от переменных $x^1, \dots, x^n$, а P — ее критическая точка. Доказать, что вторые частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$, вычисленные в точке P, являются компонентами некоторого тензора ранга 2 и определить тип этого тензора.

***3.** Пусть f — гладкая функция от переменных $x^1, \dots, x^n$, а P — точка, в которой все ее производные до порядка $(k-1)$ включительно равны нулю. Доказать, что числа $A_{i_1 \dots i_k} = \frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_k}}\Big|_P$ являются компонентами некоторого тензора и определить тип этого тензора.

4. Пусть v — векторное поле, равное нулю в точке P. Доказать, что частные производные $\frac{\partial v^i}{\partial x^j}$, вычисленные в точке P, являются компонентами некоторого тензора ранга 2 и определить тип этого тензора.

5. Пусть $T_{ij} v^i v^j$ — инвариант [*т.е. в каждом базисе задан набор чисел T_{ij} так, что для любого вектора v число $T_{ij} v^i v^j$ не зависит от базиса*]. Доказать, что $T_{ij} + T_{ji}$ — тензор типа $(0,2)$.

***6.** Пусть $F(x_1, \dots, x_n)$ — однородный многочлен степени k в $\mathbb{R}^n$. Доказать, что числа $A_{i_1 \dots i_k} = \frac{\partial^k F}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_k}}$ являются компонентами тензора типа $(0,k)$.

7. Пусть для каждого базиса в $\mathbb{R}^n$ заданы наборы чисел $S^1, \dots, S^n$ и $T_1, \dots, T_n$, причем числа T_i образуют тензор типа $(0,1)$, а «свертка» $S^i T_i$ не зависит от базиса. Доказать, что числа S^i образуют тензор типа $(1,0)$.

***8.** Пусть $S^{i_1 \cdots i_p}$ — наборы чисел, заданные в каждом базисе, такие что для любого тензора T типа $(0,q)$ наборы чисел $S^{i_1 \cdots i_p} T_{i_1 \dots i_q}$ образуют тензор. Доказать, что наборы чисел $S^{i_1 \cdots i_p}$ являются компонентами тензора.

9. [*Назовем тензор A ранга 2 невырожденным, если матрица M_A, составленная из его компонент, невырождена.*] Доказать, что для невырожденного тензора A (типа (p,q), где $p+q=2$) элементы матрицы M_A^{-1} также являются компонентами некоторого тензора ранга 2 и определить тип этого тензора.

10. Описать все инвариантные тензоры [*т. е. такие тензоры, компоненты которых одинаковы во всех базисах*].
а) ранга ≤ 3,
*б) ранга 4.

11. Найти компоненту T^{12}_1 тензора $T = e^1 \otimes e_2 \otimes e_2 + 2e^2 \otimes e_2 \otimes e_2$ в базисе $f_1 = e_1 + 2e_2$, $f_2 = -e_1 - e_2$.

12. Пусть T_{ijk} — кососимметрический тензор в пространстве $\mathbb{R}^3$, у которого компонента T_{123} равна 1 в базисе e_1, e_2, e_3. Вычислить компоненты тензора T_{ijk} в базисе $f_1 = e_1 - e_2$, $f_2 = e_2 - e_3$, $f_3 = e_1 + e_2 + e_3$.

13. Для векторов $u = e_1 - 3e_2 + e_3$, $v = 3e_1 + e_3$ и ковекторов $\xi = e^2 + e^3$, $\eta = e^1 - e^2 + 2e^3$
а) вычислить $\xi \otimes \eta(u,v)$,
б) проальтернировать тензор $\xi \otimes \eta$,
в) просимметрировать тензор $u \otimes v$.

14. Поднять (опустить) индекс у тензора $T = e_1 \otimes e^2 + 3e_2 \otimes e^1$ с помощью скалярного произведения, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

15. Найти размерности подпространств кососимметричных и симметричных тензоров в пространстве тензоров типа $(0,k)$ на n-мерном пространстве.

16. Доказать, что полная свертка $A_{ij} B^{ij}$ симметричного тензора A_{ij} и кососимметричного тензора B^{ij} равна нулю.

17. Доказать, что операция перестановки индексов коммутирует с операциями альтернирования и симметрирования.

18. Доказать, что если тензор симметричен по индексам i и j и кососимметричен по индексам j и k, то он равен нулю.

19. Пусть ξ и η — два ковектора. Доказать, что $\xi \otimes \eta = \eta \otimes \xi$ тогда и только тогда, когда ξ и η линейно зависимы.

***20.** Доказать, что $T_{[[i_1 \dots i_k] j_1 \dots j_l]} = T_{[i_1 \dots i_k j_1 \dots j_l]}$.

21. Вычислить внешнее произведение форм $\alpha = 2dx + 3dy$ и $\beta = dx \wedge dy + dy \wedge dz$.

22. Доказать, что 1-формы $\omega^1, \dots, \omega^k$ являются линейно независимыми тогда и только тогда, когда $\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k \neq 0$.

23. Доказать, что p-форму ω можно представить в виде $\omega = \theta \wedge \alpha$, где α — не нулевая 1-форма, тогда и только тогда, когда $\omega \wedge \alpha = 0$.

24. Доказать, что 2-форму ω можно представить в виде $\omega = \alpha \wedge \beta$, где α, β — 1-формы, тогда и только тогда, когда $\omega \wedge \omega = 0$.

***25.** Доказать, что любая $(n-1)$-форма в n-мерном пространстве является внешним произведением 1-форм.

***26.** Пусть $\omega = \omega_{ij}\, dx^i \wedge dx^j$ — невырожденная 2-форма на многообразии M [*т. е. матрица $\|\omega_{ij}\|$ невырождена во всех точках M*]. Доказать, что размерность M четна и справедлива формула $\underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_{n \text{ раз}} = \pm n! \sqrt{\det(\omega_{ij})}\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{2n}$, где $\dim M = 2n$.

***27.** Пусть на линейном пространстве размерности n задано скалярное произведение (метрика) g_{ij} и фиксирована ориентация. Определим оператор $*$, переводящий k-формы в $(n-k)$-формы, формулой $(*\alpha)_{i_{k+1} \dots i_n} = \frac{1}{k!} \varepsilon_{i_1 \dots i_n} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_k j_k} \alpha_{j_1 \dots j_k}$, где $\varepsilon = \sqrt{\det g_{ij}}\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ — форма объема для метрики g_{ij}. Доказать, что
а) $*(*\alpha) = (-1)^{k(n-k)} \alpha$ для любой k-формы α,
б) $\alpha \wedge *\beta = \beta \wedge *\alpha$ для любых k-форм α, β,
в) оператор $*$ — ортогональный относительно скалярного произведения k-форм, определяемого формулой $\alpha \wedge *\beta = (\alpha, \beta)\varepsilon$.

28. Выписать явные формулы для оператора $*$ в $\mathbb{R}^3$ (на формах степени $0, 1, 2, 3$) для случая, когда метрика диагональна.

Задачи по курсу «Дифференциальная геометрия и топология»

II. КОММУТАТОР ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ И ВНЕШНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Простейшие типы задач по данной теме:
— вычислить коммутатор векторных полей
— записать данную форму в другой системе координат
— вычислить внешний дифференциал формы
— вычислить прообраз формы при заданном отображении
— проинтегрировать k-форму по k-мерному многообразию

1. [*Вектор градиента функции f на многообразии с метрикой g_{ij} есть результат композиции двух операций — операции взятия частных производных функции f и операции поднятия индекса с помощью метрики g_{ij}.*]
а) Записать градиент функции в полярных координатах в $\mathbb{R}^2$, а также в сферических координатах в $\mathbb{R}^3$.
б) Записать в произвольной системе координат производную функции f в направлении вектора градиента функции g.
в) Доказать, что вектор градиента функции ортогонален ее поверхности уровня.
г) Доказать, что направление наибольшего роста функции в некоторой точке задается вектором ее градиента в этой точке.

2. Записать форму
а) $x\,dx + y\,dy + z\,dz$ в сферических координатах;
б) $dx \wedge dy \wedge dz$ в цилиндрических координатах;
в) $r^2\,dr \wedge d\varphi$ (заданную в полярных координатах на плоскости) в декартовых координатах.
Проверить, являются ли данные формы гладкими.

3. На плоскости (с координатами x, y) задана форма $\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$. Найти ее прообраз для следующих отображений f в эту плоскость:
а) $f : \varphi \to (x, y)$ задано формулами $x = \cos\varphi;\ y = \sin\varphi$;
б) $f : (u, v) \to (x, y)$ задано формулами $x = u^2 - v^2;\ y = 2uv$;
в $f : (p, q, r) \to (x, y)$ задано формулами $x = pq + r;\ y = 2(pq + r)$.

4. Вычислить внешний дифференциал формы
а) $x^2\,dx + xy^3\,dy$;
б) $x\,dy \wedge dz + 3y\,dx \wedge dz$;
в) $\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$.

5. Верно ли, что любое поле тензоров ранга 1 можно (локально) «выпрямить», т. е. найти систему координат, в которой компоненты этого поля будут постоянны? (Разобрать отдельно случаи тензоров типа $(0, 1)$ и $(1, 0)$.)

6. Доказать, что 1-форму $\alpha = xdy + dz$ никакой заменой координат нельзя привести к виду udv.

7. Для 1-формы $\alpha = f(z)dx + dy + (x + y)dz$ описать все функции $f(z)$, для которых $\alpha \wedge d\alpha = 0$.

8. Вычислить коммутатор векторных полей (на плоскости с координатами x, y)
а) $\mathbf{u} = (1, 0)$ и $\mathbf{v} = (x^2 + y, x - y)$;
б) $\mathbf{u} = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$ и $\mathbf{v} = (-y, x)$;
в) $\mathbf{u} = (3x + 4y, x - 2y)$ и $\mathbf{v} = (x - 3y, 2x)$;

9. [*Векторное поле v в $\mathbb{R}^n$ с декартовыми координатами $(x^1, \dots, x^n)$ называется линейным, если $v^i(x^1, \dots, x^n) = A^i_k x^k$, где A — некоторая постоянная матрица.*] Доказать, что коммутатор линейных векторных полей есть снова линейное векторное поле, и выразить его матрицу через матрицы исходных полей.

10. На единичной сфере $S^3 = \{x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}$ (в $\mathbb{R}^4$ с декартовыми координатами x, y, z, w) рассмотрим векторные поля $u = (-y, x, -w, z)$ и $v_1 = (-w, -z, y, x)$, $v_2 = (-w, z, -y, x)$. Вычислить коммутаторы $[u, v_1]$ и $[u, v_2]$.

11. Пусть X, Y — векторные поля на многообразии M, касающиеся подмногообразия N. Обозначим через $\tilde{X}, \tilde{Y}$ их ограничения на N. Доказать, что векторное поле $[X, Y]$ тоже касается подмногообразия N, а его ограничение на N совпадает с полем $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$.

12. Доказать формулу $d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])$, где ω — дифференциальная 1-форма, X, Y — векторные поля, $X(f)$ — производная функции f по направлению векторного поля X, а $[X, Y]$ — коммутатор векторных полей X и Y.

***13.** Доказать следующую формулу для дифференциальной формы ω степени p:
$$d\omega(X_0, \dots, X_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i X_i(\omega(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_p)) + \sum_{0 \le i < j \le p} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_p).$$

14. Доказать, что ограничение замкнутой формы на подмногообразие является замкнутой формой.

***15.** Показать, что ограничение формы $\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{z^2}$ на любую коническую поверхность в $\mathbb{R}^3(x, y, z)$ с центром в начале координат является замкнутой формой.

16. Вычислить интеграл от формы $\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$ по окружности с центром в точке $(0, 0)$.

17. Привести пример замкнутой, но не точной 1-формы на $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

***18.** Привести пример замкнутой, но не точной k-формы на $\mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}$.

19. Доказать, что замкнутая 1-форма на многообразии M является точной тогда и только тогда, когда интеграл от нее по любому замкнутому пути в M равен нулю.

20. Вычислить группы когомологий
а) прямой,
б) окружности,
*в) плоскости, из которой выброшено k точек,
*г) двумерной сферы,
*д) двумерного тора,

Задачи по курсу «Дифференциальная геометрия и топология»

III. КОВАРИАНТНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ (ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС, ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ, КРИВИЗНА)

Простейшие типы задач по данной теме:

— для данной римановой метрики вычислить символы Кристоффеля соответствующей ей римановой связности
— найти ковариантную производную данного тензорного поля относительно данной связности
— выписать уравнения параллельного переноса для данной метрики (или для данной связности)
— выписать уравнения геодезических для данной метрики (или для данной связности)
— вычислить скалярную кривизну для данной метрики

1. На плоскости с координатами x, y найти связность, относительно которой векторные поля $\xi = (e^x, 1)$ и $\eta = (0, e^y)$ ковариантно постоянны. Найти тензор кручения этой связности.

2. Компоненты векторного поля v на плоскости с полярными координатами r, ϕ равны $v^1 = \cos\phi$ и $v^2 = -\frac{1}{r}\sin\phi$. Найти модуль и компоненты ковариантной производной поля v относительно евклидовой метрики.

3. Вычислить явно символы Кристоффеля
а) на сфере и плоскости Лобачевского,
б) в сферической системе координат в $\mathbb{R}^3$,
*в) на поверхности вращения.

4. Пусть в $\mathbb{R}^3$ с евклидовой метрикой задана соответствующая ей симметричная риманова связность. Найти ковариантную производную тензорного поля, которое в цилиндрических координатах (r, ϕ, z) имеет компоненты

а) $\|t_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, б) $\|t^i_j\| = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Доказать, что разности $\Gamma^i_{jk} - \tilde{\Gamma}^i_{jk}$ символов Кристоффеля двух связностей ∇ и $\tilde{\nabla}$ образуют тензор типа $(1,2)$, и что любой тензор типа $(1,2)$ может быть представлен таким образом.

6. Доказать, что на многообразии с симметричной связностью коммутатор ковариантно постоянных векторных полей равен нулю.

***7.** Пусть на многообразии M задана симметричная связность ∇. Доказать, что для любой точки $P \in M$ можно выбрать такие координаты в некоторой ее окрестности, что в этих координатах все символы Кристоффеля связности ∇ обращаются в ноль в точке P. (Верно ли это утверждение для несимметричной связности?)

***8.** Доказать следующие тождества для произвольной римановой связности (здесь $g = \det g_{ij}$):
а) $\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^k}$; б) $\nabla_i v^i = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}v^i)}{\partial x^i}$.

***9.** Пусть M^n — риманово многообразие с метрикой g_{ij}. Доказать, что ковариантная производная n-формы $\sqrt{\det g_{ij}}\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ (формы объема) относительно римановой связности на M^n равна нулю.

***10.** Функция $\nabla_i v^i$, построенная по векторному полю v на многообразии со связностью ∇, называется *дивергенцией* векторного поля v (обозначение: $\operatorname{div} v$). Доказать, что для римановой связности $\operatorname{div} v = *d*(\hat{v})$, где $\hat{v}$ — 1-форма, полученная из векторного поля v опусканием индекса при помощи метрики g_{ij}, а $*$ — оператор на формах, соответствующий метрике g_{ij}.

11. Выписать явно уравнения параллельного переноса вдоль
а) параллели на сфере,
б) горизонтальной прямой на плоскости Лобачевского (модель верхней полуплоскости),
и решить их.

***12.** Пусть X и Y — векторные поля на многообразии M с аффинной связностью ∇. Рассмотрим точку $P \in M$ и кривую $\gamma(t)$, такую что $\gamma(0) = P$, $\dot{\gamma}(0) = X(P)$. Обозначим через Π_t оператор параллельного переноса из точки $P = \gamma(0)$ в точку $\gamma(t)$ вдоль кривой γ относительно связности ∇. Доказать, что $(\nabla_X Y)(P) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\big(\Pi_t^{-1}(Y(\gamma(t)))\big)$.

13. Найти геодезические
а) на плоскости Лобачевского,
б) на плоскости с метрикой $ds^2 = y(dx^2 + dy^2)$.
в) на геликоиде $r(u,v) = (u\cos v, u\sin v, hv)$.
г) на плоскости с метрикой $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{x^2+y^2}$.

14. Описать метрики вида $e^{\lambda(x,y,z)}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$, для которых все кривые $\{y = \mathrm{const}, z = \mathrm{const}\}$ являются геодезическими (после подходящей параметризации).

15. Доказать, что для любой связности ∇ существует симметричная связность $\tilde{\nabla}$ с теми же геодезическими.

***16.** Доказать, что геодезические метрики $ds^2 = (f(x) + g(y))(dx^2 + dy^2)$ определяются уравнением $\frac{dx}{\sqrt{f(x)+a}} \pm \frac{dy}{\sqrt{g(y)-a}} = 0$, где a — произвольная константа.

17. Доказать, что любые две точки связного риманова многообразия можно соединить «ломаной» (т. е. кривой, состоящей из конечного числа отрезков геодезических). Привести пример связного многообразия, на котором не любые две точки можно соединить геодезической.

18. Вычислить скалярную кривизну
а) плоскости Лобачевского,
б) многообразия с метрикой $ds^2 = \lambda(x,y)(dx^2 + dy^2)$,
*в) тора T^2, задаваемого в $\mathbb{R}^4$ (с евклидовой метрикой) уравнениями $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$ и $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2$,

19. Вычислить тензор кривизны на двумерной сфере в сферических координатах.

20. Доказать, что на двумерном многообразии метрика и тензор Риччи пропорциональны с коэффициентом $\frac{R}{2}$ (т. е. $R_{ij} = \frac{R}{2}g_{ij}$).

IV. ГОМОТОПИЯ, СТЕПЕНЬ ОТОБРАЖЕНИЯ

Простейшие типы типы задач по данной теме:

— построить явную гомотопию двух данных отображений

— проверить, что два данных пространства гомотопически эквивалентны

— вычислить степень данного отображения

— найти особые точки данного векторного поля и вычислить их индексы

1. Доказать, что любое непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ гомотопно постоянному отображению (т. е. отображению в точку), если а) $X = \mathbb{R}^n$, б) $Y = \mathbb{R}^n$.

2. Доказать, что гомотопия является отношением эквивалентности на множестве непрерывных отображений.

3. Доказать, что гомотопическая эквивалентность является отношением эквивалентности на множестве топологических пространств.

4. Доказать, что $\mathbb{R}^n$ гомотопически эквивалентно точке.

5. Доказать, что $\mathbb{R}^n$ без точки гомотопически эквивалентно $(n-1)$-мерной сфере.

***6.** Доказать, что $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^k$ (где $k < n$) гомотопически эквивалентно $(n-k-1)$-мерной сфере.

7. Пусть γ_1, γ_2 — два непрерывных пути из точки P в точку Q в некотором топологическом пространстве X. Доказать, что следующие условия равносильны:
(1) путь γ_1 гомотопен пути γ_2 (концы P и Q при гомотопии неподвижны);
(2) замкнутый путь $\gamma_1\gamma_2^{-1}$ стягивается в точку в пространстве X.

8. Пусть f и g — непрерывные отображения пространства X в n-мерную сферу S^n. Доказать, что если $f(x)$ и $g(x)$ ни для какой точки $x \in X$ не являются диаметрально противоположными на сфере S^n, то отображения f и g гомотопны.

9. Доказать, что отображение $f\colon S^n \to S^n$, не имеющее неподвижных точек, гомотопно центральной симметрии на сфере S^n.

10. Пусть X, Y, Z — гладкие замкнутые ориентированные многообразия одинаковой размерности, а $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ — гладкие отображения. Доказать, что $\deg(g \circ f) = \deg g \cdot \deg f$.

11. Доказать, что замкнутое многообразие не стягиваемо [*т. е. тождественное отображение не гомотопно отображению в точку*].

12. Доказать, что замкнутые многообразия разных размерностей гомотопически не эквивалентны.

***13.** Привести пример отображения
а) $f\colon S^n \to S^n$, для которого $\deg f = k$.
б) двумерного тора T^2 в двумерную сферу S^2, степень которого равна k.
в) степени 0, не гомотопного постоянному отображению (т. е. отображению в точку).

14. Доказать, что два отображения $S^1 \to S^1$ гомотопны тогда и только тогда, когда равны их степени.

15. Вычислить степень отображения $f : S^2 \to S^2$, где S^2 — это пополненная комплексная плоскость, а $f(z) = P(z)/Q(z)$ — отношение полиномов степени k и l.

16. Пусть $f\colon S^n \to S^n$ — центральная симметрия.
а) Вычислить $\deg f$.
б) Доказать, что при нечетных n отображение f гомотопно тождественному отображению.

***17.** Пусть f — отображение n-мерной сферы $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|^2 = 1\}$ в себя, такое что $f(x) \neq -x$ для всех точек $x \in S^n$.
а) Доказать, что $\deg f = 1$.
б) Доказать, что если n четно, то существует точка $x \in S^n$, такая что $f(x) = x$.

***18.** Пусть отображение $f\colon S^n \to S^n$ имеет нечетную степень. Доказать, что существует пара диаметрально противоположных точек на сфере S^n, которая переходит при отображении f в пару диаметрально противоположных точек.

***19.** Найти особые точки и вычислить их индексы для следующих векторных полей на плоскости:
а) $\mathbf{v}(x,y) = (x+2y, 3x+y)$;
б) $\mathbf{v}(x,y) = (x^2-y^2, 2xy)$;
в) $\mathbf{v}(x,y) = \operatorname{grad}\operatorname{Re}(z^n)$, где $z = x+iy$ и $n \in \mathbb{Z}$;
г) $\mathbf{v}(x,y) = \operatorname{grad}\operatorname{Re}\bigl(z + \frac{1}{z}\bigr)$, где $z = x+iy$.

***20.** Найти индекс особой точки для линейного векторного поля $v^i(x^1,\ldots,x^n) = A^i_k x^k$ в $\mathbb{R}^n$, где A — постоянная невырожденная матрица.

***21.** Доказать, что на поверхности Земли всегда найдутся две диаметрально противоположные точки, в которых давление P и температура T одинаковы (если, конечно, P и T — непрерывные функции).

***22.** Вычислить степень отображения $f\colon \mathrm{SO}(3) \to \mathrm{SO}(3)$, которое каждой ортогональной матрице A ставит в соответствие матрицу A^n.