А.Т.Фоменко

МАТЕМАТИКА (от греческого mathema – наука) – наука, в которой изучаются пространственные формы и количественные отношения.

Содержание

1. ОСНОВНЫЕ РАЗДЕЛЫ МАТЕМАТИКИ.

Математика – древнейшая наука, с самого начала своего возникновения игравшая важнейшую роль в развитии человечества. Она зародилась из потребностей людей оценивать количественные соотношения и изучать геометрические формы, возникающие в окружающем мире. Математика прошла большой и бурный путь развития, взаимодействуя с другими областями знания, черпая оттуда многие свои задачи и, в свою очередь, активно участвуя в создании методов исследования в других науках, например, в физике, механике, химии, астрономии, небесной механике, биологии, вычислительной технике и т.д. Современное естествознание немыслимо без математических методов. Математика проникает и в некоторые гуманитарные науки. Некоторые ученые находили возможным говорить о математике как о «царице наук».

Сегодня в математике обычно выделяют следующие области: математический анализ, алгебра, аналитическая геометрия, линейная алгебра и геометрия, дискретная математика и математическая кибернетика, математическая логика, дифференциальные уравнения, дифференциальная геометрия, компьютерная геометрия, топология, алгебраическая геометрия, симплектическая геометрия и топология, теория чисел, функциональный анализ и интегральные уравнения, теория функций комплексного переменного, уравнения с частными производными, уравнения и методы математической физики, теория вероятностей, актуарная математика, математическая статистика, теория случайных процессов, вариационное исчисление и методы оптимизации, вычислительная математика и программирование (методы вычислений, то есть численные методы), криптография, теория кодирования и теория искусственного интеллекта.

Такое деление довольно условно, так как многие области математики тесно переплетаются, и новые направления часто возникают на стыке классических. В соответствии с таким делением в современном обучении организовано и преподавание математики в главных университетах мира. Например, в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова – на механико-математическом факультете – сегодня имеются следующие математические кафедры (всего их 17):

- кафедра математического анализа (с кабинетом элементарной математики);

- кафедра высшей геометрии и топологии;
- кафедра дифференциальной геометрии и приложений (с лабораторией компьютерных методов в естественных и гуманитарных науках);
- кафедра общей топологии и геометрии;
- кафедра высшей алгебры;
- кафедра дифференциальных уравнений;
- кафедра теории функций и функционального анализа (с лабораторией операторных моделей и спектрального анализа);
- кафедра математической логики и теории алгоритмов (с лабораторией логических проблем информатики);
- кафедра теории вероятностей (с кабинетом математики и механики и с лабораториями – теории вероятностей, вычислительных средств, вероятностных и статистических исследований, больших случайных систем);
- кафедра математической статистики и случайных процессов (с лабораторией математической статистики);
- кафедра дискретной математики;
- кафедра вычислительной математики (с лабораториями вычислительных методов, компьютерного моделирования);
- кафедра теории чисел;
- кафедра общих проблем управления;
- кафедра математической теории интеллектуальных систем;
- кафедра динамических систем;
- кафедра математических и компьютерных методов анализа.

Как уже было отмечено, развитие математики в огромной степени стимулировалось проблемами, возникающими, в частности, в физике, химии, механике, астрономии, биологии. Именно поэтому, например, на мех.-матем. ф-те МГУ наряду с кафедрами математики активно работают фундаментальные кафедры отделения механики (всего их 9 и они тесно взаимодействуют с математическими кафедрами):

- кафедра теоретической механики и мехатроники;
- кафедра теории упругости;
- кафедра аэромеханики и газовой динамики;
- кафедра газовой и волновой динамики (с лабораторией волновых процессов);
- кафедра гидромеханики;
- кафедра прикладной механики и управления;
- кафедра теории пластичности;

- кафедра механики композитов;
- кафедра вычислительной механики.

Современные математические методы играют огромную роль, например, в механике жидкости, газа и плазмы; в механике деформируемого твердого тела; в аналитической механике; в теории устойчивости движения; в проблемах управления и оптимизации, в мехатронике; в механике многофазных сред; в механике композитов.

2. РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ РАНЕЕ XVII ВЕКА.

В краткой статье невозможно охватить все линии становления и развития математики, поэтому ограничимся яркими примерами, дающими представление о зарождении и эволюции некоторых фундаментальных математических направлений.

На первых этапах становления человеческой культуры и возникновения элементов абстрактного мышления естественным образом большую роль сыграли следующие, по своей сути уже математические, операции: счет предметов, измерение длин, углов, площадей и объемов. На основе счета постепенно возникло представление о натуральных числах и операциях над ними – сначала сложения и вычитания, а потом умножения и деления. Конкретные задачи ведения хозяйства и торговли обусловили появление понятий дробных чисел и, следовательно, подтолкнули к осознанию необходимости операций над дробями. Со временем накапливающийся опыт и приемы, основанные на четырех арифметических действиях, привели к возникновению арифметики – математической науки, позволявшей быстро выполнять операции, насущно необходимые в самых разных областях деятельности человека. В дальнейшем отсюда выросли теория чисел и алгебра. Вслед за понятием натурального числа постепенно сложилось представление о действительных числах, однако этот процесс был непростым, поскольку понятие иррационального числа требовало более высокого уровня абстрактного мышления, в том числе представления о бесконечных процессах. Само понятие бесконечности возникло в результате математического и философского осмысления окружающего мира и рождалось в бурных дискуссиях ученых самых разных областей знания.

Потребности строительства, военного дела, а также задачи, возникавшие, например, при дележе земельных участков и полей, измерении посевных площадей, оценке длин и направлений прокладываемых дорог, изготовлении тары для транспортировки сыпучих материалов, привели к возникновению геометрии. Одновременно с этим разработка методов геометрии, в том числе тригонометрии и стереометрии, потребовалась для зарождавшейся астрономии, то есть науки, изучающей движение небесных объектов – планет и звезд – при суточном и годичном вращении небосвода. Геометрия и арифметика были необходимы для обработки астрономических наблюдений, поскольку с ними были напрямую связаны сезонные и климатические изменения, столь важные для успешного ведения сельского хозяйства. Безусловно, арифметика и геометрия были нужны при создании транспортных средств, для разработки разнообразных инструментов и механизмов, в военном и морском деле, при постройке и оснащении лодок и кораблей.

Значительные достижения в области математики были сделаны в Греции, Вавилоне, Индии, Египте, Риме, Китае, в арабских государствах, в Византии, учеными средневекового Востока и Средней Азии.

Астрономические наблюдения вызвали к жизни такое важное понятие как координаты, например, широты и долготы планет и звезд. При этом довольно быстро было понятно, что координаты могут быть различными по свой природе. Например, для задания положения небесных объектов использовались как экваториальные, так и эклиптикальные координаты. Было замечено, что планеты движутся примерно в одной плоскости, которую назвали плоскостью эклиптики. Иногда эклиптикой называли окружность пересечения плоскости эклиптики с воображаемой сферой неподвижных звезд.

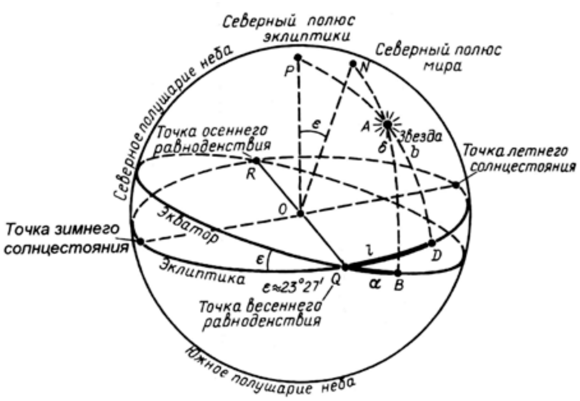


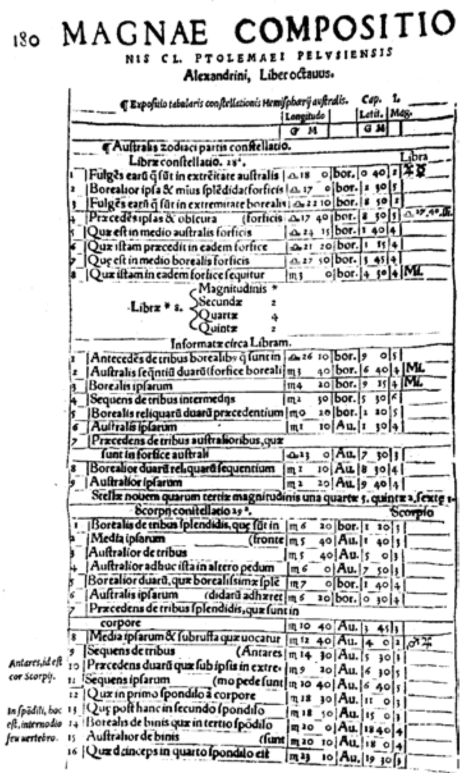
Рисунок 1. Сфера неподвижных звезд. Эклиптикальная и экваториальная системы координат.

На рис.1 изображена небесная сфера с центром O, северным полюсом эклиптики P и полюсом мира N. Эклиптика и экватор пересекаются в двух точках, называющихся точками весеннего и осеннего равноденствий. Они обозначены на рисунке буквами Q и R. На рисунке также иллюстрируется измерение координат звезды относительно двух систем координат на небесной сфере – экваториальной и эклиптикальной.

Для записи наблюдений небесных светил нужны какие-либо удобные координаты, позволяющие фиксировать положения небесных объектов относительно друг друга. Существовало несколько таких систем координат. Прежде всего, это экваториальные координаты, задаваемые следующим образом.

На рис.1 отмечены северный полюс N и небесный экватор, содержащий дугу QB. Можно считать, что с достаточной для нас точностью плоскость небесного экватора совпадает с плоскостью земного экватора. При этом центр Земли помещен в точку O – центр небесной сферы. Точка Q – это точка весеннего равноденствия. Пусть точка A изображает произвольную неподвижную звезду. Рассмотрим меридиан NB, проходящий через северный полюс и звезду A. Точка B – точка пересечения меридиана с плоскостью экватора. Дуга QB изображает экваториальную долготу звезды A. Эта долгота называется также прямым восхождением. Дуга отсчитывается в сторону, противоположную направлению движения точки весеннего равноденствия Q. Дуга меридиана AB изображает на рис.1 экваториальную широту звезды A, называемую также склонением звезды A. При суточном движении Земли склонения звезд не меняются, а прямые восхождения равномерно изменяются, со скоростью вращения Земли.

Другой часто используемой системой, особенно в древних звездных каталогах (например, в известном старинном «Альмагесте» **Клавдия Птолемея**, рис.2), является эклиптикальная, или эклиптическая система координат. Координаты использовались также при составлении старинных звездных карт, рис.3.



180 MAGNAE COMPOSITIO
NIS CL. PTOLEMAEI PELVSIENSIS
Alexandrini, Liber octauus.

¶ Expositio tabularis constellationis Hemisphærij australis. Cap. 1.

		Longitudo G M		Latit. G M	Mag.	
	¶ Australis zodiaci partis constellatio.					
	Libræ constellatio. 18^a.					Libra
1	Fulgẽs earũ q̃ sũt in extrẽitate australis	♎18 0	bor.	0 40	2	♃☿
2	Borealior ipsa & mius splẽdida (forficis	♎17 0	bor.	2 30	5	
3	Fulgẽs earũ q̃ sũt in extremitate borealis	♎22 10	bor.	8 30	2	
4	Præcedẽs ipsas & obscura (forficis	♎17 40	bor.	8 30	5	♎17.40.M.
5	Quæ est in medio australis forficis	♎24 15	bor.	1 40	4	
6	Quæ istam præcedit in eadem forfice	♎21 20	bor.	1 15	4	
7	Quę est in medio borealis forficis	♎27 30	bor.	3 45	4	
8	Quæ istam in eadem forfice sequitur	♏3 0	bor.	4 30	4	M.L.

Libræ * 8. Magnitudinis * Secundæ 2 Quartæ 4 Quintæ 2

		Longitudo G M		Latit. G M	Mag.	
	Informatæ circa Libram.					
1	Antecedẽs de tribus borealib9 q̃ sunt in	♎26 10	bor.	9 0	5	
2	Australis seq̃ntiũ duarũ (forfice boreali	♏3 40	bor.	6 40	4	M.L.
3	Borealis ipsarum	♏4 20	bor.	9 15	4	M.L.
4	Sequens de tribus intermedijs	♏2 30	bor.	5 30	6	
5	Borealis reliquarũ duarũ præcedentium	♏0 20	bor.	2 20	5	
6	Australis ipsarum	♏1 10	Au.	1 30	4	
7	Præcedens de tribus australioribus, quæ sunt in forfice australi	♎23 0	Au.	7 30	3	
8	Borealior duarũ reliquarũ sequentium	♏1 10	Au.	8 30	4	
9	Australior ipsarum	♏2 20	Au.	9 40	4	

Stellæ nouem quarum tertiæ magnitudinis una quartæ 5. quintæ 2, sextę 1.

		Longitudo G M		Latit. G M	Mag.	
	Scorpij constellatio 29^a.					Scorpio
1	Borealis de tribus splendidis, quę sũt in	♏6 20	bor.	1 20	3	
2	Media ipsarum (fronte	♏5 40	Au.	1 40	3	
3	Australior de tribus	♏5 40	Au.	5 0	3	
4	Australior adhuc ista in altero pedum	♏6 0	Au.	7 50	3	
5	Borealior duarũ, quæ borealissimæ splẽ	♏7 0	bor.	1 40	4	
6	Australis ipsarum (didarũ adhæret	♏6 20	bor.	0 30	4	
7	Præcedens de tribus splendidis, quæ sunt in corpore	♏10 40	Au.	3 45	3	
8	Media ipsarum & subrussa quæ uocatur	♏12 40	Au.	4 0	2	♂♃
9	Sequens de tribus (Antares	♏14 30	Au.	5 30	3	
10	Præcedens duarũ quæ sub ipsis in extre-	♏9 20	Au.	6 30	5	
11	Sequens ipsarum (mo pede sunt	♏10 40	Au.	6 40	5	
12	Quæ in primo spondilo à corpore	♏18 30	Au.	11 0	3	
13	Quę post hanc in secundo spondilo	♏18 50	Au.	15 0	3	
14	Borealis de binis quæ in tertio spõdilo	♏20 0	Au.	18 40	4	
15	Australior de binis (sunt	♏20 10	Au.	18 0	4	
16	Quæ deinceps in quarto spondilo est	♏23 10	Au.	19 30	3	

Antares, id est cor Scorpij.

In spõdili, hoc est, internodio seu uertebro.

Рисунок 2. Фрагмент звездного каталога Альмагеста издания 1551 года.

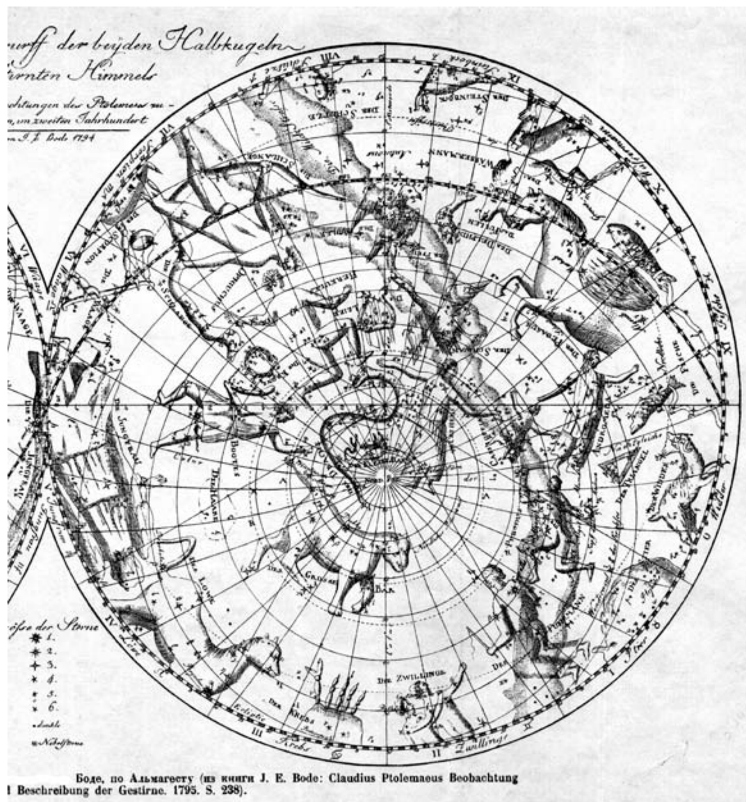


Рисунок 3. Карта северного неба, составленная в XVIII веке астрономом Боде по Альмагесту Птолемея.

Рассмотрим небесный меридиан, проходящий через полюс эклиптики P и звезду A, рис.1. Он пересекает плоскость эклиптики в точке D. Дуга QD изображает на рис.1 эклиптикальную или эклиптическую долготу l, а дуга AD - эклиптикальную широту b. С течением времени, в силу прецессии, дуга QD увеличивается, примерно на 1 градус за 70 лет. Следовательно, эклиптикальные долготы со временем равномерно возрастают.

Само понятие координат оказалось фундаментальным и привело к бурному прогрессу математики, в частности, к быстрому развитию алгебры. Например, из непосредственных астрономических наблюдений с помощью инструментов (астролябия, рис.4, армиллярная сфера, рис.5 и т.п.) проще всего определялись экваториальные координаты. Поэтому для вычисления эклиптикальных координат (например, в звездном каталоге упомянутого «Альмагеста» **Птолемея** используются именно эклиптикальные координаты) потребовалось разработать правила и формулы пересчета одних координат в другие. Задачи подобного рода вскоре привели к возникновению буквенного (символьного) исчисления в алгебре. Кроме того, начали активно развиваться стереометрия и тригонометрия.

Рис.4. Астролябия Георга Хартмана из Нюрнберга, 1532 год. Изображены как лицевая, так и оборотная стороны прибора.

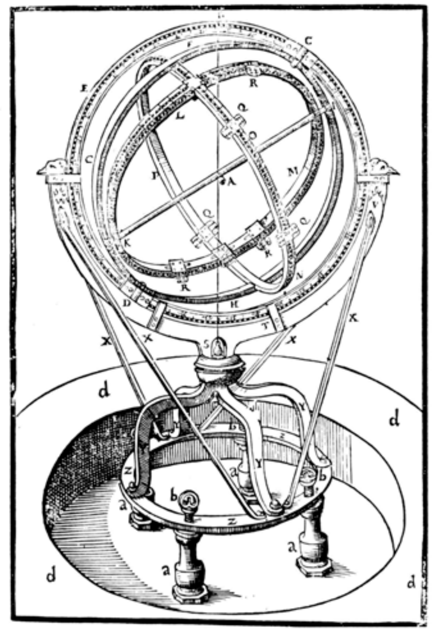


Рис.5. Армиллярная сфера, принадлежавшая Тихо Браге. 1598 год.

Понятие координат привело к быстрому совершенствованию географических карт, необходимых для освоения новых земель и управления уже известными территориями, для военного дела, для мореплавания, рис.6, путешествий, прокладки торговых путей, вообще для государственного строительства. Первоначальные географические карты были очень условны, рис.7 и содержали лишь весьма грубые очертания морей, материков, озер, рек, горных массивов. Внедрение в географическую науку координат – широт и долгот объектов на земной поверхности – позволило совершить качественный скачок и перейти к созданию детальных описаний местностей, населенных пунктов, что и привело к возникновению науки картографии.

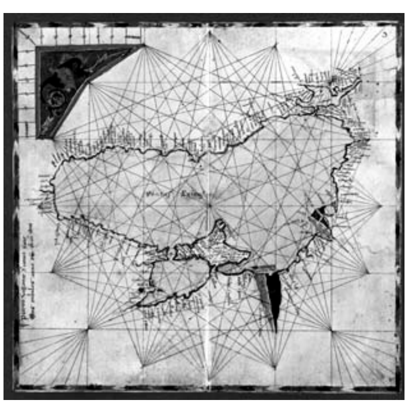


Рис.6. Старая перевернутая карта Черного моря. Портолан генуэзца Пьетро Весконте. 1318 год.

Математическое понятие координат (как евклидовых, так и более общих криволинейных) оказалось чрезвычайно полезным для целей морской навигации, в военном деле, для прокладки маршрутов, для ориентировки на местности и в море.

Изготовление точных географических карт потребовало изучения таких геометрических операций как проектирование сферы на плоскость. В «Географии» **К.Птолемея** уже описана одна из таких проекций, называемая сегодня стереографической. Более того, она не только построена, но и отмечена ее конформность, т.е. сохранение углов между кривыми, пересекающимися в точке. В XVI веке были открыты и другие методы проектирования сферы на плоскость. В частности, картограф **Г.Меркатор** пользовался несколькими такими проекциями, одна из которых называется сегодня его именем. Эти исследования положили начало важным разделам дифференциальной геометрии. Например, навигационные морские наблюдения над звездами привели к открытию «линий постоянного курса», называемых сегодня локсодромами (такие линии пересекают сетку меридианов под постоянным углом). Картографические проекции, сохраняющие площади, привели к выработке понятия унимодулярных преобразований. Известны такие картографические проекции, как цилиндрические, конические, азимутальные, псевдо-коническая равновеликая, поликоническая и др.

Рис.7. Средневековая карта Ганса Рюста. 1480 год.

Из астрономических наблюдений выросла и такая важная область математики и физики, как небесная механика, имеющая сегодня многочисленные приложения. Здесь математические методы играют ведущую роль. В основе изучения движения небесных тел – планет, астероидов, комет и т.д., лежит закон всемирного тяготения. Планеты, удаленные от Земли, рассматриваются в небесной механике как материальные точки. Таким образом, возникает математическая задача описания движения n материальных точек в поле сил тяготения (проблема n тел). В случае, когда $n>2$, эта задача очень сложна и для продвижения в этой области разработано много математических методов, в том числе и топологических. Особый интерес представляет вопрос об устойчивости системы n тел, в частности, что происходит с движением планет в Солнечной системе с течением времени.

В отдельную математическую науку, возникшую на базе астрономии, выделилась теория движения Луны и тесно связанная с ней теория лунных и солнечных затмений. Большое внимание уделялось предсказанию затмений (то есть даты затмения, траектории прохождения тени по земной поверхности, фазы затмения). Математическая теория лунных затмений оказалась несколько проще теории солнечных затмений. Поэтому сначала научились рассчитывать и предсказывать лунные затмения. Расчет солнечных затмений потребовал создания дополнительных математических методов и уточнения эмпирических констант в уравнениях движения Луны, что и было, наконец, сделано, в том числе и с опорой на более надежные астрономические наблюдения при помощи совершенствующихся астрономических инструментов. В итоге, в XVIII-XIX веках были созданы так называемые «каноны» лунных и солнечных затмений, то есть обширные таблицы, позволяющие рассчитывать будущие затмения и определять – какие затмения происходили в прошлом. Сегодня расчет затмений успешно осуществляется при помощи современных компьютерных программ.

Обогащаясь понятиями и методами, возникающими из многочисленных приложений, математика становится самостоятельной наукой. Начинается внутреннее развитие и обобщение ее основных понятий, осознается ведущая роль логического мышления и логических приемов для доказательств тех или иных математических утверждений, возникает само понятие теоремы и доказательства. Так зарождается математическая логика и как отдельная наука и как средство развития математики в целом. Возникает понятие математической модели, когда из множества тех или иных реальных процессов вычленяются те их составляющие, которые допускают сжатое математическое описание.

Архимед, изучая вопрос о рассечении шара плоскостью на два сегмента, объемы которых имеют заданное отношение, пришел к задаче о нахождении экстремума выражения x^2 (a-x) и, пользуясь фактически инфинитезимальными рассмотрениями, открыл метод решения. Фактически найденное им правило нахождения экстремума равносильно дифференцированию произведения двух функций. Кроме того, **Архимед** исследовал еще несколько задач, сводящихся к кубическим уравнениям, что привело потом к развитию как теории уравнений, так и инфинитезимальных методов.


ARCHIMEDIS DE KONOIDALIBUS ET SPEROIDIBUS FIGURIS INVENTA SEQUUNTUR.
ARCHIMEDES DOSITHEO RECTE AGERE

Рис.8. Архимед. Сочинения. Латинский перевод Jacobus Cremonese. Пергамент. 1458.

В XVII веке **Э.Торичелли** применил эти методы к задаче об экстремумах функций типа $x^m(a-x)^n$. Важные разделы математической механики выросли из таких работ **Архимеда** и его последователей, как «О равновесии плоских фигур», «О механических теоремах», «О плавающих телах», рис.8. Метод, которым была доказана теорема о равновесии рычага («соизмеримые величины уравновешиваются, если длины, на которых они подвешены, находятся в обратном отношении к тяжестям»), оказался весьма плодотворным. Кроме того, в работах этой школы началось изучение центров тяжести таких геометрических фигур, как прямоугольника, треугольника, параболического сектора и т.д. При этом, при подсчете площади параболического сектора эта фигура заполнялась более простыми фигурами и, по существу, строилась своеобразная интегральная сумма. Подобные идеи легли затем в основу понятия функции, вообще концепции переменных величин, а также интегрального и дифференциального исчисления (**Г.В.Лейбниц**, **И.Ньютон**). **Архимедом** было найдено хорошее приближение для числа π, получено неравенство: $223/71 < \pi < 22/7$. Вообще, в старинной греческой математике уже возникло и развивалось представление о построении верхних и нижних интегральных сумм, аналогичных суммам Дарбу.

В небесной механике большую роль сыграли конические сечения, изучавшиеся, например, **Аполлонием Пергским**. Различные сечения прямого кругового конуса плоскостями, не проходящими через его вершину, это – эллипсы, параболы и гиперболы, то есть действительные (нераспадающиеся) кривые второго порядка. В 1609 году вышла книга **И.Кеплера** «Новая астрономия, изложенная в исследованиях движения звезды Марс по наблюдениям благороднейшего мужа Тихо Браге», в которой были сформулированы первый и второй законы Кеплера. Первый закон: каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце. Второй закон: планеты движутся по своим орбитам с переменной скоростью так, что площади, описываемые радиус-вектором от центра Солнца до планеты, за равные промежутки времени, оказываются равными, рис.9. Потом, уже в XVII веке, обобщения теории конических сечений были развиты, в частности, **Ж.Дезаргом** (1593-1662), **Б.Паскалем** (1623-1662), **Р.Декартом** (1596-1650), **П.Ферма** (1601-1665).

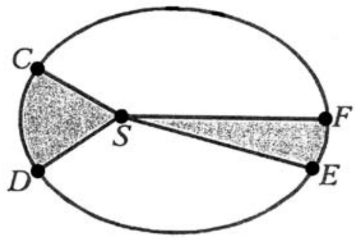


Рис.9. Второй закон Кеплера.

Развитие десятичной системы счисления было также тесно связано с развитием ростовщичества. Например, в старинных Дигестах Юстиниана (Византия) уже употребляются проценты. В частности, сказано, что если должники, платившие проценты в размере, меньшем чем 6% в год, стали должниками фиска, то они обязаны уплачивать 6% годовых того времени, как требование против них перешло к фиску.

Такие важные математические понятия как симметрия, группа (в том числе группа симметрий), автоморфизм группы, возникли на основе наблюдений за живой природой и окружающим миром (например, геометрические симметрии снежинок, рис.10, кристаллов), в искусстве, в ювелирном деле при обработке драгоценных камней. Различные виды симметрий использовались в древних орнаментах, рис.11, в архитектуре. Наблюдения за симметриями, встречающимися в живой природе и в кристаллах, привели к выработке таких важных геометрических и алгебраических понятий, как зеркальная, поворотная, переносная симметрии, группа движений, центры, оси и плоскости симметрии, правильные многоугольники и многогранники, группы собственных и несобственных вращений; были найдены все конечные группы собственных вращений в трехмерном евклидовом пространстве. Изучение, например, геометрии пчелиных сот привело к развитию теории многогранников и положило начало исследованию «замощений» плоскости и пространства конгруэнтными фигурами,

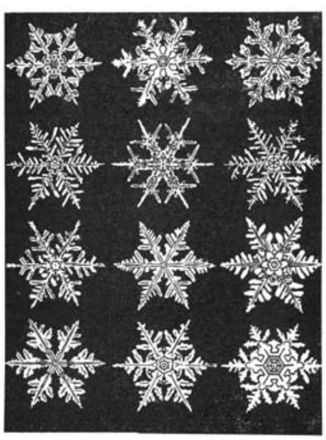


Рис.10. Различные симметричные формы снежинок.

затем – к оценкам плотности подобных замощений (плотность упаковок), имеющим разнообразные приложения в технике. Кристаллические решетки, встречающиеся в природе, положили начало, например, арифметической теории квадратичных форм и гиперкомплексных чисел.

Пифагор развил идею о музыке семи небесных сфер, по которым движутся семь планет древности: Солнце, Луна, Меркурий, Венера, Марс, Сатурн, Юпитер. Семь сфер заключены внутри восьмой сферы неподвижных звезд. При их движении возникают звуки, слагающиеся в некую мелодию, наполняющую Вселенную. Жители Земли ее не слышат, поскольку это – музыка для богов. Далее **Пифагор** обнаружил, что отношения музыкальных интервалов, созвучных друг другу, можно выразить простыми числовыми соотношениями: 1:2 соответствует октаве, 2:3 – кварте, 3:4 – квинте. Тем самым, качественные различия в звучании струн определяются отношениями их длин. Пифагорейцы считали, что законы природы можно выразить в целых и рациональных числах. Однако затем были обнаружены иррациональные числа, в частности, было доказано, что отношение диагонали квадрата к его стороне не является рациональным числом. Это был большой шаг в понимании арифметики и геометрии.

Рис.11 Примеры орнаментов, использовавшихся в греческом искусстве.

Леонардо Пизанский (**Фибоначчи**), рассматривая задачу о потомстве пары кроликов в предположении, что смертности нет и пара кроликов каждый месяц рождает новую пару, производящую кроликов через два месяца после рождения, ввел в математику числовой ряд 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + ..., именуемый сегодня рядом Фибоначчи и применяющимся, в частности, в биологии и вычислительной математике.

У истоков вариационного исчисления – одной из важнейших областей современной математики – стоит, в частности, старинная задача Дидоны, получившая потом название изопериметрической задачи. Считается, что царица Дидона, основательница города Карфагена, решила купить достаточно земли для будущей столицы и попросила у местного населения участок, который можно охватить шкурой быка. Думая, что такой участок будет невелик, жители согласились и дали шкуру. Дидона разрезала ее на узкие полоски, после чего связала их и получившейся «бечевой» окружила большую территорию, рис.12. Математическая теорема утверждает, что максимальная площадь при заданной длине ленты получится только в том случае, если очертить круг. Отсюда выросли многочисленные современные методы нахождения экстремумов различных функционалов при заданных заранее ограничениях.

Рис.12. Дидона покупает землю для основания Карфагена. Гравюра Matthaüs Merian из «Исторической Хроники» 1630 года.

Мощным стимулом для развития теории чисел стали такие сферы человеческой деятельности, как старинный индиктовый способ счета лет, создание различных календарей (юлианского, григорианского и других) и расчет дат важных религиозных праздников, в первую очередь Пасхи. Современный человек привык к большим числам. Но в старые времена, когда понимание больших чисел и даже просто умение записать их на бумаге было достоянием лишь узкого круга образованных людей, ситуация была совсем иной. Неумение древнего и средневекового человека, в своей массе, обращаться с большими числами – хорошо видно хотя бы на примере истории денежных величин. Известно, что в средние века денежные единицы были обычно гораздо крупнее, чем сегодня. А денежные суммы, исчисляемые в таких единицах – соответственно гораздо меньше, чем в наше время. Скажем, денежные жалования на Руси в XVII веке могли исчисляться 1-2 рублями или даже долей рубля в год. В XIX веке – это были уже десятки рублей в месяц, а в XX – сотни и тысячи, или даже миллионы. Далее, с XVI до XIX века в России ходили полушки, то есть четверти копеек, или 1/400 части рубля. Это существенно уменьшало масштаб чисел, выражающих денежные суммы. Масштаб денежных сумм, с которыми людям приходится иметь дело в повседневной жизни, в среднем увеличивается по мере повышения возможностей населения обращаться с большими числами.

Поэтому ранее для счета лет, наряду с их отсчетом от какого-то не очень давнего памятного события, применялся и другой, более изощренный способ. Также не требующий знания больших чисел, но вместе с тем не привязанный к конкретным событиям, а потому обеспечивающий непрерывное, без сбоев и скачков летосчисление. Причем очень долго – теоретически на протяжении приблизительно восьми тысяч лет. Такой способ находится в самой тесной связи с церковной пасхалией и юлианским календарем. Он назывался «индиктовым способом» или заданием годов «по индиктам».

Номер года задавался не одним большим числом, как сегодня, а сразу тремя маленькими числами. Числа имели собственные названия: «индикт», «круг Солнцу», «круг Луне». Каждое из них ежегодно увеличивалось на единицу, но как только достигало положенного ему предела – сбрасывалось до своего минимального значения – до единицы. А потом снова каждый год возрастало на единицу. И так далее. Таким образом, вместо одного, в принципе бесконечного счетчика лет, используемого сегодня, в индиктовом способе применялось три конечных циклических счетчика. Они задавали год тройкой небольших чисел, каждое из которых не могло выйти из предписанных ему узких границ. Это были:

- индикт, который менялся от 1 до 15 и снова сбрасывался на 1;
- круг Солнцу, который менялся от 1 до 28 и снова сбрасывался на 1;
- круг Луне, который менялся от 1 до 19 и снова сбрасывался на 1.

Летописец, использующий индиктовый способ летосчисления, мог написать, например, следующее: Данное событие произошло в индикт 14, круг Солнцу 16, круг Луне 19; а на следующий год случилось то-то и то-то в индикт 15, круг Солнцу 17, круг Луне 1; а еще через год произошли такие-то события, в индикт 1, круг Солнцу 18, круг Луне 2. И так далее.

Поскольку участвующие в индиктовом летосчислении числа-ограничители 15, 28 и 19 являются взаимно-простыми, то любое их сочетание повторяется только через число лет, равное произведению этих чисел: 7980 = 15 x 28 x 19. Таким образом, повторение индиктовой даты происходит лишь через 7980 лет. Следовательно, на отрезке времени продолжительностью почти восемь тысяч лет индиктовый способ задает год совершенно однозначно.

Индиктовый способ тесно связан с юлианским календарем, спасхалией и христианской Пасхой. Два из трех циклов, используемых в индиктовых датах – а именно, круг Солнцу и круг Луне, – связаны с юлианским календарем, его високосными годами, днями недели и разбиением на месяцы. Оба цикла имеют прямое отношение и к определению дня Пасхи, как воскресного дня после первого весеннего полнолуния. Таким образом, индиктовый способ летосчисления в значительной степени основан на пасхальных календарных величинах. Поэтому он, по своей сути, является следствием пасхалии.

Индиктовый способ летосчисления применялся в старинных текстах, например, византийских, русских. В торжественных случаях индикты указывали еще и в XVII и даже в XVIII веке, уже наряду с годами «от сотворения мира» и (или) «от Рождества Христова». Например, в выходных данных «Следованной Псалтыри» московской печати 1652 года годом издания 7160 («от Адама») и 1652 («от Рождества Христова») указан вместе с индиктом: «индикт 5». Русские тексты XVII века содержат много остатков индиктовых дат.

Теория чисел активно развивалась и при создании церковного календаря-пасхалии. Он состоит из двух частей – неподвижной и подвижной.

Неподвижная часть – это обычный гражданский календарь, называемый еще «юлианским». Год в нем состоит из 12 месяцев. В каждый четвертый год вставляется дополнительный день – 29 февраля. Такой год называется високосным. Юлианский календарь тесно связан с христианским богослужением. По числам юлианского календаря распределены так называемые «неподвижные» церковные христианские праздники. Так они именуются потому, что приходятся каждый год на одно и то же число одного и того же месяца юлианского календаря.

Подвижная часть церковного календаря определяет сроки празднования христианской Пасхи и некоторых других, отсчитываемых от Пасхи, праздников. Например, Вознесения, Троицы, начала Петрова поста. К подвижной части церковного календаря относится также счет церковных недель. Он начинается от Пасхи. Номер недели важен для текущего богослужения в христианской церкви, поскольку влияет на порядок повседневной церковной службы. Христианская Пасха и отсчитываемые от нее праздники являются подвижными церковными праздниками. Так они называются потому, что их место в юлианском календаре год от года меняется, передвигаясь в зависимости от дня христианской Пасхи. День Пасхи в числах юлианского календаря не постоянен. Он изменяется год от года по вполне определенному правилу. Это правило – «пасхалия» достаточно сложно и тесно связано с рядом астрономических понятий.

Совокупность неподвижной и подвижной частей церковного календаря и называется календарем-пасхалией или просто пасхалией. Подразумевая, что сюда входит не только правило определения Пасхи, но и обычный юлианский календарь, по отношению к которому правило действует.

Таким образом, обе части календаря-пасхалии определяют порядок церковной службы на каждый день любого года. Поэтому канонизация календаря-пасхалии имела основополагающее значение для церкви. Именно пасхалия обеспечивала единообразие церковной службы в различных местах. Таким образом, она являлась одной из основ единства церковного богослужения. Пасхальные таблицы и таблицы дат первых весенних астрономических полнолуний рассчитываются по специальным математическим формулам, например, по формулам **Гаусса**. Например, в старинных русских церковных книгах пасхалия представлена как набор таблиц, определяющих, в частности, дату празднования православной Пасхи для любого наперед заданного года. Отсюда и название –

пасхалия. Отметим важное обстоятельство: пасхалия основана на предположении, что все календарные показатели, используемые для определения дня христианской Пасхи, в точности повторяются через каждые 532 года. Этот период повторения Пасхи, а также – индикта, круга Солнцу, круга Луне, – в юлианском календаре называется «великим индиктионом». Полные пасхальные таблицы содержат обширный перечень разнообразных календарных величин на весь 532-летний «великий индиктион».

Математическая часть этих исследований сводится к решению в целых числах неопределённых уравнений первой степени. Общая теория диофантовых уравнений первой степени была построена **Баше де Мезириаком** (1587-1638). В 1621 году он издал сочинения **Диофанта** со своими комментариями. Общую теорию диофантовых уравнений второй степени разрабатывали многие выдающиеся ученые: **П.Ферма**, **Дж.Валлис**, **Л.Эйлер**, **Ж.Лагранж**, **К.Гаусс**. К началу XIX века было в основном изучено общее неоднородное уравнение второй степени с двумя неизвестными и целыми коэффициентами.

В Древней Руси использовалась система числовых знаков, основанная на славянском алфавите. Славянская нумерация в русской математической литературе встречается до начала XVII века, но с конца XVI века вытесняется десятичной позиционной системой. Сложная задача вычисления пасхалий решается, например, в старинном математическом труде новгородского монаха Кирика. **В.Н.Татищев**, историк XVIII века, сообщает о наказе Ивана IV Грозного писцам – как следует измерять землю (XVI век). В частности, царь Иван IV предложил Стоглавому Собору переписать размеры вотчинных и поместных владений, а также сделать новую разверстку, чтобы каждый получил по достоинству. Активное развитие на Руси артиллерийского и вообще оружейного и морского дела, картографии, финансовых операций, потребовали серьезных арифметических и геометрических познаний. Сохранился русский «Устав ратных, пушечных и других дел, касающихся до воинской науки», относящийся к 1607-1621 годам. В нем излагаются геометрические сведения применительно к расчету расстояний для стрельбы. В геометрической рукописи 1629 года «Книга сошного письма» обсуждается «земное верстание», приведены правила вычисления площадей, рис.13. Своеобразные арифметические расчеты зафиксированы в древнем русском юридическом сборнике «Русская правда», связываемого с именем Ярослава Мудрого. В начале XVII века в Киеве была создана Духовная Академия, где в рамках физики преподавались арифметика и геометрия.

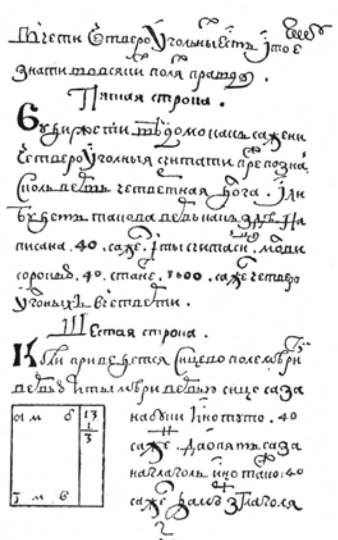


Рис.13. Страница старо-русской геометрической рукописи. Отдел Рукописей библиотеки им.В.И.Ленина.

Математические русские рукописи конца XVI - XVII века содержат также арифметические операции с целыми числами, правила действий с дробями, решение уравнений первой степени с одним неизвестным. Рассматривается много примеров практического использования общих правил, излагается дощаный счёт - прототип русских счётов. В 1703 году напечатана ставшая широко известным учебником «Арифметика» **Леонтия Магницкого** (1669-1793). В «Арифметике» помимо собственно арифметических разделов были подробно описаны алгебраические, геометрические, тригонометрические, метеорологические, астрономические и навигационные сведения, рис.14.

Рис.14. Страница из «Арифметики» Магницкого.

В XVI веке математики постепенно переходят от словесного описания алгебраических уравнений и операций к символьной алгебре, то есть «словесная алгебра» превращается в «символьную». Первоначально символы получались путем сокращения слов; потом этот процесс пошел быстрее, так как было понято – насколько эффективнее становятся на этом языке математические рассуждения и доказательства. Единую систему алгебраических символов первым дал, вероятно, **Ф.Виета** (1540-1603).

3. МАТЕМАТИКА XVII ВЕКА И ПОСЛЕДУЮЩИХ СТОЛЕТИЙ.

Начиная с XVII века, в математику активно внедряются идеи движения и изменения, вырабатывается современное понятие функции, функционала, переменных величин, функциональной зависимости. Их изучение приводит к таким основным понятиям математического анализа, как – бесконечные процессы, предел, производная, дифференциал и интеграл. Возникает анализ бесконечно малых, дифференциальное и интегральное исчисление. В первую очередь успехи в этой области связаны с именами **И.Ньютона** (1642-1727) и **Г.В.Лейбница** (1646-1716). Именно **И.Ньютон** ввел специальный термин limes (предел). Фундаментальные законы механики, физики, химии, астрономии записываются в виде дифференциальных уравнений, интегрирование которых (то есть поиск решений) становится одной из важнейших задач. В XVII веке математики обнаружили, что большое число самых разных задач механики и физики сводится к квадратурам, то есть к интегрированию. Возникает понятие функционала, определенного на пространстве функций, вариаций функционала и экстремальных функций, подчиненных разного рода граничным условиям. Эта область исследований получает название вариационного исчисления. Решением вариационных уравнений являются экстремальные функции и отображения многомерных областей.

Идеи движения и преобразования фигур меняют облик геометрии. Начинают изучаться группы движений и преобразований. Большое внимание уделяется проективной геометрии, особенно развившейся в XVIII-XIX веках. Возникновение в XVII веке аналитической геометрии, использование различных систем координат, позволило связать геометрические объекты с алгебраическими и аналитическими методами. Происходит проникновение геометрических идей в алгебру и анализ – многие алгебраические и аналитические факты изображаются геометрически.

В алгебре XVII-XVIII веков активно изучаются методы решений уравнений вида F(x)=0, исходя из представления F(x) как функции переменного аргумента x. Исследуется число действительных корней, методы их отделения и приближённого вычисления. Особое внимание уделяется случаю, когда F – полином. Голландец **И.Гудде** (1628-1704) обнаружил правило поиска кратных корней алгебраических уравнений путем отыскания наибольшего общего делителя исходного уравнения и его производной. Французский математик **Ж.Д'Аламбер** (**Даламбер**) (1717-1783) достаточно убедительно обосновал существование у любого алгебраического уравнения хотя бы одного комплексного корня. В дальнейшем этот факт был строго доказан и получил условное название «основной теоремы алгебры». В XVII-XVIII веках в области «чистой» алгебры получено решение произвольных систем линейных уравнений при помощи определителей, разработана теория делимости многочленов, исключения неизвестных и т.д. Еще в XVI веке в работах **Дж.Кардано** (1501-1576) и **Н.Тарталья** (1500-1557) была открыта формула для нахождения корней кубического уравнения. Уже в то время были разработаны численные методы для приближенного нахождения корней алгебраических уравнений любой степени.

В XVIII веке, наряду с математическими центрами в Западной Европе, одним из основных центров математических исследований становится Петербургская академия наук, где работал ряд крупнейших математиков того времени иностранного происхождения, в частности, **Л.Эйлер** (1707-1783), **Д.Бернулли** (1700-1782) и **Н.Бернулли** (1695-1726), сыновья **И.Бернулли** (1667-1748). На этой основе постепенно складывается новая русская математическая школа, вскоре блестяще развернувшая свои исследования (**Котельников**, **Румовский**, **Фусс**, **Головин**, **Сафронов**). Научное наследие **Л.Эйлера** очень велико (более 850 сочинений, из которых 40 больших).

В XVII веке начинается новый этап математического естествознания, нацеленный на открытие математически формулированных законов природы. Например, **Г.Галилей** (1564-1642) открывает законы падения тел, **И.Кеплер** (1571-1630) – законы движения планет, **И.Ньютон** (1642-1727) – закон всемирного тяготения. Развиваются математические разделы оптики (**Г.Галилей**, **И.Ньютон**, **И.Кеплер**, **Г.Гюйгенс** (1629-1695), **Р.Гук** (1635-1703)). В XVII веке значительное внимание уделяется также философской идее универсальности математического метода (**Р.Декарт** (1596-1650)), **Б.Спиноза** (1632-1677), **Г.В.Лейбниц** (1646-1716)).

Новые важные математические задачи возникают в XVII веке из требований навигации, необходимости усовершенствования часового дела и создания точных хронометров, из картографии, гидравлики, баллистики и вообще военного дела.

В XVII веке открыты логарифмы (**Дж.Непер** (1550-1617)). Еще у **Архимеда** была запись последовательных степеней одного основания и фактически высказано утверждение, эквивалентное: $(a^m)(a^n)=a^{(m+n)}$. Одна из первых таблица логарифмов составлена **И.Бюрги** (1552-1632). В 1637 году **Р.Декарт** в своей «Геометрии» излагает координатный метод в геометрии, классифицирует кривые с подразделением их на алгебраические и трансцендентные. Эта книга по аналитической геометрии сыграла большую роль в развитии математики XVII века. **Ф.Лагир** (1640-1718) нашел способ писать уравнения поверхностей. Исследуются действительные корни уравнения $F(x) = 0$ любой степени (**Р.Декарт**, **И.Ньютон**, **М.Ролль** (1652-1719)). **П.Ферма** исследует вопрос о максимумах и минимумах и построении касательных к кривым, фактически используя приёмы дифференциального исчисления.

И.Кеплер и **Б.Кавальери** (1598-1647) вычисляют объемы тел вращения, фактически используя анализ бесконечно малых величин и создавая начала дифференциального и интегрального исчисления. В создании анализа бесконечно малых участвовали также **Г.Галилей**, **Е.Торричелли** (1608-1647), **Б.Паскаль** (1623-1662), **Дж.Валлис** (1616-1703), **Ж.Роберваль** (1602-1675), **П.Ферма**, **Р.Декарт**, **Дж.Барроу** (1630-1677). Идея общего метода неделимых высказана **Б.Кавальери** в 1621 г.

В XVII веке многие математики активно изучают бесконечные ряды, начиная с простейших (типа геометрической прогрессии), и переходя к степенным разложениям важных функций математического анализа (**Дж.Валлис**, **И.Ньютон**, **Х.Гюйгенс**. **Г.В.Лейбниц**, **Я.Бернулли** (1654-1705) и др.). Все более активно обсуждаются комплексные числа, возникающие в алгебраических задачах.

В конце XVII века **И.Ньютон** и **Г.Лейбниц** открывают дифференциальное и интегральное исчисление. Основные результаты **И.Ньютон** получил в 1665-1666 годах. Систематическое изложение своей теории **И.Ньютон** дал в 1670-1671 годах в сочинении «Метод флюксий», изданном в 1736 году. **Г.Лейбниц** начал свои исследования по анализу бесконечно малых в 1673 году. В 1682-1686 годах **Г.Лейбниц** опубликовал основные идеи в ряде статей. **И.Ньютон** и **Г.Лейбниц** в общем виде рассмотрели операции дифференцирования и интегрирования функций, установили связь между этими операциями (формула Ньютона-Лейбница). Подходы у **И.Ньютона** и **Г.Лейбница** были различны, однако в целом они привели к возникновению развитой математической области с многочисленными приложениями. На этой основе начинаются активные исследования многих математиков над дифференциальным и интегральным исчислением, интегрированием дифференциальных уравнений и геометрическими приложениями анализа.

В XVII веке продолжаются открытия в области теории чисел (**Б.Паскаль**, **П.Ферма**), возникают основные понятия комбинаторики (**П.Ферма**, **Б.Паскаль**, **Г.Лейбниц**), начинаются исследования по теории вероятностей (**П.Ферма**, **Б.Паскаль**), а в конце века **Я.Бернулли** открывает одну из форм закона больших чисел. **Б.Паскаль** и **Г.Лейбниц** создают счётные машины. Вероятно, самая ранняя машина была сделана **В.Шиккардом** (1592-1635) в 1623 году. **Б.Паскаль** создал первый арифмометр.

В XVIII веке математики по-прежнему активно работают в математическом естествознании и в области технических применений. **Л.Эйлер** занимается вопросами кораблестроения и оптики, **Ж.Лагранж** (1736-1813) создаёт основы аналитической механики, **П.Лаплас** (1749-1827) работает также в области астрономии и физики. Благодаря исследованиям **Л.Эйлера**, **Ж.Лагранжа** и **А.Лежандра** (1752-1833) активно развивается теория чисел. **Ж.Лагранж** дал общее решение неопределённых уравнений второй степени. **Л.Эйлер** установил закон взаимности для квадратичных вычетов. Он же привлёк для изучения простых чисел дзета-функцию, чем положил начало аналитической теории чисел. В частности, **Л.Эйлер** доказал иррациональность числа *е*. В алгебре **Г.Крамер** (1704-1752) ввёл для решения систем линейных уравнений определители. В работах **Л.Эйлера** фактически появился метод производящих функций. Впоследствии он нашел широкое применение в теории чисел, комбинаторном анализе, теории вероятностей. В теории чисел он был развит **И.М.Виноградовым** (1891-1983), **Г.Харди** (1877-1947), **Дж.Литлвудом** (1885-1977). Чешский ученый **Б.Больцано** (1781-1848) во многом опередил работы **О.Коши** (1789-1857) и **К.Вейерштрасса** (1815-1897) в области обоснования анализа. В частности, он построил пример непрерывной функции, не имеющей конечной производной ни в одной точке. В XIX веке в Париже, в Политехнической школе, возникает большой коллектив выдающихся ученых.

А.Муавр (1667-1754) и **Л.Эйлер** открыли формулы, связывающие показательные и тригонометрические функции комплексных аргументов . **И.Ньютон**, **Дж.Стирлинг**, **Л.Эйлер** и **П.Лаплас** заложили основы исчисления конечных разностей. В 1715 году **Б.Тейлор** (1685-1731) открыл формулу разложения функции в степенной ряд. Ряды Тейлора и **Маклорена** (1698-1746) стали играть заметную роль в дифференциальном исчислении. С **Ж.Д'Аламбера** (**Даламбера**) началось изучение условий сходимости рядов. **Л.Эйлер**, **Ж.Лагранж**, **А.Лежандр** заложили основы исследования эллиптических интегралов. Большое внимание уделялось дифференциальным уравнениям. **Л.Эйлер** дал метод решения линейного дифференциального уравнения любого порядка с постоянными коэффициентами, **Ж.Д'Аламбер** рассматривал системы дифференциальных уравнений, **Ж.Лагранж** и **П.Лаплас** развивали общую теорию линейных дифференциальных уравнений любого порядка. **Л.Эйлер**, **Г.Монж** (1746-1818) и **Ж.Лагранж** заложили основы общей теории дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка, а **Л.Эйлер**, **Г.Монж** и **П.Лаплас** – второго порядка. Начинается изучение разложения функций в тригонометрические ряды. В XVIII веке возникает вариационное исчисление, созданное **Л.Эйлером** и **Ж.Лагранжем**. **А.Муавр**, **Я.Бернулли**, **П.Лаплас** заложили начала теории вероятностей.

Л.Эйлер, **А.Клеро** (1713-1765), **Г.Монж** и **Ж.Менье** (1754-1793) заложили основы дифференциальной геометрии пространственных кривых и поверхностей. **И.Ламберт** (1728-1777) развил теорию перспективы, а **Г.Монж** – начертательную геометрию.

В XIX веке новые математические методы проникли в физику, механику, оптику, в теорию электрических, магнитных и тепловых явлений, в теорию сплошных непрерывных сред, в разные области техники: артиллерия, паровые машины, техника строительства и т.д.

В XIX веке **Н.Абель** (1802-1829) доказал неразрешимость в радикалах общего алгебраического уравнения пятой степени. **О.Коши** создал теорию функций комплексного переменного. **О.Коши** впервые ввел бесконечно малую величину как переменную, стремящуюся к нулю и изучил вопросы сходимости бесконечных рядов. Он же отметил, что сумма ряда Тейлора функции может отличаться от исходной функции.

Одним из самых ярких достижений математики XIX века было открытие неевклидовой геометрии, называемой сегодня геометрией Лобачевского или гиперболической геометрией. Проблема параллельных прямых на плоскости уходит корнями в древность. **Аристотель** создал теорию дедукции, т.е. логического вывода. По этой схеме всякая дедуктивная наука должна начинаться с основных понятий, не подлежащих определению (т.е. опирающихся на человеческий опыт), и аксиом – основных истин, не подлежащих доказательству. Все остальное должно получаться логическим выводом из аксиом. В геометрии эта идея была проведена **Евклидом**, сформулировавшим аксиомы и постулаты, рис.15. По мнению Евклида (в его известных «Началах») постулаты – это принимаемые заранее геометрические факты, из которых выводятся дальнейшие логические следствия. **Евклид** выдвинул пять таких постулатов. Особое внимание математиков привлек пятый постулат: если при пересечении двух прямых третьей сумма внутренних односторонних углов оказалась меньше двух прямых, то эти прямые при их продолжении пересекутся с той стороны, где эта сумма меньше двух прямых. Если первые четыре постулата казались очевидными, то пятый таковым не был. Поэтому математики стали пытаться доказать его, например, вывести из первых четырех постулатов, или же заменить другой аксиомой, более простой. В частности, многие пытались доказать пятый постулат методом от противного, т.е. исходя из предположения, что он неверен, получали отсюда логические следствия в надежде вскоре обнаружить противоречие. Наиболее далеко в этом направлении, но все-таки без окончательного результата, продвинулись **Джироламо Саккери** (1667-1733) и **Иоганн Генрих Ламберт** (1728-1777). При этом они не понимали, что кроме евклидовой геометрии могут существовать и другие непротиворечивые геометрии, в которых форма пятого постулата будет иной.

Рис.15. Евклид. Сочинения. Латинский перевод. Пергамент. 1458.

Наконец, **Н.И.Лобачевский** (1792-1856) открыл новую геометрию, в которой пятый постулат заменен следующим утверждением: в плоскости через точку, не принадлежащую прямой, можно провести более одной прямой, не пересекающейся с данной. Первое публичное изложение своей геометрии **Н.И.Лобачевский** сделал 23 февраля 1826 года на физико-математическом факультете Казанского Университета. Первая публикация - в 1826 году в журнале «Казанский Вестник». Независимо от **Лобачевского** существование такой геометрии обнаружили **Карл Фридрих Гаусс** (1777-1855) и **Янош Бойяи** (**Больяи**) (1802-1860). Однако **Гаусс**, осознавая радикальную новизну новой геометрии и опасаясь критики в свой адрес, не опубликовал своих идей. Публикация **Бойяи** на эту тему датируется 1832 годом, т.е. несколькими годами позже публикации **Н.И.Лобачевского**, причем у **Бойяи** были развиты лишь первые понятия гиперболической геометрии. К открытию неевклидовой геометрии был также близок **Франц Адольф Тауринус** (1794-1874), но его небольшая брошюра (1826) не получила признания, и он сжег оставшиеся экземпляры и более никогда к этой теме не возвращался.

Работы **Лобачевского** получили признание далеко не сразу. Лишь в 60-х годах XIX века, в частности, после публикации переписки **Гаусса**, открытие **Лобачевского** стали широко известными. Вопрос о логической непротиворечивости геометрии Лобачевского был положительно решен только в 1868 году, когда **Э.Бельтрами** (1835-1900) обнаружил поверхность вращения в трехмерном пространстве, реализующую на себе геометрию Лобачевского. Эта поверхность получается вращением трактрисы (линии погони) вокруг ее асимптоты. После этого гиперболическая геометрия приобретает особо большое значение, ее методы начинают применяться в теории чисел, теории функций, теории дифференциальных уравнений, в математической физике, в космологии. Идеи **Лобачевского** радикально изменили взгляд математиков на геометрию и породили новые фундаментальные области математики.

Важная область вариационного исчисления – теория минимальных поверхностей выросла из работ физика **Жозефа Плато** (1801-1883). Он начал опыты по изучению конфигурации мыльных пленок. под названием «проблема Плато». Опыты **Плато** заключались в конструировании мыльных пленок, затягивающих проволочные контуры. При извлечении замкнутого контура из мыльного раствора на нем образуется радужная мыльная пленка, ограниченная контуром. Физический принцип, лежащий в основе возникновения мыльных пленок, очень прост: физическая система сохраняет свою конфигурацию только в том случае, когда она не может легко изменить ее, заняв положение с меньшим значением энергии. Энергия мыльной пленки пропорциональна ее площади. Поэтому жидкая пленка превращается в эластичную поверхность, стремящуюся минимизировать свою площадь, и следовательно, энергию натяжения, приходящуюся на единицу площади.

Математической моделью мыльной пленки служит минимальная поверхность, то есть поверхность локально минимальной площади (поверхность нулевой средней кривизны), затягивающая данный контур. Математическая теория таких поверхностей относится к вариационному исчислению – области анализа, возникшей в XVIII веке. В XX веке для развития теории минимальных поверхностей были привлечены методы топологии и дифференциальной геометрии. На один и тот же контур иногда можно натянуть несколько разных минимальных поверхностей, рис.16. Если усложнить контур, то не только может нарушиться единственность минимальной поверхности, но и сама ее структура может усложниться. Появляются особые точки, в окрестности которых поверхность имеет более сложную структуру, рис.17, рис.18, рис.19.

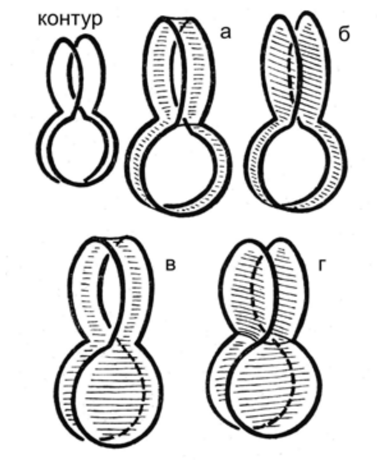


Рис.16.Несколько минимальных поверхностей, затягивающих один и тот же граничный контур.

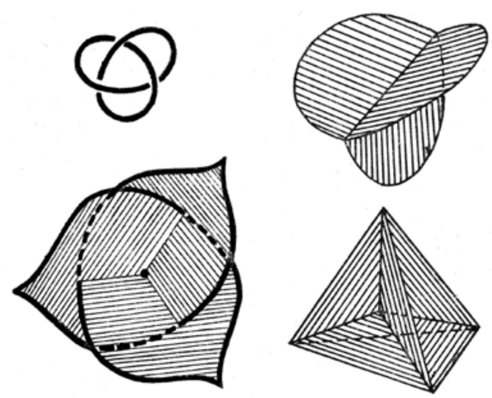


Рис.17. Если граничный контур достаточно сложный, то на минимальной поверхности (на мыльной пленке) появляются сингулярности.

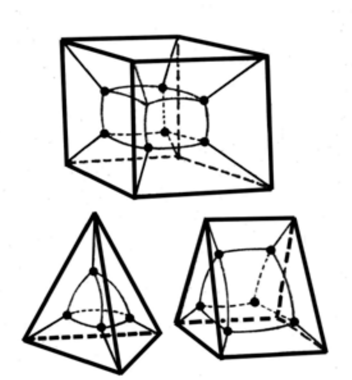


Рис.18. Чем сложнее граничный контур, тем больше может быть особенностей у мыльной пленки. Здесь есть также участки положительной средней кривизны.

Минимальные поверхности широко распространены в природе. Например, как наиболее экономные поверхности, формирующие скелеты некоторых живых организмов. Пример – скелеты радиолярий, микроскопических морских животных, состоящих из комочков протоплазмы, заключенных в пенообразные формы, наподобие мыльных пузырей и пленок. Концентрация жидкости вдоль «ребер ветвления» поверхностей приводит к тому, что твердые фракции морской воды и соли оседают здесь и образуют твердый скелет животного, рис.20. Примерами минимальных поверхностей могут служить мембраны в живых организмах.

В 30-е и 40-е годы XX века был достигнут большой прогресс в изучении двумерных минимальных поверхностей в трехмерном пространстве. Обычно «проблема Плато» формулируется так: верно ли, что на любой замкнутый контур можно натянуть минимальную поверхность? И если «да», то – сколько таких поверхностей, и каковы их топологические свойства? Важные результаты в этом направлении были получены **Д.Дугласом** (1897-1965), **Т.Радо** (1895-1965), **Р.Курантом** (1888-1972) и др. В частности, было доказано, что для любого достаточно хорошего одномерного замкнутого контура всегда существует минимальная поверхность в трехмерном пространстве, затягивающая этот контур, причем ее площадь не превышает площади любой другой поверхности, затягивающей этот же контур. Затем математики перешли к «многомерной проблеме Плато». То есть когда рассматриваются «многомерные контуры» -замкнутые компактные многообразия. Проблема: на любой ли «многомерный контур» можно натянуть минимальную поверхность (на единицу большей размерности) наименьшей возможной площади? Эта «многомерная задача» связана с приложениями как в математике, так и в механике, математической физике. Начиная с 60-х годов XX века в этой области произошел существенный скачок, связанный с такими именами, как: **Г.Федерер**, **В.Флеминг**, **М.Миранда**, **Е.Р.Райфенберг**, **Ч.Морри**, **Е.Бомбьери**, **Ф.Альмгрен**, **де Джиорджи**, **Дж.Саймонс**, **Г.Лоусон** и многие другие. Выяснилось, что в многомерном случае требуется сначала «правильно сформулировать» понятие границы и минимальной поверхности, затягивающей эту границу. Для этого был привлечен язык теории гомологий, что позволило доказать теорему существования глобально минимальной минимальной поверхности для заданного "гомологического контура" (**Е.Р.Райфенберг**, **Г.Федерер** и др.).

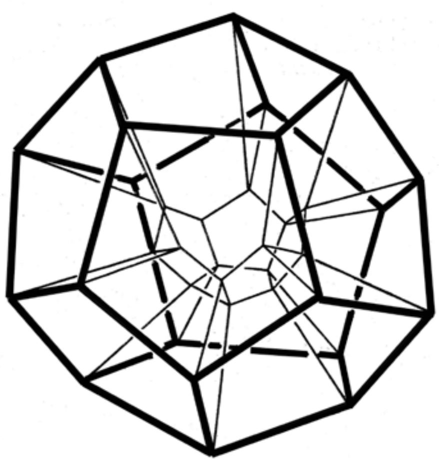


Рис.19. Пример сложной минимальной поверхности.

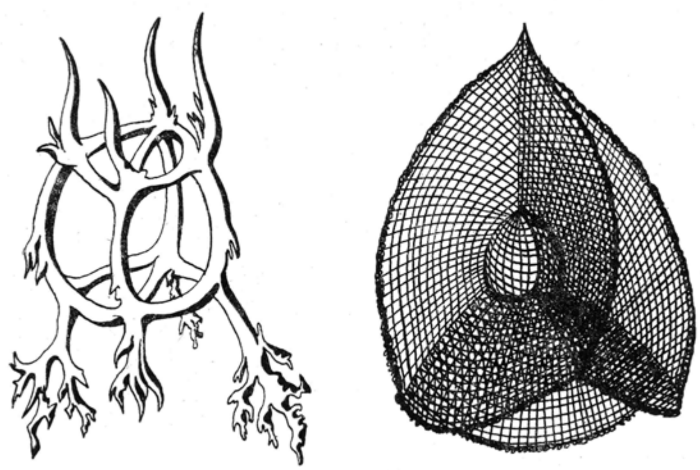


Рис.20. Скелеты радиолярий, наглядно показывающие структуру ребер и точек ветвления минимальных поверхностей.

Теория групп восходит к рассмотрению **Ж.Лагранжем** групп подстановок в связи с проблемой разрешимости в радикалах алгебраических уравнений. **Э.Галуа** (1811-1832) при помощи теории групп подстановок дал окончательный ответ на вопрос об условиях разрешимости в радикалах алгебраических уравнений любой степени. В XIX веке **А.Кэли** (1821-1895) дал общее определение группы. **С.Ли** (1842-1899) разработал, исходя из общих проблем геометрии, теорию непрерывных групп. Отсюда затем выросла такая важная область современной математики, как теория групп и алгебр Ли, и их представлений. Затем **Е.С.Фёдоров** (1851-1909) и А.**Шёнфлис** (1853-1928) независимо друг от друга обнаружили, что теоретико-групповым закономерностям подчинено строение кристаллов. Они обнаружили 230 пространственных групп симметрий. Теория групп становится мощным средством исследования в квантовой физике.

Для решения важных вопросов механики и физики создаются векторное и тензорное исчисления. Математическое понятие тензора проникает в самые разные разделы геометрии и алгебры. В функциональном анализе быстро развивается теория тензорных представлений, связанная с бесконечномерными пространствами и теорией операторов. Исходя из проблем математической физики, возникают новые алгебраические и геометрические понятия, например, алгебры с некоммутативным или даже неассоциативным умножением.

Стоит отметить принципиально новый эффект, возникший в математике XIX веке и связанный, в частности, с открытием геометрии Лобачевского. Была осознана возможность и необходимость пересмотра устоявшихся традиций и создания существенно новых математических теорий и концепций.

В XIX веке большое внимание стало уделяться обоснованию и критическому анализу основных положений математики и построению строгой системы аксиом, определений и доказательств, а также исследованию логических приёмов, употребляемых при доказательствах. Работы по строгому обоснованию различных разделов математики занимают значительное место в XIX-XX веках. На этом пути, в частности, математически оформилось операционное исчисление, уже активно применявшееся в механике и электротехнике. Было построено логически безупречное изложение математической теории вероятностей. Однако даже в настоящее время ещё отсутствует строгое обоснование некоторых математических методов, применяющихся в современной теоретической физике, где много ценных результатов получается при помощи «незаконных» математических приёмов.

Для широкого класса прикладных и математических проблем создаётся строго определённый рецепт их вычислительного решения, возникает понятие математического алгоритма. Огромная роль здесь принадлежит математической логике. Вопросы поиска «кратких алгоритмов» всегда занимали важное место в математике. В XX веке, в результате развития математической логики возникла общая теория алгоритмов и «алгоритмической разрешимости» математических проблем. Практические перспективы этих теорий весьма велики, особенно в связи с современным развитием вычислительной техники.

В XIX-XX веках развитие математики начинает стимулироваться также электродинамикой, теорией магнетизма и термодинамикой. Развиваются важнейшие разделы механики непрерывных сред. Гидродинамика несжимаемой идеальной жидкости была создана ещё в XVIII веке **Д.Бернулли**, **Л.Эйлером**, **Ж.Д'Аламбером** и **Ж.Лагранжем**. В XIX веке возникает необходимость разработки математических теорий для вопросов термодинамики паровых машин, технической механики, баллистики. Активно разрабатывается теория дифференциальных уравнений с частными производными и особенно теория потенциала. В этом направлении работает большинство крупных аналитиков начала и середины XIX века - **К.Гаусс**, **Ж.Фурье** (1768-1830), **С.Пуассон** (1781-1825), **О.Коши**, **П.Дирихле** (1805-1859), **Дж.Грин** (1793-1841), **М.В.Остроградский** (1801-1862). **Гаусс** и **Грин** создали общую постановку теории потенциала. В частности, этому посвящена книга **Грина** «Исследования по математической теории электричества и магнетизма». **М.В.Остроградский** заложил основы вариационного исчисления для функций нескольких переменных. В результате исследований по уравнениям математической физики в работах **Дж.Стокса** (1819-1903) и других английских математиков возникает векторный анализ. **Ж.Фурье** в исследованиях по аналитической теории тепла начал представлять функции в виде рядов, получившие потом название рядов Фурье и сыгравших важную роль в анализе и теории дифференциальных уравнений.

П.Лаплас и **С.Пуассон** создают новый мощный аналитический аппарат теории вероятностей. **П.Л.Чебышев** (1821-1894) даёт строгое обоснование элементов теории вероятностей и доказывает свою знаменитую теорему объединившую в одной общей формулировке известные ранее формы закона больших чисел.

К.Гаусс опубликовал первое доказательство основной теоремы алгебры, но сначала - в чисто действительных терминах, как разложимость действительного многочлена на действительные множители первой и второй степени. Лишь позднее К.Гаусс явно изложил теорию комплексных чисел. Возникает теория функций комплексного переменного. Общие основы теории были заложены **О.Коши**, теория эллиптических функций была развита **Н.Абелем** и **К.Якоби**.

Геометрический характер теории функций комплексного переменного начинает играть большую роль у **Б.Римана** (1826-1866). Обнаруживается, что естественным геометрическим носителем аналитической функции в случае её многозначности является не плоскость комплексного переменного, а риманова поверхность, соответствующая данной функции. Ее можно изобразить двумерной поверхностью, снабженной римановой метрикой. **К.Вейерштрасс** достигает той же общности, что и **Б.Риман**, оставаясь на почве чистого анализа. Геометрические идеи **Б.Римана** оказываются в дальнейшем большое влияние, в том числе и в области теории функций комплексного переменного.

Начиная с 1854 года, **П.Л.Чебышев**, исходя из запросов теории механизмов, создает теорию наилучших приближений.

В алгебре (после доказательства неразрешимости в радикалах общего уравнения пятой степени, полученного **П.Руффини** (1765-1822) и **Н.Абелем**) **Э.Галуа** показал, что вопрос о разрешимости уравнений в радикалах зависит от свойств связанной с уравнением группы Галуа. Активное развитие теории групп начинается после работ **К.Жордана** (1838-1922). В работах **Э.Галуа** и **Н.Абеля** возникает понятие поля алгебраических чисел, приведшее к созданию алгебраической теории чисел. **К.Гаусс** разрабатывает теорию представимости чисел квадратичными формами, **П.Л.Чебышев** получает основные результаты о плотности расположения в натуральном ряде простых чисел. **П.Дирихле** доказывает теорему о существовании бесконечного числа простых чисел в арифметических прогрессиях и т.д.

Дифференциальная геометрия поверхностей создаётся **К.Гауссом** и **К.М.Петерсоном** (1818-1881). Развивается проективная геометрия (**Ж.Дезарг**, **Ж.Понселе** (1788-1867), **Я.Штейнер** (1796-1863), **К.Штаудт** (1798-1867) и др.). **Ю.Плюккер** (1801-1868) строит геометрию, рассматривая в качестве основных элементов прямые. **Г.Грассман** (1809-1877) создаёт аффинную и метрическую геометрию n-мерного векторного пространства.

Постепенно стало понятно, что для внутренней геометрии поверхности вовсе не обязательно, чтобы поверхность была расположена в трехмерном евклидовом пространстве. Важно лишь наличие метрики на поверхности, позволяющей измерять длины кривых и углы между ними в точках пересечения. **Б.Риман** формулирует концепцию n-мерного многообразия с геометрией, определяемой дифференциальной квадратичной формой. Этим было положено начало общей дифференциальной геометрии n-мерных многообразий. **Б.Риману** принадлежат и первые идеи в области топологии многомерных многообразий.

В XIX веке **Ф.Клейн** (1849-1925) находит модель неевклидовой геометрии Лобачевского, что окончательно устанавливает её непротиворечивость. **Ф.Клейн** предлагает изучать всё разнообразие построенных к этому времени «геометрий» с точки зрения инвариантов той или иной группы преобразований. Эта концепция развита **Ф.Клейном** в его речи, прочитанной в 1872 году в Эрлангене и получившей потом название «Эрлангенской программы Ф.Клейна». Еще в 1866 году **Г.Гельмгольц** (1821-1894) рассматривал движение как основное понятие геометрии. Исследования по обоснованию анализа получают фундамент в виде строгой теории иррациональных чисел (**Р.Дедекинд** (1831-1916), **Г.Кантор** (1845-1918) и **К.Вейерштрасс**). Именно в работах **Г.Кантора** закладываются основы общей теории множеств. Он ввел понятия мощности множества, предельной точки, производного множества, высказал континуум-гипотезу. В 1899 году выходит в свет известная книга **Д.Гильберта** (1862-1943) «Основания геометрии». В 1900 году **Д.Гильберт** на II Международном конгрессе математиков в Париже сформулировал 23 проблемы математики, ставшие потом известными как «проблемы Гильберта». Они оказали существенное влияние на развитие математики во многих ее областях.

Возникает теория конструктивного решения математических задач средствами математической логики. Основы математической логики создаются в XIX веке **Дж.Булем** (1815-1864), **П.С.Порецким** (1846-1907), **Э.Шредером** (1841-1902), **Г.Фреге** (1848-1925), **Дж.Пеано** (1858-1932) и др. Создана теория доказательств **Д.Гильберта**. **Л.Брауэр** (1881-1961) и его последователи создают интуиционистскую логику. **Э.Куммер** (1810-1893), **Л.Кронекер** (1823-1891), **Р.Дедекинд**, **Е.И.Золотарёв** (1847-1878) и **Д.Гильберт** закладывают основы современной алгебраической теории чисел. **Ш.Эрмит** (1822-1901) доказывает трансцендентность числа "е", а **Ф.Линдеман** (1852-1939) - трансцендентность числа "пи". **Ж.Адамар** (1865-1963) и **Ш.Валле-Пуссен** (1866-1962) завершают исследования **П.Л.Чебышева** о законе убывания плотности расположения простых чисел в натуральном ряду. **Г.Минковский** (1864-1909) вводит в теоретико-числовые исследования геометрические методы. В России работы по теории чисел блестяще развивают также **А.Н.Коркин** (1837-1908), **Г.Ф.Вороной** (1868-1908) и **А.А.Марков** (1856-1922). Основные работы **Л.Кронекера** относятся к алгебре и теории групп, он пропагандировал арифметизацию математики и говорил, что целые числа создал Бог, а все остальное – дело рук человеческих.

В алгебре развиваются теория групп, полей, колец и т.д. Теория групп применяется, в частности, в кристаллографии и квантовой физике. Теория групп и алгебр Ли проникает во многие отрасли математики.

Развиваются дифференциальная геометрия и алгебраическая геометрия. Геометрия поверхностей в трёхмерном евклидовом пространстве систематически изучается работах **Э.Бельтрами**, **Г.Дарбу** (1842-1917) и др. Позднее основное направление исследований перемещается в область дифференциальной геометрии многомерных римановых пространств и групп Ли (**Т.Леви-Чивита** (1873-1941), **Р.Риччи-Курбастро** (1853-1925), **Э.Картан** (1869-1951) и **Г.Вейль** (1885-1955)). Заметный стимул эти работы получили в связи с общей теорией относительности **А.Эйнштейна** (1879-1955).

Ф.Клейн и **А.Пуанкаре** (1854-1912) создают теорию автоморфных функций. **Э.Пикар** (1856-1941), **А.Пуанкаре**, **Ж.Адамар**, **Э.Борель** (1871-1956) разрабатывают теорию целых функций. Геометрическую теорию функций и теорию римановых поверхностей развивают **А.Пуанкаре**, **Д.Гильберт** и др. Конформные отображения находят применение в аэромеханике (**Н.Е.Жуковский** (1847-1921), **С.А.Чаплыгин** (1869-1942)).

Исследования по теории функций действительного переменного привели к общим определениям понятий меры множества, измеримых функций и интеграла. Основы теории функций действительного переменного заложили математики французской школы (**К.Жордан**, **Э.Борель**, **А.Лебег** (1875-1941), **Р.Бэр**), позднее ведущая роль переходит к русской и советской школе.

Выделение функционального анализа как важного раздела математики принадлежит **В.Вольтерра** (1860-1940) в конце XIX века. Одна из его ветвей – теория интегральных уравнений, начатая **В.Вольтерра** и продолженная **Э.Фредгольмом** (1866-1927). Важный раздел – теория операторов в гильбертовом пространстве.

При исследовании нелинейных систем с малой нелинейностью широко применяется метод разложения по параметру. Большое значение в теории обыкновенных дифференциальных уравнений имеют вопросы качественного исследования их решений, в частности, классификация особых точек (**А.Пуанкаре** и др.), вопросы устойчивости, глубоко изученные **А.М.Ляпуновым** (1857-1918).

А.Пуанкаре развил намеченные **Б.Риманом** исследования по топологии многообразий, в частности, для изучения неподвижных точек непрерывных отображений многообразий на самих себя. Отсюда возникли комбинаторные, гомологические, алгебраические и гомотопические методы современной топологии. Другое направление в топологии возникло на почве теории множеств и функционального анализа и привело к созданию теории общих топологических пространств. Глубокие вопросы философии математики разработаны в трудах **А.Пуанкаре**.

В теории дифференциальных уравнений с частными производными развиваются методы краевых задач. При выборе для каждого типа уравнений краевых задач часто используются физические модели распространении волн, тепла, диффузии и т.п. Этим объясняется сближение теории дифференциальных уравнений с частными производными с теорией уравнений математической физики. После **П.Дирихле** и **Б.Римана** уравнениями математической физики занимались **А.Пуанкаре**, **Ж.Адамар**, **Дж.Рэлей** (1842-1919), **У.Томсон** (1824-1907), **К.Нейман**, **Д.Гильберт**, а в России **А.М.Ляпунов**, **В.А.Стеклов** (1863-1926) и др.

Общая теория меры была создана исследованиями **А.Лебега**, **К.Каратеодори** (1873-1950), **Ф.Хаусдорфа** (1868-1942), **Э.Бореля**.

В современной математике большое развитие получили исследования **Л.Эйлера**, **Л.Пуансо** (1777-1859), **Ж.Лагранжа**, **С.В.Ковалевской** (1850-1891), **Клебша** (1833-1872), **Н.Е.Жуковского** (1847-1921) в теории движения твердого тела в поле сил в различных средах, например, в жидкости. Соответствующие уравнения движения являются важным примером так называемых гамильтоновых дифференциальных уравнений (**В.Гамильтон** (1805-1865)). Такие уравнения (динамические системы) описывают, например, колебания корабля в море, вращение волчка (гироскопы), взаимодействие материальных точек на прямой или окружности, поведение геодезических на поверхностях (в частности, на эллипсоиде) и т.д., рис.21. В случае, когда система обладает достаточным запасом симметрий, эти уравнения допускают интегралы, позволяющие эффективно описывать траектории системы. Важным методом исследования является интегрирование по Лиувиллю, опирающееся на известную теорему **Дж.Лиувилля** (1809-1882). Поиск и топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых динамических систем является активно развивающимся направлением в симплектической геометрии и топологии. Большой вклад в эту область внесли российские математики.

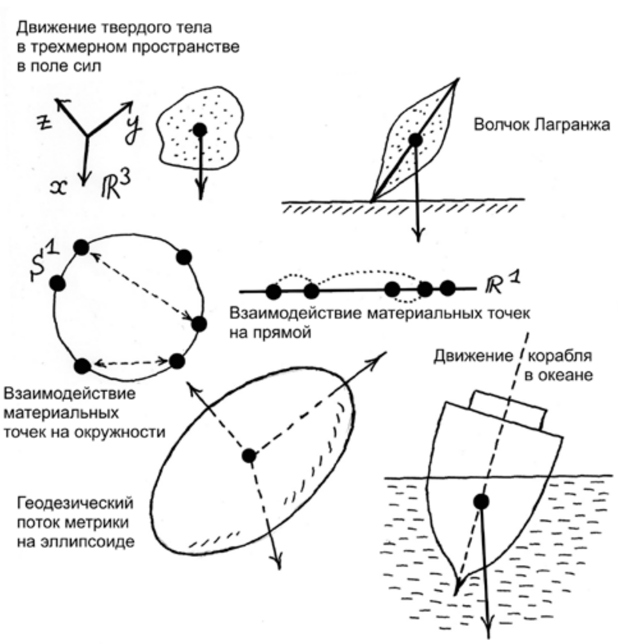


Рис.21. Примеры систем, описывающихся гамильтоновыми уравнениями.

В теорию дифференциальных уравнений проникают методы теории вероятностей. Если в начале XIX века вероятностные методы, в основном, использовались в теории артиллерийской стрельбы и в теории ошибок, то с конца XIX века теория вероятностей внедряется в статистическую физику, механику, в математическую статистику. Наиболее глубокие работы по общим вопросам теории вероятностей в конце XIX – начале XX века выполнены в русской школе (**П.Л.Чебышев**, **А.А.Марков**, **А.М.Ляпунов**).

Примерно в это же время численные методы анализа выросли в самостоятельную ветвь математики. Большое внимание уделялось методам численного интегрирования дифференциальных уравнений (методы Адамса, Штёрмера, Рунге и др.) и квадратурным формулам (**П.Л.Чебышев**, **А.А.Марков**, **В.А.Стеклов**).

С начала XIX века, важную роль снова начинает играть Петербургская математическая школа, вдохновленная исследованиями **М.В.Остроградского** и **В.Я.Буняковского** (1804-1889). Многие работы **М.В.Остроградского** посвящены математической физике и математическому анализу (в частности, известная формула Остроградского). В Петербурге вокруг **П.Л.Чебышева** и его учеников **А.А.Маркова**, **А.М.Ляпунова**, **Е.И.Золотарева**, **А.Н.Коркина**, **Г.Ф.Вороного** сложился коллектив математиков, из недр которого вышли многие видные ученые России.

В XIX веке в Москве математики группировались, в основном, вокруг Московского университета, основанного в 1755 году, где в 1804 году был создан физико-математический факультет. Московское математическое общество, созданное в 1811 году, начало свою активную деятельность лишь в 1864 году. Центром притяжения стал **Н.Д.Брашман** (1796-1866), занимавшийся вопросами теоретической и практической механики, вариационного исчисления, геометрии. В конце XIX - начале XX века в Московском университете и высшем техническом училище работало много математиков прикладного направления, признанным главой которого стал **Н.Е.Жуковский**. Его исследования были развиты многими учеными, в частности, **С.А.Чаплыгиным** (1869-1942). Важные исследования были сделаны **М.В.Келдышем** (1911-1978), **М.А.Лаврентьевым** (1900-1980) и др.

Теория поверхностей в дифференциальной геометрии многим обязана работам **К.М.Петерсона**, а затем **Б.К.Млодзеевского** (1858-1923), **Д.Ф.Егорова** (1869-1931), **С.П.Финикова** (1883-1964), **С.С.Бюшгенса** (1882-1963).

В XX веке именно в Московском университете выросли такие известные ученые, как **Н.Н.Лузин** (1883-1952), **В.В.Голубев** (1884-1954), **И.И.Привалов** (1891-1941), **В.В.Степанов** (1889-1950), а затем **П.С.Александров** (1896-1982), **А.Н.Колмогоров** (1903-1987), **Л.С.Понтрягин** (1908-1988), **Д.Е.Меньшов** (1892-1988), **Л.Н.Сретенский** (1902-1973), **П.С.Урысон** (1898-1924), **А.Я.Хинчин** (1894-1959) и многие другие, составившие основу Московской математической школы.

Огромный вклад в развитие российской математики, в создание ярких научных школ, внесли **А.Д.Александров** (1912-1999), **А.А.Андронов** (1901-1952), **С.Н.Бернштейн** (1880-1968), **Н.Н.Боголюбов** (1909-1992), **И.Н.Векуа** (1907-1977), **И.М.Гельфанд** (1913-2009), **А.О.Гельфонд** (1906-1968), **Б.В.Гнеденко** (1912-1995), **Б.Н.Делоне** (1890-1980), **Л.В.Канторович** (1912-1986), **Н.М.Крылов** (1879-1955), **А.Г.Курош** (1902-1971), **О.А.Ладыженская** (1922-2004), **Ю.В.Линник**

(1915-1972), **О.Б.Лупанов** (1932-2006) **Л.А.Люстерник** (1899-1981), **А.И.Мальцев** (1909-1967), **А.А.Марков** (1903-1979), **А.И.Маркушевич** (1908-1979), **Н.И.Мусхелешвили** (1891-1976), **П.С.Новиков** (1901-1975), **О.А.Олейник** (1925-2001), **И.Г.Петровский** (1901-1973), **А.В.Погорелов** (1919-2002), **И.И.Привалов** (1891-1941), **П.К.Рашевский** (1907-1983), **В.И.Смирнов** (1887-1975), **Н.В.Смирнов** (1900-1966), **С.Л.Соболев** (1908-1989), **А.Н.Тихонов** (1905-1993), **Д.К.Фаддеев** (1907-1989), **О.Ю.Шмидт** (1891-1956), **Л.Г.Шнирельман** (1905-1938), и многие другие.

4. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Большой Энциклопедический Словарь, М.: Большая Российская Энциклопедия, 1997.

Колмогоров А.Н., Статья "Математика" в кн.: Большая Советская энциклопедия, 2 изд., т. 26, М., 1954; Математика, её содержание, методы и значение, т. 1-3, М., 1956.

Математическая Энциклопедия, т.1-5. М., изд-во "Советская Энциклопедия", 1977-1985.

Математика XIX века. Под ред. А.Н.Колмогорова и А.П.Юшкевича. М., изд-во Наука, 1981.

Цейтен Г.Г., История математики в древности и в средние века, пер. с франц., 2 изд., М.-Л., 1938, 2 изд. М., изд-во URSS, 2009;

Цейтен Г.Г., История математики в XVI и XVII веках, пер. с нем., 2 изд., М.- Л., 1938.

Ван-дер-Варден Б. Л., Пробуждающаяся наука. Математика Древнего Египта, Вавилона, Греции, пер. с голл., М., 1959.

Кольман Э., История математики в древности, М., 1961.

Юткевич А.П., История математики в средние века, М., 1961.

Вилейтнер Г., История математики от Декарта до середины XIX столетия, пер. с нем., 2 изд., М., 1966; его же, Хрестоматия по истории математики, составленная по первоисточникам..., пер. с нем., 2 изд., М.- Л., 1935.

Вилейтнер Г., Хрестоматия по истории математики. 2 изд. М., изд-во URSS, 2009.

Клейн Ф., Лекции о развитии математики в XIX столетии, пер. с нем., ч. 1, М.- Л., 1937.

Рыбников К.А., История математики, т. 1-2, М., 1960-1963. 2 изд. М., изд-во МГУ, 1974.

Бурбаки Н., Очерки по истории математики, пер. с франц., М., 1963; 4 изд. М., изд-во URSS, 2009.

Стройк Д.Я., Краткий очерк истории математики, пер. с нем., 2 изд., М., 1969; 4 изд. М., 1984.

История математики с древнейших времен до начала XIX столетия, т.1-3, М., 1970-1972.

Cantor M., Vorlesungen u''ber Geschichte der Mathematik, 3 Aufl., Bd 1-4, Lpz., 1907-1913.

Виноградов И.М., Математика и научный прогресс, в кн.: Ленин и современная наука, кн.2, М., 1970;

Математика. [Сб. ст.], М.-Л., 1932 (Наука в СССР за 15 лет. 1917-1932; Математика в СССР за тридцать лет. 1917-1947. Сб. ст., М.- Л. 1948; Математика в СССР за сорок лет. 1917-1957. Сб. ст. т.1,М., 1959.

Weyl H., A Half-century of Mathematics, "American Mathematical Monthly", 1951, v. 58, № 8, p.523-553.

Энциклопедия элементарной математики, кн.1-5, М.- Л., 1951-1966.

Вебер Г. и Вельштейн И., Энциклопедия элементарной математики, пер. с нем., т.1-3, 2 изд., Одесса, 1911-1914;

Enzyklopadie der mathematischen Wissenschaften, mit Einschluss ihrer Anwendungen, Bd.1-6, Lpz., 1898-1934; тоже, 2 Aufl., Lpz., 1950.

Encyclopedic des siences mathe'matiques pures et appliquees, t.1-7, P.- Lpz., 1904-1914; Mathematik, 6 Aufl., Lpz., 1971 (Kleine Enzyklopadie).

Mathematisches Worterbuch, 2 Aufl., Bd 1-2, B.- Lpz., 1962.

Стройк Д.Дж., Очерк истории дифференциальной геометрии. М.-Л., ОГИЗ, 1941.

Вейль Г., Симметрия. М., изд-во Наука, 1968.

Меркин Д.Р., Краткая история классической механики Галилея-Ньютона. М., изд-во "Физико-математическая литература", 1994.

Гнеденко Б.В., Очерки по истории математики в России. 4 изд. М., изд-во URSS, 2009.

Очерки по истории математики. Сборник статей. Под ред. Б.В.Гнеденко. М., изд-во МГУ, 1997.

Нейгебауэр О., Лекции по истории античных математических наук. Перевод с немецкого. М.-Л., 1937.

Васильев А.В., Николай Иванович Лобачевский (1792-1856). М., изд-во Наука, 1992.

Рид К., Гильберт. Пер. с англ. М., изд-во Наука, 1977.

Ожигова Е.П., Шарль Эрмит (1822-1901). Л., изд-во Наука, 1982.

Полищук Е.М., Софус Ли. Л., изд-во Наука, 1983.

Владимиров В.С., Маркуш И.И., Владимир Андреевич Стеклов - ученый и организатор науки. М., изд-во Наука, 1981.

Кеплер И., О шестиугольных снежинках. М., изд-во Наука, 1982.

Тюлина И.А., Жозеф Луи Лагранж (1736-1813). М., изд-во Наука, 1977.

Никифоровский В.А., Великие математики Бернулии. М., изд-во Наука, 1984.

Крылов А.Н., Леонард Эйлер. 2 изд. Л., 1933.

Bennet J.A. "The Divided Circle. A History of Instruments for Astronomy Navigation and Surveying". - Phaidon. Christie's Oxford, 1987.

Гутер Р.С., Полунов Ю.Л., Джироламо Кардано. М., изд-во Знание, 1980.

Льоцци Марио, История физики. Пер. с итал. М., изд-во МИР, 1970.