

Александр О. Иванов
Алексей А. Тужилин

**Геометрическая оптимизация и
Метрическая геометрия**



Вселенная объектов.

Теория множеств фон Неймана-Бернайса-Гёделя (NBG).

Все объекты теории NBG называются **классами**. Имеется два типа классов:

- **множество** A : существует класс C такой, что $A \in C$;
- **собственный класс** A : для любого класса C выполняется $A \notin C$.

Замечание. Каждый элемент класса является множеством;

$V = \{A : A = A\}$ – класс всех множеств, V – собственный класс.

Для любых классов A, B определены $A \times A$, $f : A \rightarrow B$, и т.д., в частности, мы можем говорить о функции расстояния на классах:

$\rho : A \times A \rightarrow [0, \infty]$ является **расстоянием** если $\rho(x, x) = 0$ и $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для любых $x, y \in A$.

Для упрощения обозначений, мы будем писать $|x y|$ вместо $\rho(x, y)$.

$\mathcal{GH}$ – собственный класс всех метрических пространств (семейство пространственных форм), рассматриваемых с точностью до изометрии. Мы наделим его **расстоянием Громова-Хаусдорфа**.

Вселенная форм. Степень похожести. Расстояния Хаусдорфа и Громова-Хаусдорфа.

Пусть $X \in \mathcal{GH}$ – метрическое пространство, $A \subset X$ – непустое, $r > 0$, тогда

$$U(A, r) = \{x \in X : |xy| < r \text{ для всех } y \in A\}$$

– **открытая r -окрестность A .**

Для непустых $A, B \subset X$ положим

$$d_H(A, B) = \inf\{r : A \subset U(B, r) \text{ и } B \subset U(A, r)\}$$

и назовем **расстоянием Хаусдорфа** между A и B .

Пусть $X, Y \in \mathcal{GH}$ – метрические пространства, тогда

$$d_{GH}(X, Y) = \inf\{r : d_H(X', Y') \leq r; X', Y' \subset Z; Z \in \mathcal{GH}; X \approx X'; Y \approx Y'\},$$

где для метрических пространств U и V , $U \approx V$ означает, что U **изометрично** V .

Величина $d_{GH}(X, Y)$ называется **расстоянием Громова-Хаусдорфа** между метрическими пространствами X и Y .

Теорема. Функция расстояния d_{GH} удовлетворяет неравенству треугольника. Кроме того, если $X \approx Y$, то $d_{GH}(X, Y) = 0$.

Сопоставление форм.

Соответствия и расстояние Громова-Хаусдорфа.

Пусть X, Y – множества. Каждое $\sigma \subset X \times Y$ называется **отношением** между X и Y .

Обозначим $\mathcal{P}_0(X, Y)$ множество всех непустых отношений между X и Y .

Положим

$$\begin{aligned}\pi_X : X \times Y &\rightarrow X, & \pi_X(x, y) &= x, \\ \pi_Y : X \times Y &\rightarrow Y, & \pi_Y(x, y) &= y.\end{aligned}$$

Отношение $R \subset X \times Y$ называется **соответствием**, если $\pi_X|_R$ и $\pi_Y|_R$ сюръективны.

Обозначим $\mathcal{R}(X, Y)$ множество всех соответствий между X и Y .

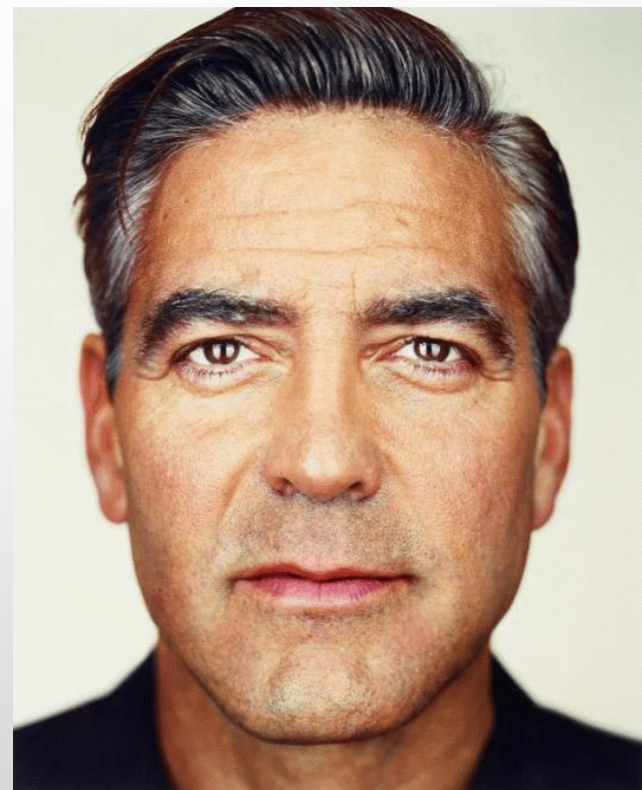
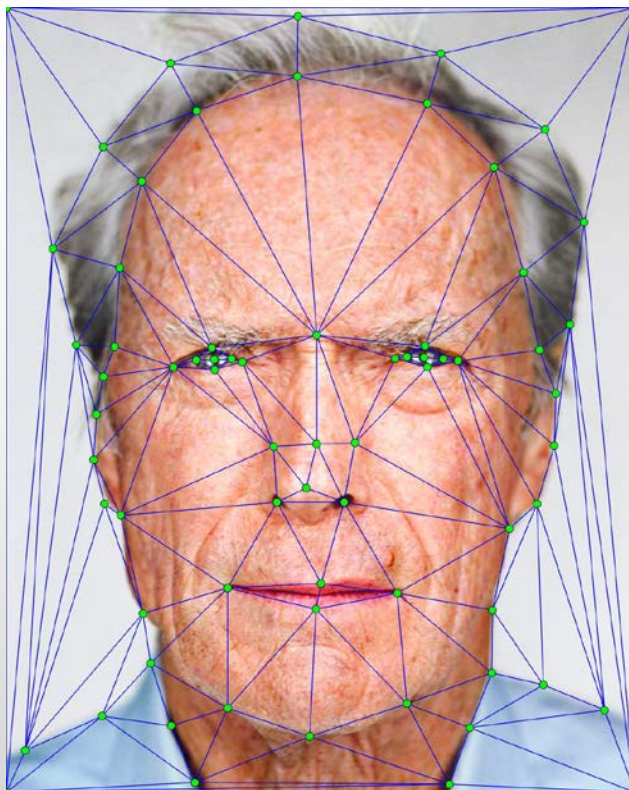
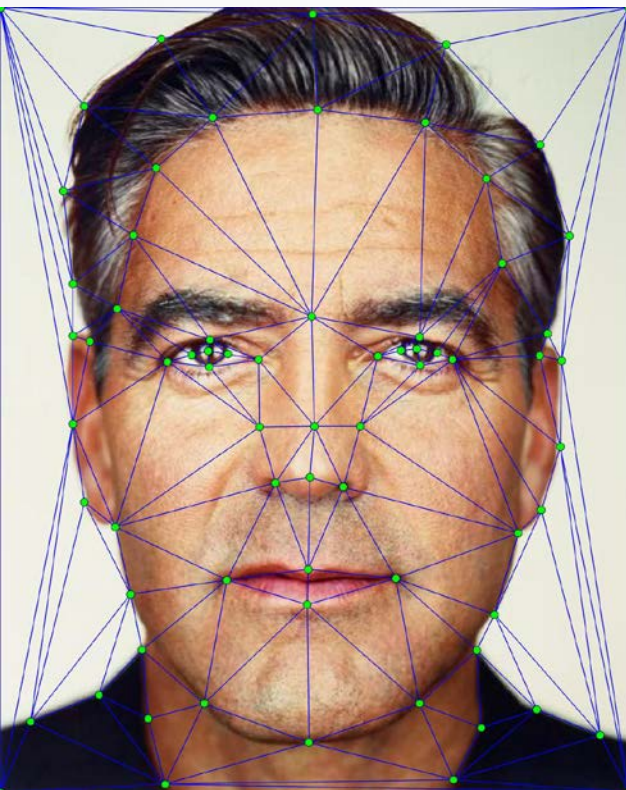
Пусть $X, Y \in \mathcal{GH}$ – метрические пространства, $\sigma \in \mathcal{P}_0(X, Y)$, тогда **искажением** σ называется величина

$$\text{dis } \sigma = \sup \{ \|xx' - yy'\| : (x, y), (x', y') \in \sigma \}.$$

Теорема. Для любых метрических пространств X и Y выполняется

$$2 \, d_{\text{GH}}(X, Y) = \inf \{ \text{dis } R : R \in \mathcal{R}(X, Y) \}.$$

МОРФИНГ



Геометрия пространства форм $\mathcal{GH}$.

Для метрического пространства X и $\lambda > 0$, обозначим λX метрическое пространство с тем же множеством X и с функцией расстояния $\lambda|xy|$ для каждого $x, y \in X$.

Для $\lambda = 0$ положим λX равным одноточечному пространству Δ_1 .

Более общо, Δ_n будет обозначать n -точечное пространство, в котором все расстояния равны 1.

Для метрического пространства X определим его **диаметр**, положив

$$\text{diam } X = \sup\{|xy| : x, y \in X\}.$$

Теорема. Для любых $X, Y \in \mathcal{GH}$ выполняется

1) $2d_{\mathcal{GH}}(\Delta_1, X) = \text{diam } X$;

2) если $\min\{\text{diam } X, \text{diam } Y\} < \infty$, то

$$2d_{\mathcal{GH}}(X, Y) \geq |\text{diam } X - \text{diam } Y| \text{ (неравенство треугольника);}$$

3) $2d_{\mathcal{GH}}(X, Y) \leq \max\{\text{diam } X, \text{diam } Y\}$ (ультраметрическое неравенство);

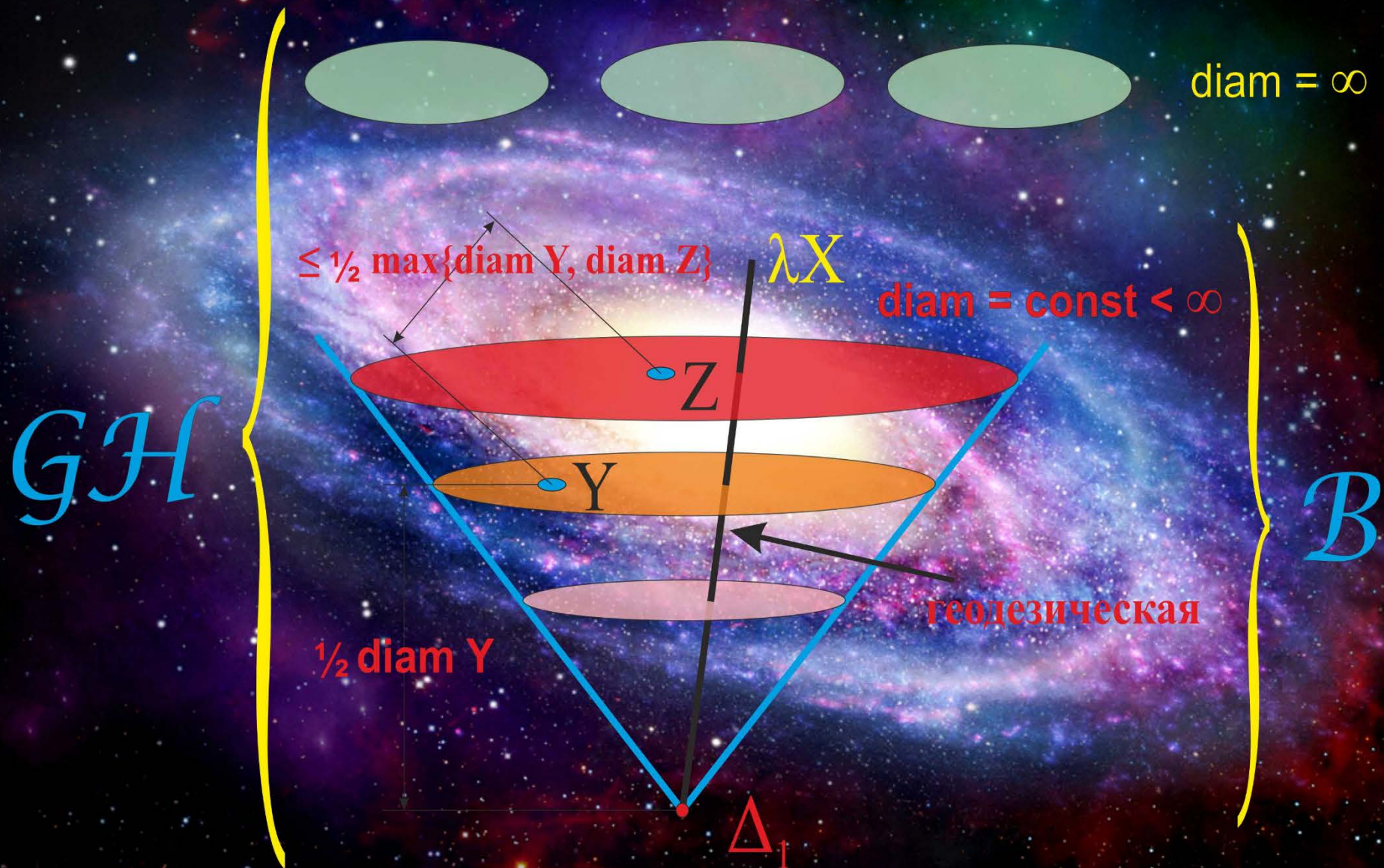
4) если $\text{diam } X < \infty$, то для любых $\lambda, \mu > 0$ имеем

$$2d_{\mathcal{GH}}(\lambda X, \mu X) = |\lambda - \mu| \text{diam } X, \text{ т.е. } t \rightarrow t X \text{ — геодезическая;}$$

5) для любого $\lambda > 0$ имеем $d_{\mathcal{GH}}(\lambda X, \lambda Y) = \lambda d_{\mathcal{GH}}(X, Y)$, т.е. $X \rightarrow \lambda X$ — гомотетия с центром в Δ_1 .

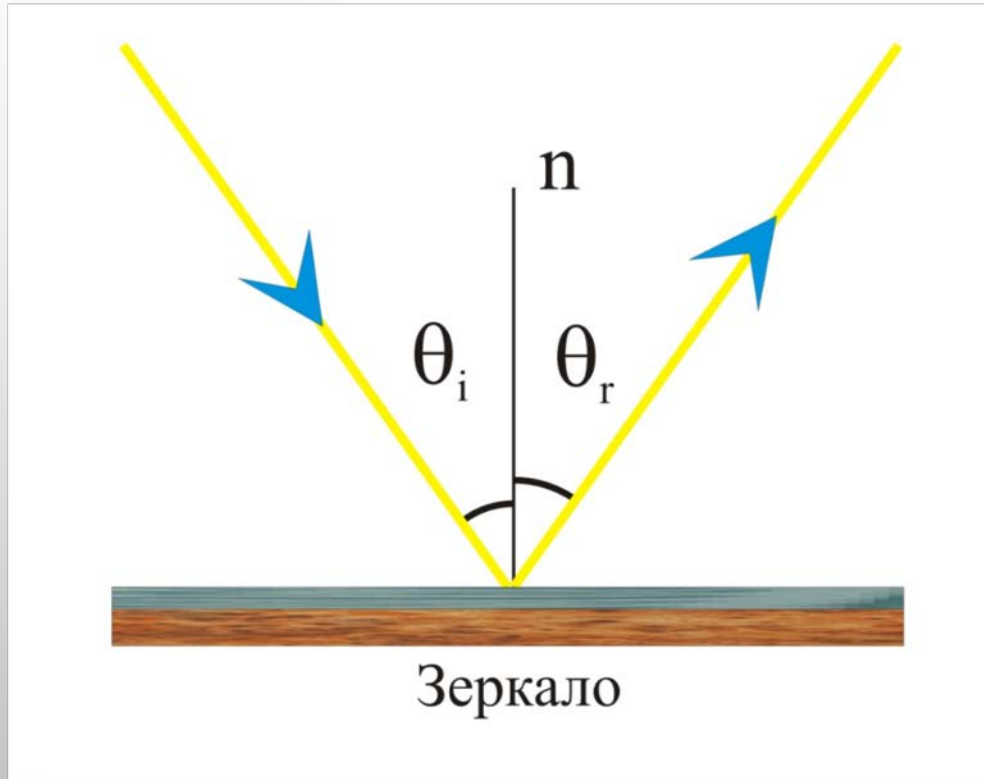
Таким образом, подсемейство $\mathcal{B} \subset \mathcal{GH}$ ограниченных метрических пространств является конусом с вершиной в Δ_1 , расслоенным на сферы $\text{diam} = \text{const}$ с центром в Δ_1 .

Вселенная форм



Что общего у ...

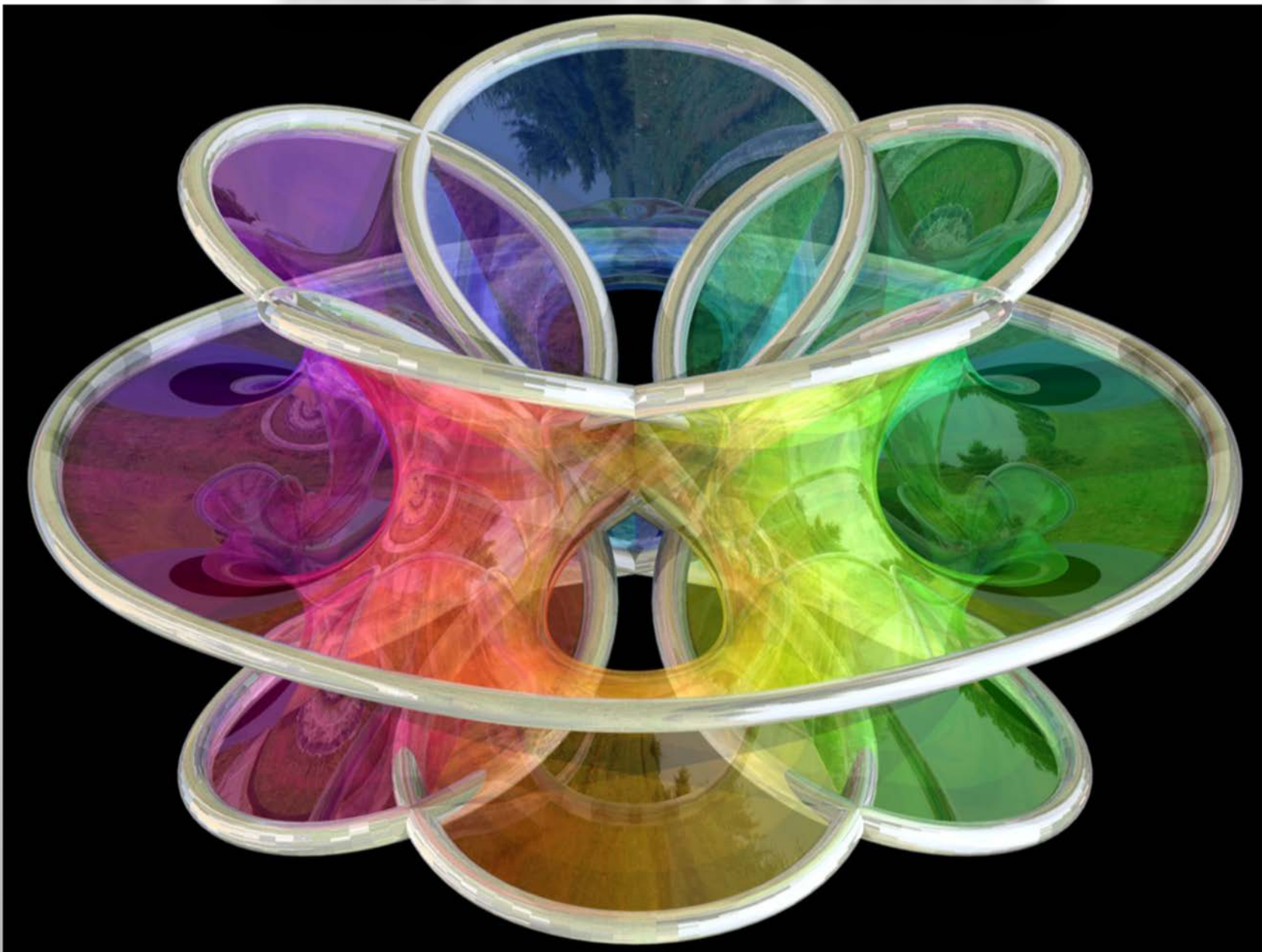
Закон отражения



Астероид



Поверхность Ричмонда





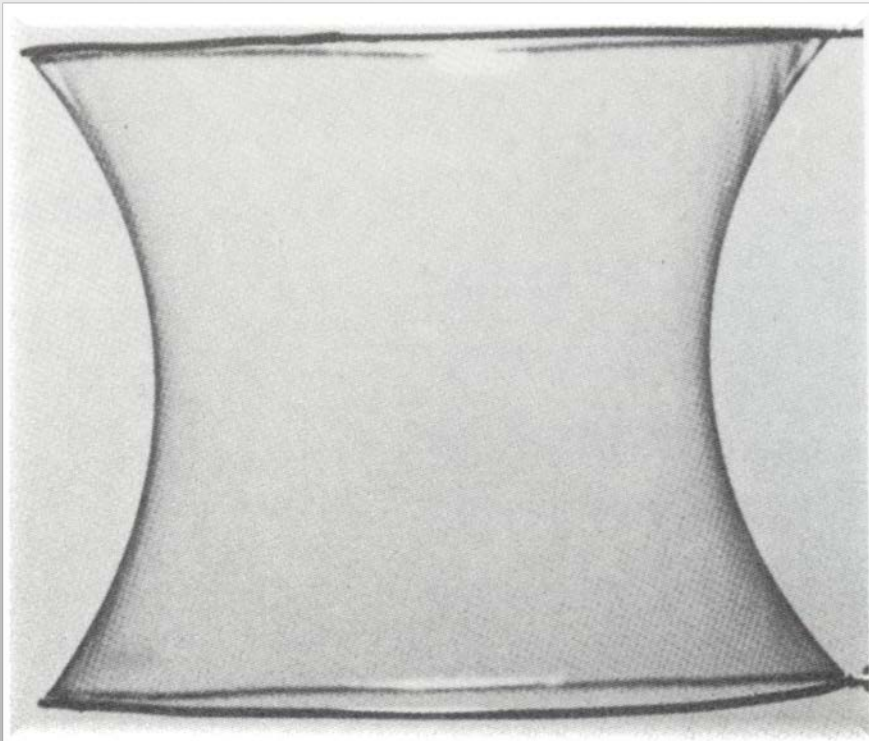
**Pierre-Louis Moreau de Maupertuis
(1698-1759)**

*“Если в Природе происходит какое-либо изменение, то **действие**, необходимое для осуществления этого изменения, будет наименьшим из всех возможных”*

Мыльные пленки – экстремали функционала площади (минимальные поверхности).

Мыльные пленки минимизируют энергию поверхностного натяжения, которая пропорциональна площади пленки, поэтому они минимизируют площадь.

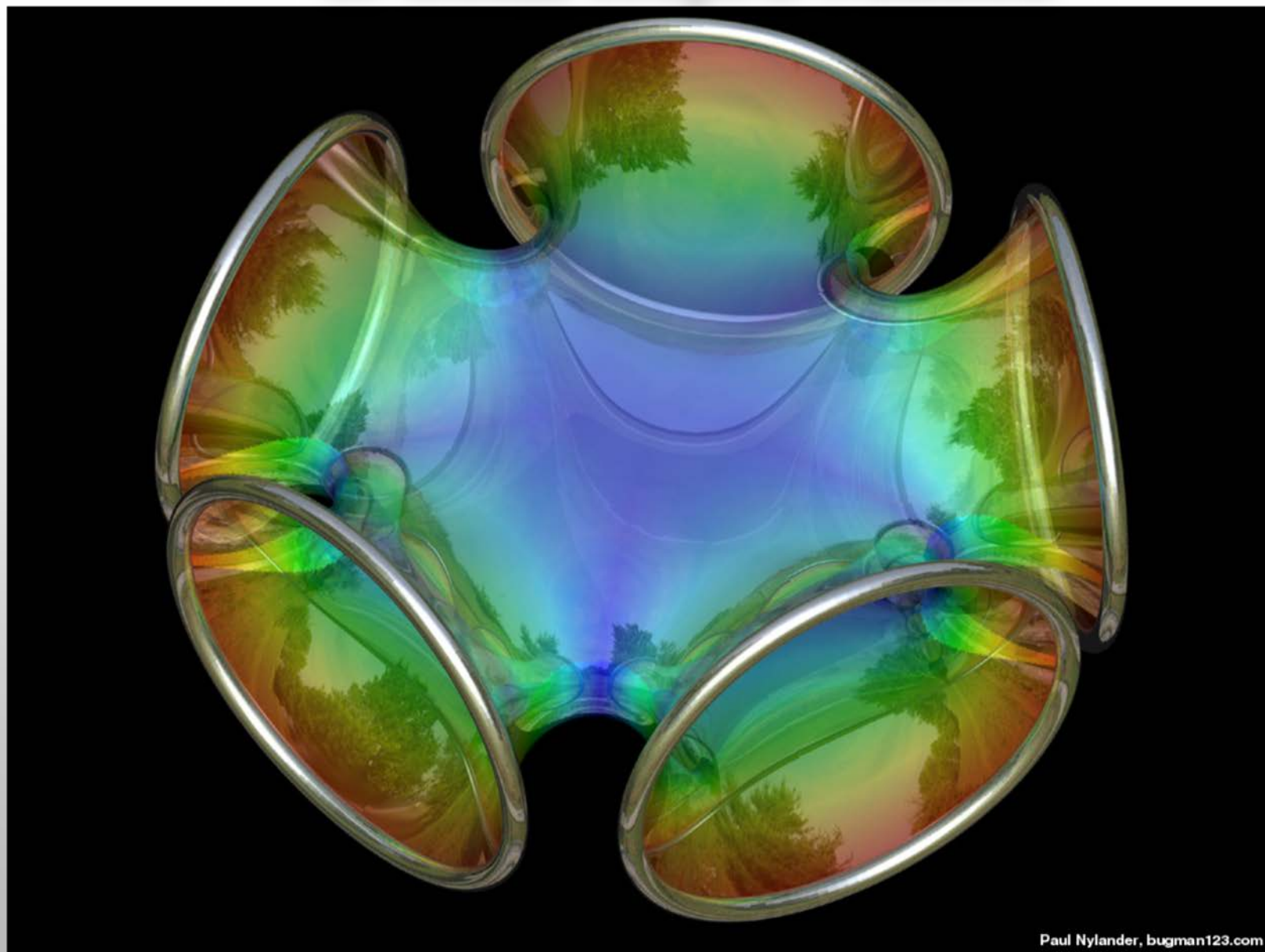
Катеноиды – единственные минимальные поверхности вращения.

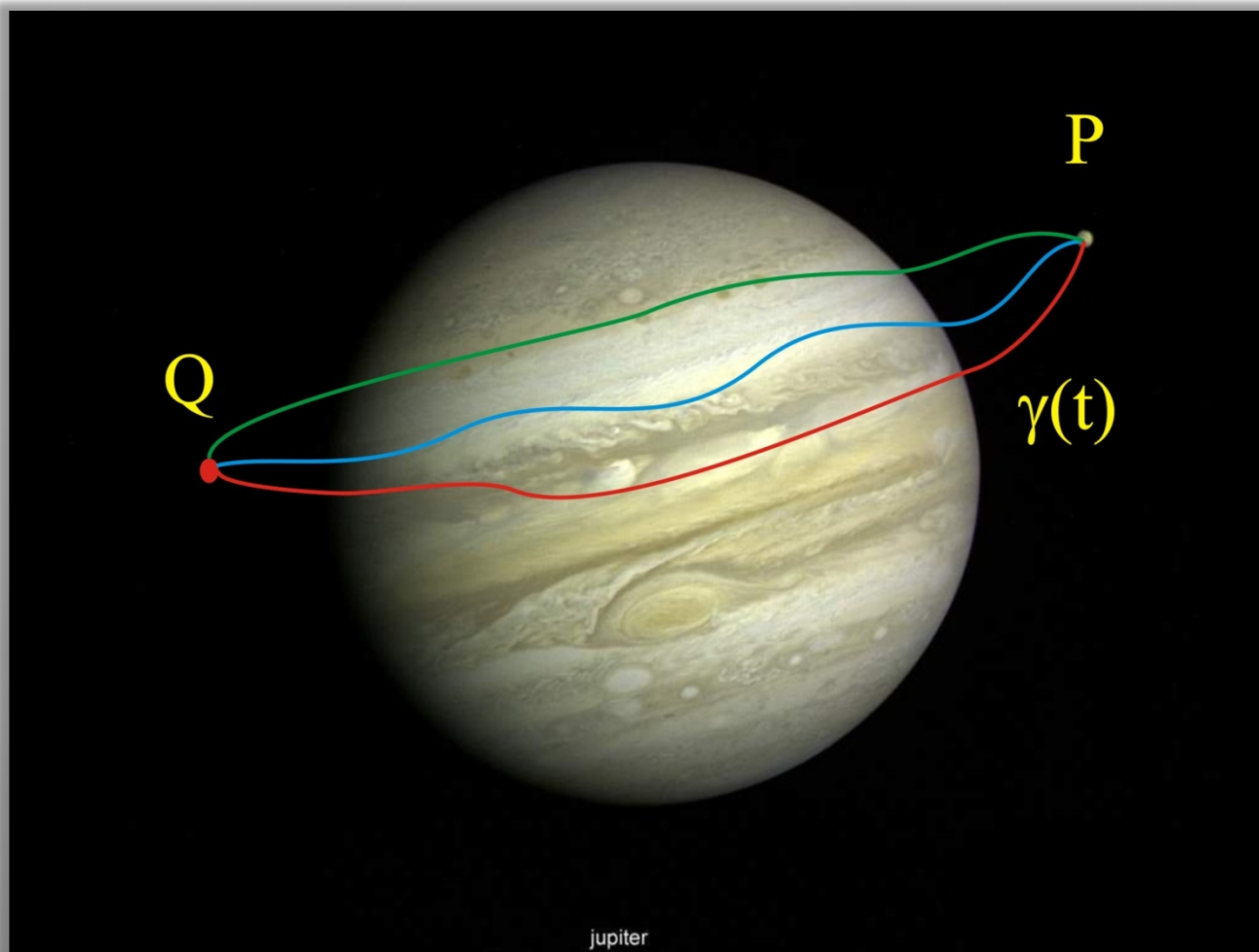


Минимальная поверхность Коста.



К-ноид Йорга-Микса





$U(x, y, z)$ — потенциальная энергия, $T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{2}$ —
кинетическая энергия

$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = T(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) - U(x, y, z)$ — лагранжиан

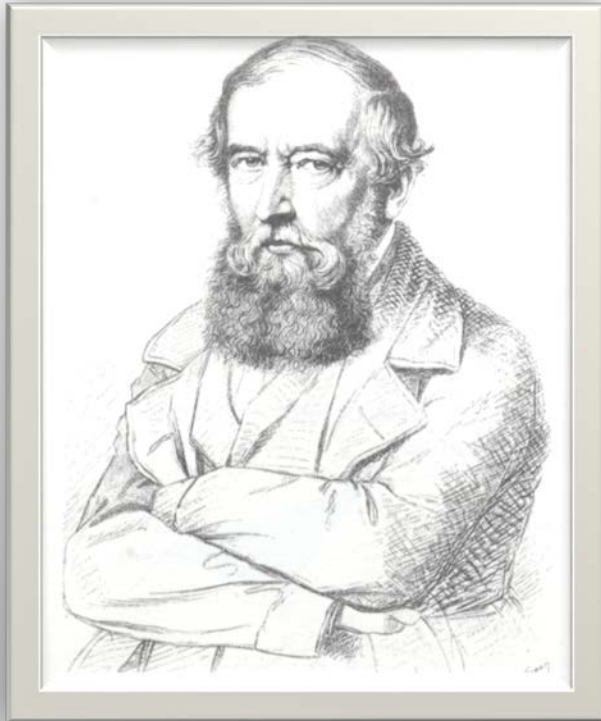
$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $a \leq t \leq b$, — кривая, соединяющая P и Q

Траектория движения минимизирует величину

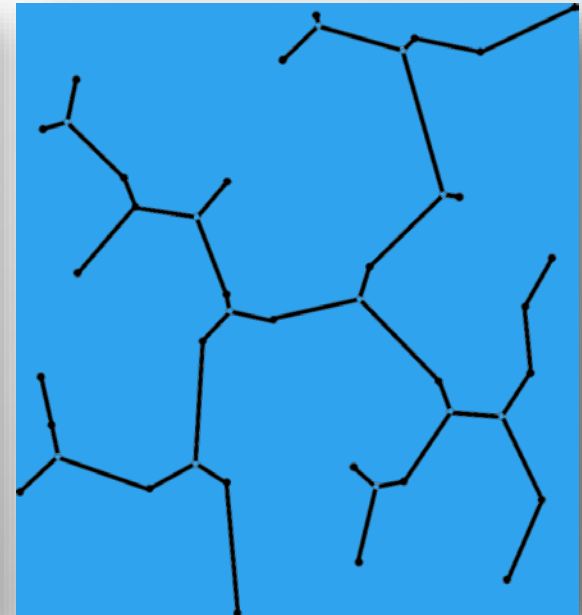
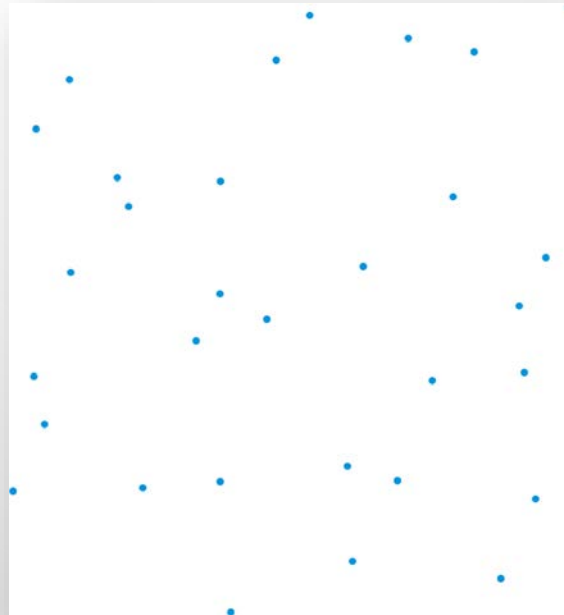
$$\Phi(\gamma) = \int_a^b L(x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) dt$$

Проблема Штейнера

*Построить кратчайшую сеть, соединяющую конечное множество точек плоскости, называемое **границей**.*



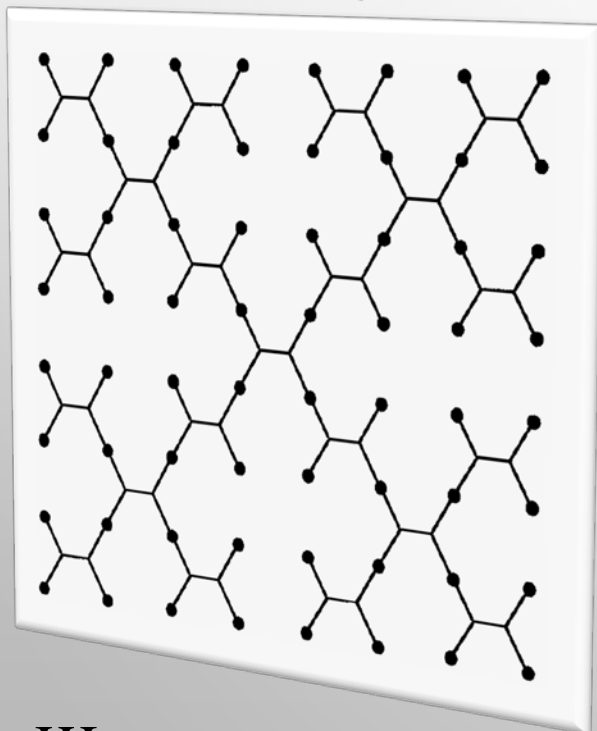
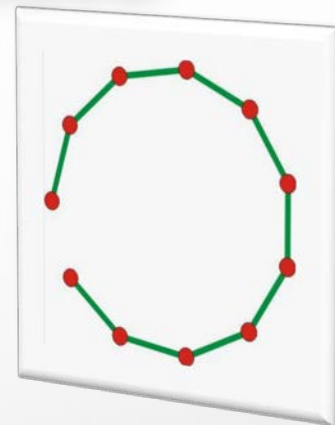
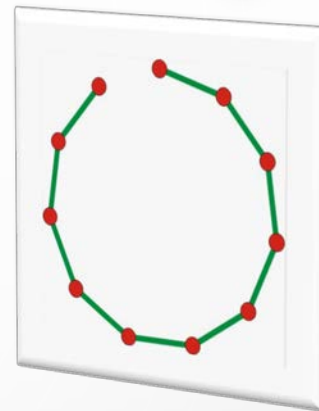
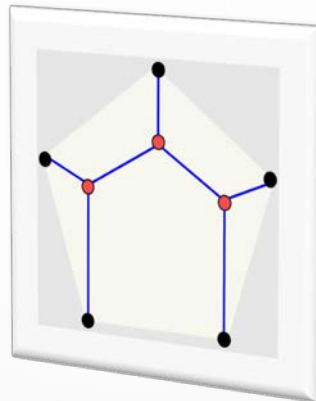
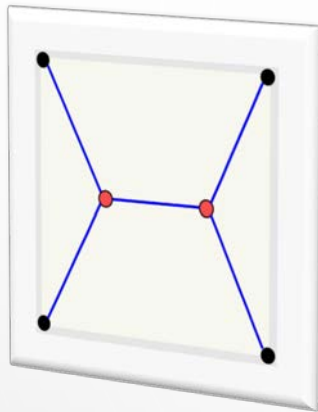
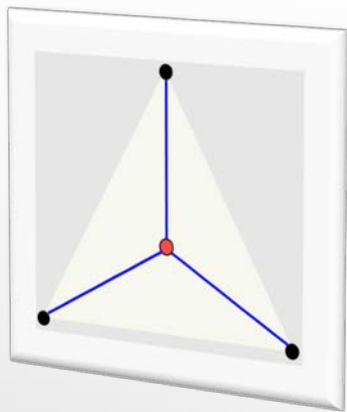
Jacob Steiner
(1796-1863)



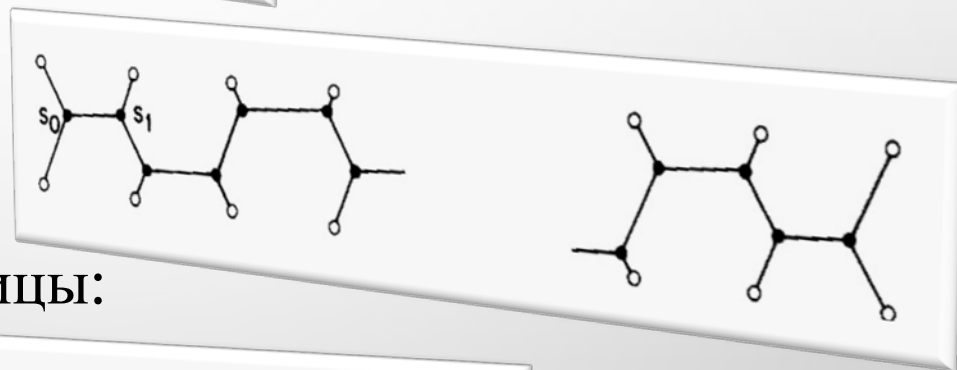
Кратчайшие сети называются
минимальными деревьями Штейнера или
кратчайшими деревьями

Примеры кратчайших деревьев

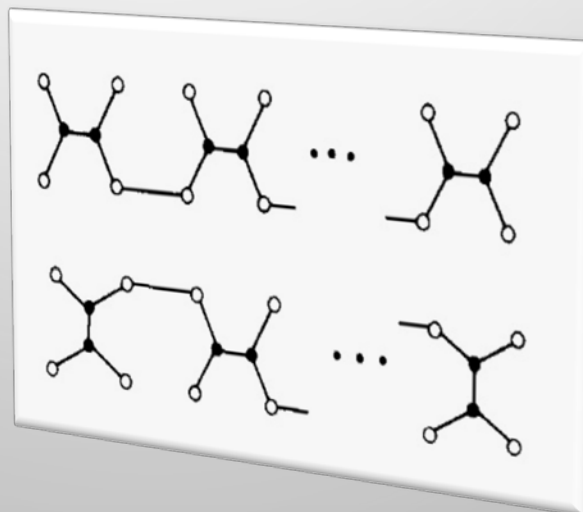
Правильные многоугольники:



Шахматная доска



Лестницы:



Линия зигзага,
точки на
окружности,
и т.д..

Проблема Штейнера на поверхности Земли



Кратчайшие деревья на манхеттенской плоскости (прямоугольная проблема Штейнера) и проектирование микросхем

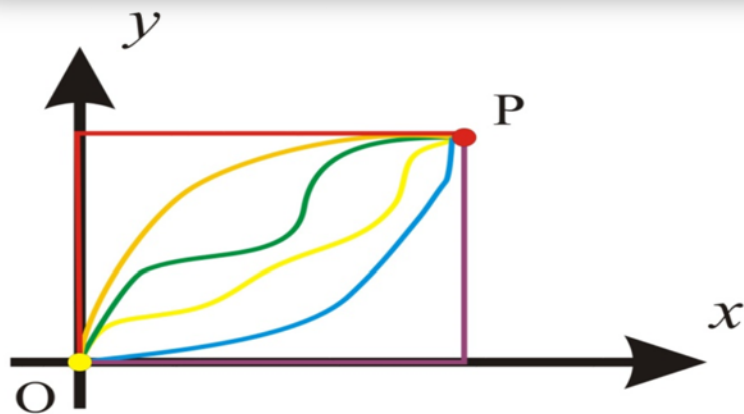
Для $A_1 = (x_1, y_1)$ и $A_2 = (x_2, y_2)$

Евклидово расстояние — это

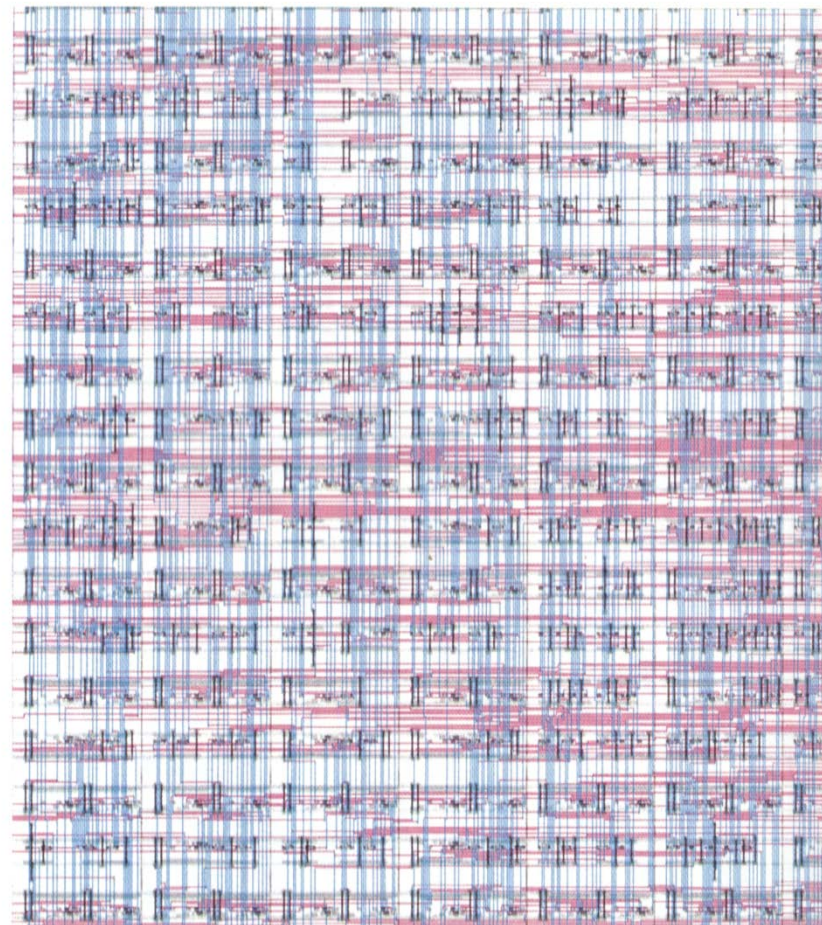
$$\rho_2(A_1, A_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Манхеттенское расстояние — это

$$\rho_1(A_1, A_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$



Все монотонные кривые,
соединяющие O и P, имеют
одинаковую манхеттенскую длину



Слова и молекулярная биология

элементарные редакторские операции:

insertion

deletion

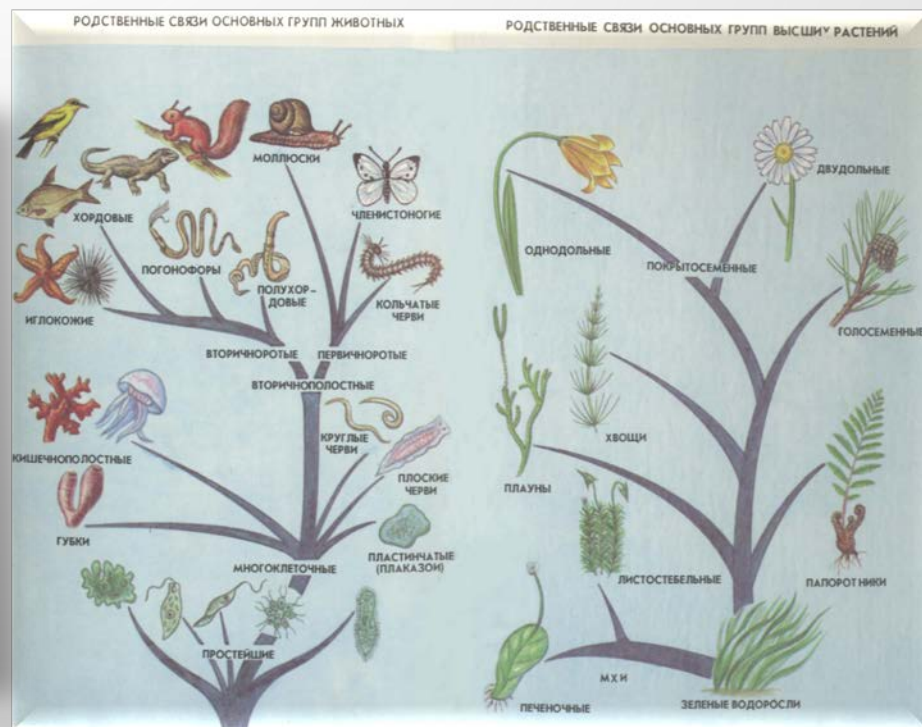
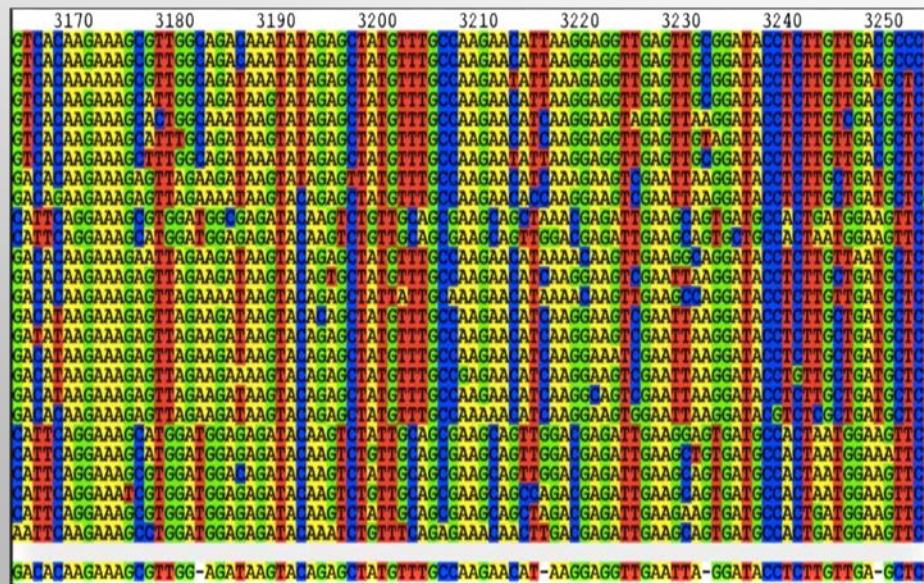
substitution

abcd  abxcd

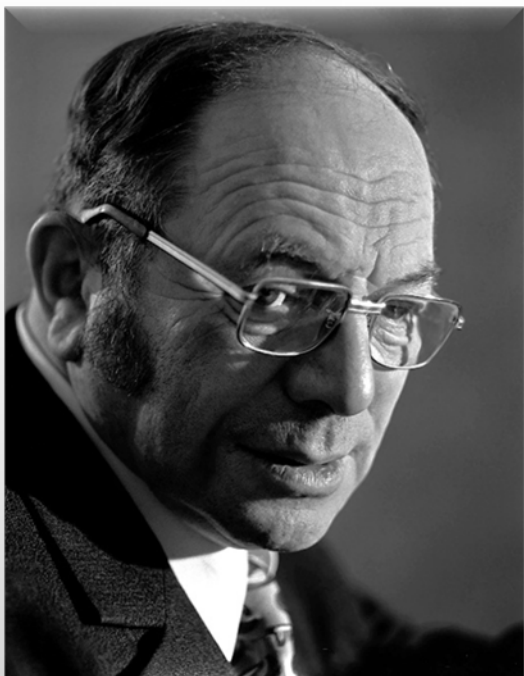
ab~~x~~cd  abcd

ab~~x~~cd  aby~~z~~cd

Расстояние Левенштейна между словами – наименьшее число элементарных операций, переводящих одно слово в другое.



Транспортная задача Канторовича



Пусть имеется множество городов, в каждом из которых есть запас ресурсов некоторого продукта. Это исходное распределение нас не устраивает, и нужно их перераспределить заданным образом, затратив на это наименьшее количество средств.

Пусть X – некоторое множество. Обозначим $\lambda(x)$ долю продукта в точке $x \in X$ в начальный момент, а $\mu(x)$ необходимую долю продукта в ней.

Тогда

$$\sum_x \lambda(x) = \sum_x \mu(x) = 1,$$

то есть $\lambda(x)$ и $\mu(x)$ – вероятностные меры на X .

План перевозок – это доля всего запаса продукта, которую планируется перевезти из пункта x в пункт y . Обозначим эту величину $\pi(x,y)$.

Тогда $\sum_{x,y} \pi(x,y) = 1$, то есть π – вероятностная мера на $X \times X$.

Обычно предполагается, что из каждого x все вывозится, и в каждый y привозится все необходимое, тогда:

$$\sum_x \pi(x,y) = \mu(y), \quad \sum_y \pi(x,y) = \lambda(x).$$

Наконец, предполагается заданной стоимость $c(x,y)$ перевозки единицы продукта из x в y . Тогда стоимость реализации плана перевозок π вычисляется так:

$$K(\pi) = \sum_{x,y} c(x,y) \pi(x,y).$$

Общая задача – минимизировать величину $K(\pi)$ по всем возможным мерам π , которая называется **функционалом Канторовича**.

Пусть теперь (X, ρ) – метрическое пространство. Тогда в качестве стоимости можно взять расстояние ρ между точками. Канторович показал, что в этом случае точная нижняя грань функционала $K(\pi)$ достигается для любых начальных данных λ и μ .

Пусть $k(\lambda, \mu)$ – точная нижняя грань функционала $K(\pi)$ для λ и μ . Тогда $k(\lambda, \mu)$ – метрика на пространстве вероятностных мер на X (транспортное расстояние).

На мерах Дирака δ_x и δ_y с носителями в точках x и y соответственно функция k совпадает с исходной метрикой:

$$k(\delta_x, \delta_y) = \rho(x, y).$$

Таким образом, исходное метрическое пространство изометрично (с сохранением расстояния) вкладывается в пространство вероятностных мер: $x \rightarrow \delta_x$.

Минимальные деревья Штейнера в метрических пространствах.

Если X – метрическое пространство, и $G = (V, E)$ – граф такой, что $V \subset X$, то для каждого ребра $e = vw \in E$ определена его **длина** $|e| = |vw|$, поэтому естественно определена и длина графа G :

$$|G| = \sum_{e \in E} |e|.$$

Для непустого конечного $M \subset X$ положим

$$\text{smt}(M, X) = \inf \{ |G| : G = (V, E) \text{ – дерево, для которого } M \subset V \subset X \}.$$

Если $G = (V, E)$ – дерево, $M \subset V \subset X$ и $|G| = \text{smt}(M, X)$, то

G называется **минимальным деревом Штейнера** (**Steiner Minimal Tree**) на M .

Положим

$$\text{SMT}(M, X) = \{ G : G \text{ – минимальное дерево Штейнера на } M \}.$$

Проблема Штейнера в метрических пространствах. Для заданных метрического пространства X и его непустого конечного подмножества $M \subset X$, вычислить $\text{smt}(M, X)$ и описать $\text{SMT}(M, X)$.

В частности, выяснить, верно ли, что $\text{SMT}(M, X) \neq \emptyset$?

Существование решения проблемы Штейнера.

Теорема. Пусть X – ограниченно компактное метрическое пространство (все замкнутые шары в нем – компактны), тогда для каждого его непустого конечного подмножества $M \subset X$ выполняется $SMT(M, X) \neq \emptyset$, т.е. проблема Штейнера разрешима для всех таких подмножеств X .

Лемма. Пусть X – ограниченно компактное метрическое пространство, а $H(X)$ – семейство всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств X , наделенное расстоянием Хаусдорфа. Тогда $H(X)$ – ограниченно компактное метрическое пространство.

Следствие. Пусть X – ограниченно компактное метрическое пространство, тогда проблема Штейнера разрешима не только для всех непустых конечных подмножеств X , но также и для всех непустых конечных подмножеств $H(X)$, т.е. $SMT(M, H(X)) \neq \emptyset$ для каждого непустого конечного $M \subset H(X)$.

Задача. Описать устройство $SMT(M, H(X))$ для различных ограниченно компактных X и конечных $M \subset H(X)$.

Проблема Штейнера в пространстве вероятностных мер.

Пусть X – метрическое пространство. Метрика задает на нем топологию, что позволяет рассматривать на X так называемые **борелевские меры** (то есть меры, согласованные с этой топологией) и определить интегрирование функций (**интеграл Лебега**) по таким мерам. Мера называется **вероятностной**, если интеграл от нее по всему пространству X равен 1.

На вероятностных мерах на метрическом пространстве естественно определяется **функционал Канторовича и транспортное расстояние**. Для этого нужно в приведенных выше формулах $K(\pi) = \sum_{x,y} c(x,y) \pi(x,y)$ заменить суммирование на интеграл по мере π , и положить расстояние между мерами λ и μ равным точной нижней грани функционала $K(\pi)$ по множеству $\Pi(\lambda, \mu)$ всех вероятностных на прямом произведении $X \times X$, удовлетворяющих граничным условиям $\pi(A \times Y) = \lambda(A)$ и $\pi(X \times B) = \mu(B)$. В результате семейство $\mathcal{P}(X)$ вероятностных мер превращается в метрическое пространство.

Теорема. Если X – компактное метрическое пространство, то семейство $\mathcal{P}(X)$ вероятностных мер на X , наделенное транспортным расстоянием, – также компактное метрическое пространство. Таким образом, решение проблемы Штейнера в $\mathcal{P}(X)$ существует для любого конечного подмножества $M \subset \mathcal{P}(X)$.

Проблема Ферма-Штейнера в $H(X)$.

Проблема Ферма-Штейнера в метрическом пространстве X : для данного непустого конечного подмножества $M \subset X$ нужно найти все точки $y \in X$, для которых сумма расстояний от y до точек из M – наименьшая возможная.

Существование решения легко доказывается для ограничено компактных метрических пространств.

В работах А.Галстяна, А.Иванова, А.Тропина и А.Тужилина эта задача рассматривается для пространства компактов в евклидовом пространстве. В этом случае решения – так называемые **компакты Штейнера** – удастся описать в следующих терминах.

Пусть $M = \{A_1, \dots, A_n\}$, $A_i \subset \mathbb{R}^N$ – компактные подмножества, и Y – компакт Штейнера для M в смысле расстояния Хаусдорфа. Положим $d_i = |A_i Y|$, и обозначим $\Sigma_d(M)$ непустое семейство компактов Штейнера для M с теми же расстояниями до граничных точек A_i .

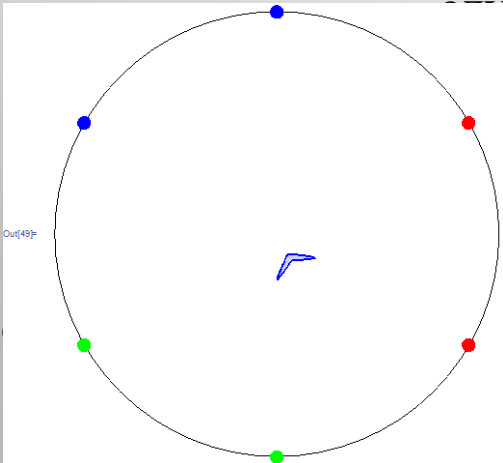
Теорема. Семейство компактов Штейнера $\Sigma_d(M)$ содержит единственный наибольший по включению элемент $Y_d(M)$, наименьшие элементы y и состоит из тех и только тех компактов K , для которых выполнено включение $y \subset K \subset Y_M$ для некоторого минимального элемента y .

Проблема Ферма-Штейнера в $H(X)$.

Наибольший элемент $Y_d(M)$ легко описать геометрически: он равен пересечению замкнутых шаровых окрестностей $B(A_i, d_i)$, являющихся замыканиями соответствующих открытых окрестностей $U(A_i, d_i)$.

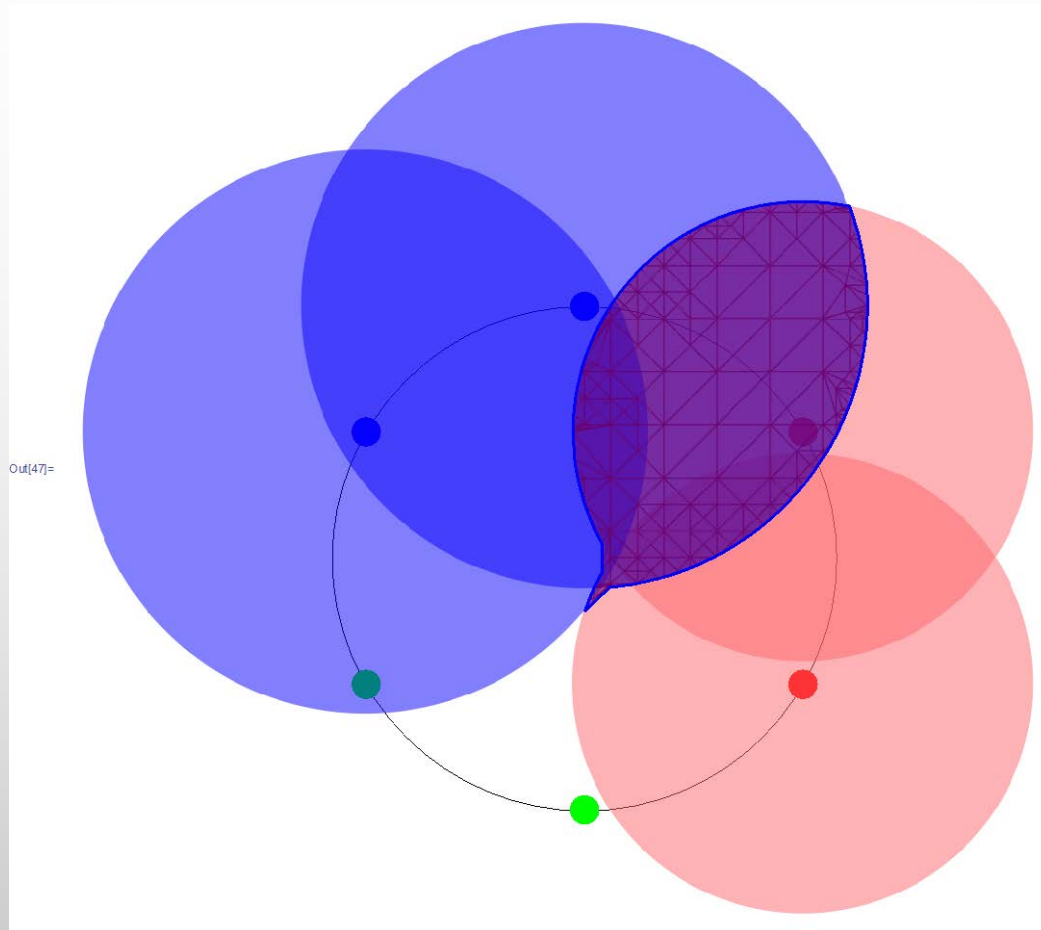
Если все A_i – конечные множества, то каждый минимальный элемент состоит из конечного числа точек. Если N – число точек в объединении A_i , а n – количество A_i , то количество точек в минимальном компакте не превосходит $N - n$.

Решения задачи Ферма-Штейнера не сохраняют симметрии граничного множества. Рассмотрим пример, построенный А.Тропиным. Пусть множество M состоит из трех двухточечных компактов, представляющих собой пары соседних вершин правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса 1. Показано, что одноточечный компакт (центр окружности) не является компактом Штейнера. Оказалось, что в этом случае существует три несимметричных решения. Один из трех максимальных компактов изображен на рисунке слева. Он получен как пересечение трех шаровых окрестностей для расстояний. Здесь расстояния от компакта Штейнера до граничных компактов имеют вид $(\omega, \omega, (1 + t^2 + t)^{1/2})$, $\omega = (1 + t^2 - t)^{1/2}$, а $t = \sqrt{5}/4 - 1/2$ ($\sqrt{5} - 7/4$) $^{1/2}$.



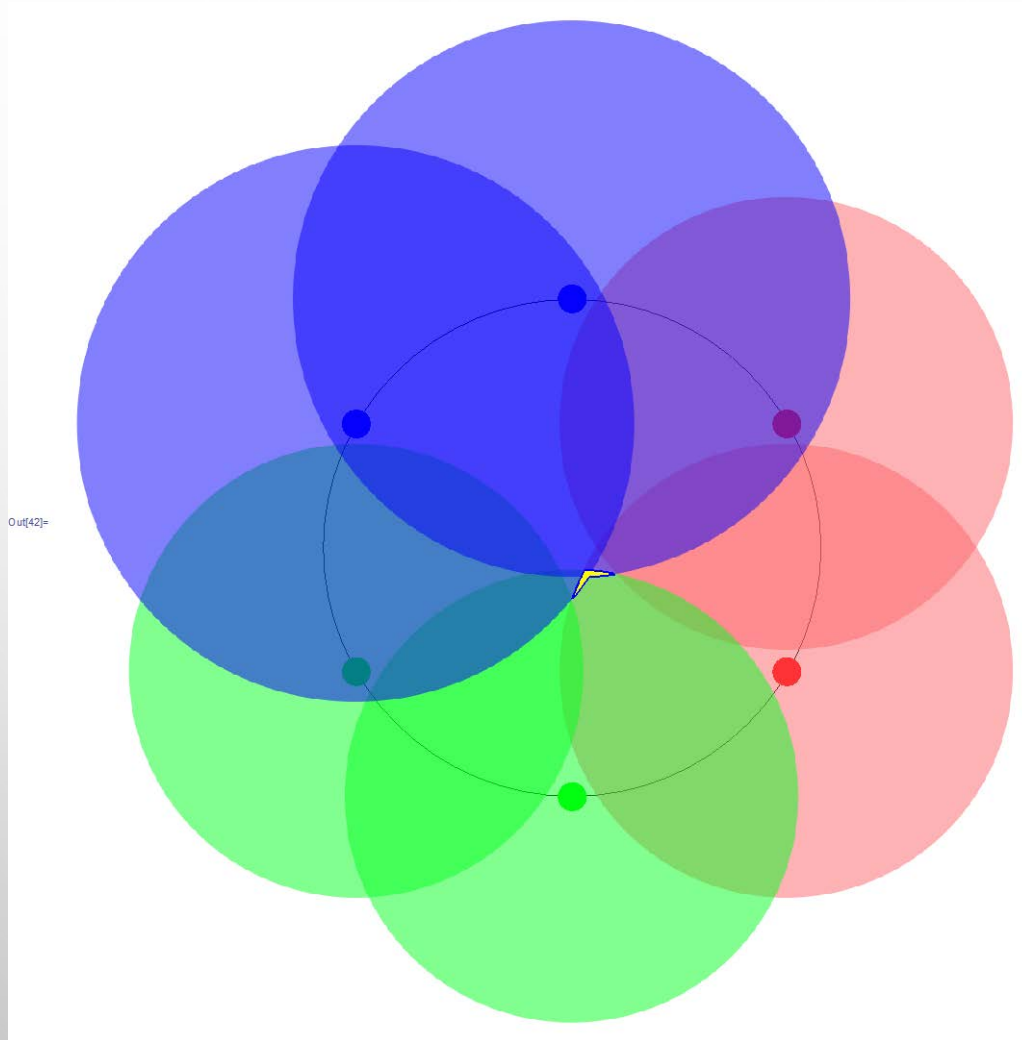
гд

Проблема Ферма-Штейнера в $H(X)$.



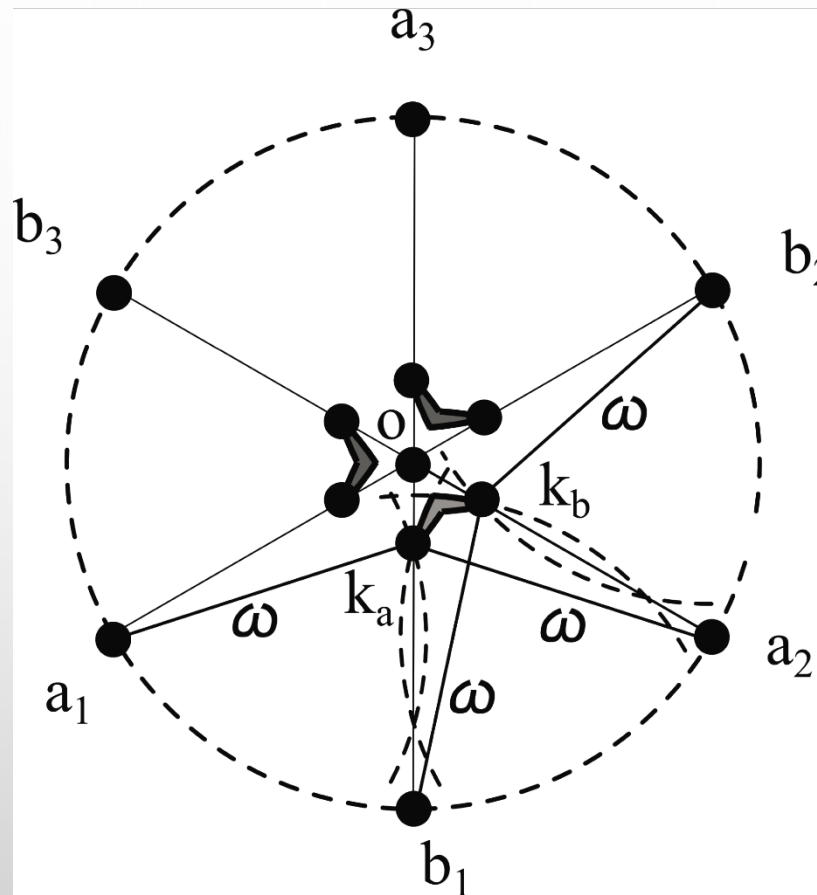
Пересечение двух из трех шаровых окрестностей.

Проблема Ферма-Штейнера в $H(X)$.



Пересечение трех шаровых окрестностей.

Проблема Ферма-Штейнера в $H(X)$.



Три наибольших и три минимальных компакта Штейнера

Проблема Штейнера в пространстве Громова-Хаусдорфа.

В теории расстояния Громова-Хаусдорфа наиболее популярным подсемейством метрических пространств (рассматриваемых с точностью до изометрии) является пространство $\mathcal{M} \subset \mathcal{GH}$ Громова-Хаусдорфа, состоящее из всех непустых компактных метрических пространств. Известно, что ограничение расстояния Громова-Хаусдорфа на $\mathcal{M}$ является метрикой. Впрочем, метрическое пространство – $\mathcal{M}$ достаточно большое, в частности, оно не является ограничено компактным, так что существование решения проблемы Штейнера в нем не очевидно.

Тем не менее, имеет место следующий результат.

Теорема (Иванов, Николаева, Тужилин).

Для любого непустого конечного $M \subset \mathcal{M}$, элементы которого – конечные метрические пространства, проблема Штейнера разрешима, т.е. $SMT(M, \mathcal{M}) \neq \emptyset$.

Задача. Верно ли, что $SMT(M, \mathcal{M}) \neq \emptyset$ для любого непустого конечного $M \subset \mathcal{M}$?
В каких еще семействах метрических пространств разрешима проблема Штейнера?

Минимальные остовные деревья.

Пусть X - конечное метрическое пространство, тогда

$\text{mst}(X) = \inf \{ |G| : G = (X, E) \text{ — дерево (связный граф без циклов)} \};$

$G = (X, E)$ — дерево, $|G| = \text{mst}(X)$, тогда G называется

минимальным остовным деревом на X ;

$\text{MST}(X) = \{ G : G \text{ минимальное остовное дерево на } X \};$

Ясно, что $\text{MST}(X) \neq \emptyset$ и $\#\text{MST}(X)$ может быть больше 1.

Пусть $\#X = n$. Для каждого $G \in \text{MST}(X)$ определим $\sigma(G) = (\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})$ — вектор из длин ребер дерева G , упорядоченных по убыванию.

Предложение. Для любого конечного метрического X и $G_1, G_2 \in \text{MST}(X)$ имеем $\sigma(G_1) = \sigma(G_2)$.

Таким образом, вектор $\sigma(G)$ не зависит от выбора G , поэтому он обозначается $\sigma(X)$ и называется **mst-спектром** X .

Теорема (Тужилин). Для конечного метрического пространства X , $\#X = n$, $\sigma(X) = (\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})$, положительного целого $2 \leq m \leq n$, и вещественного $\lambda \geq 2 \operatorname{diam} X$, выполняется

$$\sigma_{m-1} = \lambda - 2 d_{\text{GH}}(\lambda \Delta_m, X).$$

Таким образом, *длины ребер минимального остовного дерева на метрическом пространстве X выражаются через расстояния Громова-Хаусдорфа от пространства до некоторых симплексов.*

Обобщенная проблема Борсука.

Пусть X – ограниченное метрическое пространство диаметра d , и $m \leq \#X$ – кардинальное число. Будем говорить, что X может быть разбито на m подмножеств X_i строго меньшего диаметра, если для некоторого $\varepsilon > 0$ выполняется $\text{diam } X_i \leq d - \varepsilon$ для всех i .

Обобщенная проблема Борсука: описать те метрические пространства $X \in \mathcal{B}$, которые можно разбить на m подмножеств строго меньшего диаметра.

Немного истории:

1932, Karol Borsuk: стандартный n -мерный шар в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ может быть разбит на $n + 1$ подмножество меньшего диаметра, чем у шара.

Задача Борсука: верно ли то же самое для всех ограниченных подмножеств $\mathbb{R}^n$?

Верно: $n = 2$ (Borsuk), $n = 3$ (Perkal, Eggleston, Grünbaum, Heppes), гладких выпуклых тел (Hadwiger), центрально симметричных тел (Riesling), тел вращения (Dekster)

1993, Kahn and Kalai: в общем случае, **НЕВЕРНО** (для $n = 1325$ и $n > 2014$)

2013, Бондаренко: **неверно** для $n \geq 65$, **Jenrich** – для $n = 64$ (наилучшая известная оценка)

Теорема (Иванов, Тужилин). Для любого ограниченного метрического пространства X , любого кардинального числа $m \leq \#X$, и любого $0 < \lambda < \text{diam } X$, выполняется

$$2 d_{\text{GH}}(\lambda \Delta_m, X) \leq \text{diam } X .$$

Пространство X

- может быть разбито на подпространства строго меньшего диаметра, если и только если

$$2 d_{\text{GH}}(\lambda \Delta_m, X) < \text{diam } X, \text{ и}$$

- не может быть разбито на подпространства строго меньшего диаметра, если и только если

$$2 d_{\text{GH}}(\lambda \Delta_m, X) = \text{diam } X.$$

Число кликового покрытия.

Подграф произвольного простого графа G называется **кликой**, если любые две его вершины соединены ребром (т.е. подграф, являющийся полным графом).

Замечание. Каждый одновершинный граф является кликой.

Семейство вершин всех клик графа G покрывает множество вершин графа G . Наименьшее количество клик, образующих такое покрытие, называется **кликовым числом графа G** и часто обозначается $\theta(G)$. Нахождение наименьшего кликового покрытия является **NP**-трудной задачей.

Примеры.

- 1) Пустой граф (без ребер) с n вершинами: $\theta = n$;
- 2) Полный граф K_n с n вершинами: $\theta = 1$;
- 3) Полный k -дольный граф $K(n_1, \dots, n_k)$, $k > 1$, с долями размеров $n_1, \dots, n_k$:
$$\theta = \max\{n_1, \dots, n_k\};$$
- 4) Циклический граф C_n с n вершинами:
$$\theta = n/2 \text{ для четного } n, \text{ и } \theta = (n+1)/2 \text{ для нечетного } n.$$

Пусть $G = (V, E)$ – конечный граф. Фиксируем два вещественных числа $0 < a < b \leq 2a$.

Зададим метрику на V так: расстояние между смежными вершинами в G положим равным a , между несмежными вершинами в G – равным b .

Теорема (Иванов, Тужилин). Пусть m – наибольшее положительное целое число, для которого $2 d_{GH}(a\Delta_m, V) = b$, тогда $\theta(G) = m + 1$ (если такого m нет, то положим $m = 0$).

Примеры. 1) Для пустого графа n -вершинами, $V = b\Delta_n$, легко выяснить, что $2 d_{GH}(a\Delta_m, b\Delta_n) < b$ начиная с $m = n$, поэтому $\theta = n$.

2) Пусть $G = K_n$, тогда $V = a\Delta_n$ и $2 d_{GH}(a\Delta_m, a\Delta_n) < b$ для всех положительных m , тогда $m = 0$ и $\theta = m + 1 = 1$.

(3 and 4) Для соответствующих метрических пространств V получаем точные значения для $d_{GH}(a\Delta_m, V)$, так что знание кликового числа позволяет вычислять некоторые расстояния Громова-Хаусдорфа.

Хроматическое число.

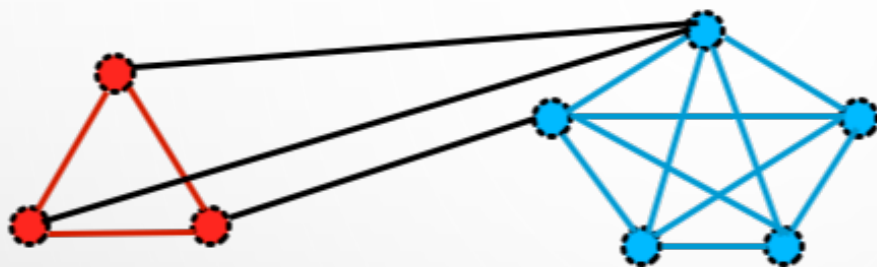
Хроматическое число простого графа G — это наименьшее число цветов, необходимых для **правильной раскраски** вершин графа: смежные вершины должны быть раскрашены в разные цвета. Хроматическое число графа G иногда обозначается $\gamma(G)$.

Двойственный граф G' графа G — это граф с тем же множеством вершин, ребра которого — это в точности все ребра полного графа, соединяющего несмежные вершины в G . Хорошо известно, что $\gamma(G) = \theta(G')$.

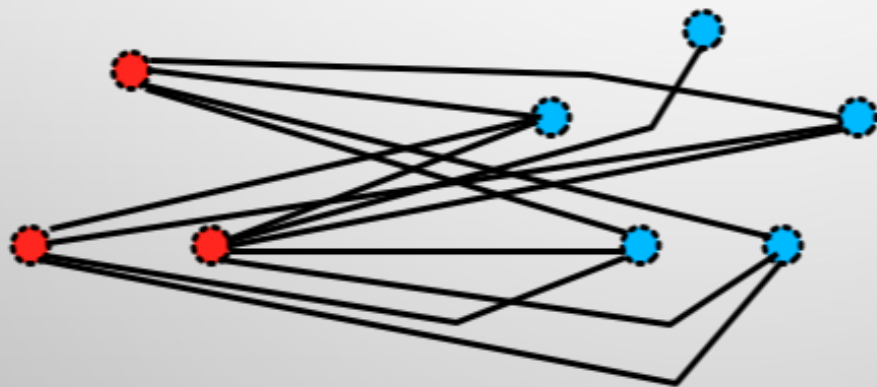
Примеры.

- 1) Пустой граф с n вершинами: $\gamma = 1$;
- 2) Полный граф K_n с n вершинами: $\gamma = n$;
- 3) Звездный граф с $n > 1$ вершинами: $\gamma = 2$;
- 4) Граф-колесо с $n > 1$ вершинами:
 $\gamma = 3$ для четного n , и $\gamma = 2$ для нечетного n ;
- 5) Циклический граф C_n с $n > 1$ вершинами:
 $\gamma = 2$ для четного n , и $\gamma = 3$ для нечетного n .

Хроматическое число и число кликового покрытия.



$$\theta(G)=2$$



$$\gamma(G')=2$$

Граф G покрыт двумя кликами, вершины двойственного графа G' покрашены в два цвета.

Пусть $G = (V, E)$ – произвольный конечный граф.
Фиксируем два вещественных числа $0 < a < b \leq 2a$.

Зададим метрику на V так: расстояние
между смежными вершинами в G положим равным b , и
между несмежными вершинами G – равным a .

Теорема (Иванов, Тужилин). Пусть m – наибольшее положительное
целое число такое, что $2d_{GH}(a\Delta_m, V) = b$, тогда $\gamma(G) = m + 1$
(если такого m нет, то положим $m = 0$).

Наши монографии



Спецкурс:

Каждый год - новый.

Спецсеминар:

А.О.Иванов, А.А.Тужилин «Теория экстремальных сетей», понедельник, 16:45, ауд. 14-03.

Детали см. на сайте кафедры <http://dfgm.math.msu.su/>



Спасибо за внимание!