Алгебраическая геометрия и ее приложения

А. Б. Жеглов, В. В. Пржиялковский

Алгебраическая геометрия

Алгебраическая геометрия — один из самых глубоких, развитых, сложных и распространенных разделов математики. Она связана с дифференциальной и симплектической геометрией, топологией, комплексным и функциональным анализом, алгеброй, теорией категорий, дискретной математикой, теорией вероятности, статистикой, теорией игр, компьютерной алгеброй, криптографией, математической физикой и многими другими областями.

Алгебраическая геометрия — один из самых глубоких, развитых, сложных и распространенных разделов математики. Она связана с дифференциальной и симплектической геометрией, топологией, комплексным и функциональным анализом, алгеброй, теорией категорий, дискретной математикой, теорией вероятности, статистикой, теорией игр, компьютерной алгеброй, криптографией, математической физикой и многими другими областями.
Объект изучения классической алгебраической геометрии — системы полиномиальных уравнений и их нули. Главный принцип: на них можно взглянуть алгебраически, как на уравнения, и геометрически, как на множества точек. Если кольцо определения коэффициентов уравнений является конечным полем, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ или их конечным расширением, то алгебраическая геометрия для них является (алгебраической) теорией чисел (арифметикой).

История

История алгебраической геометрии восходит к древним грекам (Аполлоний, Архимед). Так, ими изучались конические сечения.
Старт классической геометрии был дан Виетом и Декартом. После введения системы координат на окружность можно смотреть как на множество точек, равноудаленных от данной, так и на уравнение $x^2 + y^2 = 1$. Паскаль и Дезарг развили проективную геометрию.

История алгебраической геометрии восходит к древним грекам (Аполлоний, Архимед). Так, ими изучались конические сечения.
Старт классической геометрии был дан Виетом и Декартом. После введения системы координат на окружность можно смотреть как на множество точек, равноудаленных от данной, так и на уравнение $x^2 + y^2 = 1$. Паскаль и Дезарг развили проективную геометрию.
Начало систематической алгебраической геометрии — XIX век. Начало положили Кляйн, Риман и другие. В дальнейшем алгебраическая геометрия развивалась благодаря итальянской школе (от Кремоны до Энриквеса), известной красотой своей математики. Термины группа Кремоны, поверхности Энриквеса или дю Валя, отображение Веронезе, вложение Сегре и многие другие встречаются в современных математических статьях постоянно.
Большой вклад внес, с алгебраической точки зрения, Гильберт.

История

Временем настоящего расцвета алгебраической геометрии стал XX век. К первой половине XX века стало сложно следить за построениями итальянской школы из-за нестрогости многих их построений. Зарисский, А. Вейль и другие начали строить алгебраическую геометрию на основе коммутативной алгебры, интенсивно развивавшейся в 30-х и 40-х годах. В середине века революцию совершила французская школа. Гротендик, Серр и другие (большинство входило в группу Бурбаки) полностью переработали основания алгебраической геометрии с помощью теории пучков, теории схем и гомологической алгебры. Это формализовало и несколько “иссушило” науку, но придало ей строгость и привнесло радикально новые методы. Эта революция оказала сильнейшее влияние на другие разделы математики. В рамках алгебраической геометрии возникли теория категорий, теория Ходжа (Гриффитс, Делинь), новую жизнь вдохнули в бирациональную геометрию, теорию чисел.

История

Это привело к бурному расцвету алгебраической геометрии в 60-80-е годы. Большую роль в нем сыграла советская (а потом и российская) школа алгебраической геометрии, основанная И. Р. Шафаревичем. Его учениками и “научными потомками” являются ученики Аракелов, Голод, Долгачёв, Исковских, Кострикин, Манин, Мойшезон, Орлов, Паршин, Прохоров, Тюрин, Шокуров; большинство из них работали на мехмате. Так, Мойшезон ввел понятие мойшезонова многообразия, Исковских ввел и изучил один из центральных классов алгебраических многообразий — многообразия Фано, Шокуров внес важнейший вклад в развитие одного из главных методов современной бирациональной геометрии — программы минимальных моделей (его ученик Биркар получил за это в 2018 году Филдсовскую премию).

История

Наиболее широко известным относительно недавним достижением алгебраической геометрии стало доказательство теоремы Ферма. Сейчас алгебраическая геометрия активно используется в зеркальной симметрии — математической основе теории струн, физической теории, описывающей элементарные частицы.

История

Наиболее широко известным относительно недавним достижением алгебраической геометрии стало доказательство теоремы Ферма. Сейчас алгебраическая геометрия активно используется в зеркальной симметрии — математической основе теории струн, физической теории, описывающей элементарные частицы.
За последние тридцать лет ряд ученых получили Филдсовскую премию за достижения в алгебраической геометрии и смежных дисциплинах: Дринфельд (1990), Мори (1990), Бордчердс (1998), Концевич (1998), Лафforг (2002), Воеводский (2002), Окуньков (2006), Тяу (2010), Биркар (2018), Шольце (2018).
С 2003 года (даты основания) премию Абеля получили Серр, Атья, Делинь, Ленглендс.
Одним из важнейших центров алгебраической геометрии в мире является Москва.

Древние египтяне: построение прямого угла с помощью пифагоровой тройки

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

Как найти другие пифагоровы тройки? Пример:

$$n^2 + (2n+1) = (n+1)^2.$$

Таким образом, если $2n+1$ — полный квадрат, то мы получим пифагорову тройку. Есть ли другие?

Древние египтяне: построение прямого угла с помощью пифагоровой тройки

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

Как найти другие пифагоровы тройки? Пример:

$$n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

Таким образом, если $2n + 1$ — полный квадрат, то мы получим пифагорову тройку. Есть ли другие?

- Древняя Месопотамия (3000 до н. э.): $(9, 12, 15)$;

Древние египтяне: построение прямого угла с помощью пифагоровой тройки

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

Как найти другие пифагоровы тройки? Пример:

$$n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

Таким образом, если $2n + 1$ — полный квадрат, то мы получим пифагорову тройку. Есть ли другие?

- Древняя Месопотамия (3000 до н. э.): $(9, 12, 15)$;
- Пирамида Снофру (XXVII до н. э.): $(20, 21, 29)$;

Древние египтяне: построение прямого угла с помощью пифагоровой тройки

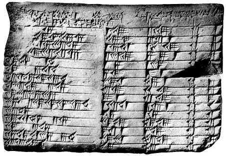
$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

Как найти другие пифагоровы тройки? Пример:

$$n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

Таким образом, если $2n + 1$ — полный квадрат, то мы получим пифагорову тройку. Есть ли другие?

- Древняя Месопотамия (3000 до н. э.): $(9, 12, 15)$;
- Пирамида Снофру (XXVII до н. э.): $(20, 21, 29)$;
- Глиняная табличка Plimpton 322 (XIX–XVII до н. э.): 15 вариантов.



Как найти все пифагоровы тройки? Нужно решить диофантово уравнение

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Можно предполагать, что a, b и c взаимно просты. Эквивалентно, нужно решить *в рациональных числах* уравнение

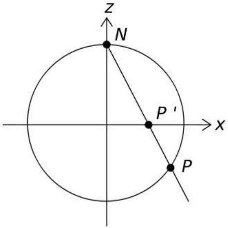
$$x^2 + z^2 = 1,$$

где $x = a/c$, $z = b/c$.

Множество точек, задаваемых таким уравнением — окружность. Найдем одно решение (рациональную точку на окружности) — $N = (0, 1)$. Будем проводить прямые через N и $P' = (\alpha, 0)$. Они имеют уравнение

$$x = \alpha - \alpha z.$$

Ограничив уравнение окружности на прямую, получим квадратное уравнение с известным рациональным решением. Второе решение (точка P) по теореме Виета рационально тогда и только тогда, когда α рационально.



Пифагоровы тройки

Любая пифагорова тройка имеет вид

$$\left(C \cdot 2mn, C \cdot (m^2 - n^2), C \cdot (m^2 + n^2)\right).$$

Таким же образом можно решить любое диофантово уравнение второго порядка, *если мы знаем одно решение*.

Определение

Абсолютно неприводимая кривая $\{f = 0\}$ называется *рациональной*, если существуют многочлены $F(u)$, $G(u)$ и $H(u)$, такие что $\frac{F}{H}$ и $\frac{G}{H}$ непостоянны и $f\left(\frac{F}{H}, \frac{G}{H}\right) = 0$.

Теорема

Коника над $\mathbb{Q}$, имеющая точку, рациональна.

Заметим, что не всякая коника имеет точку над $\mathbb{Q}$: например

$$x^2 + y^2 = -1.$$

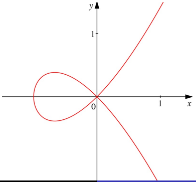
Рассмотрим кривую $E = \{y^2 = x^2(x+1)\}$, точку $P = (0,0)$ и прямые через нее. Кубическое уравнение, ограниченное на прямые, имеет корень кратности 2 в 0. Поэтому E рациональна. Причина: P — особая (т.е. матрица Якоби имеет в этой точке ранг 0)!

Вопрос

Может ли кубическая кривая иметь две особые точки?

Упражнение

Если кубическая кривая имеет рациональную точку, то особая точка рациональна.



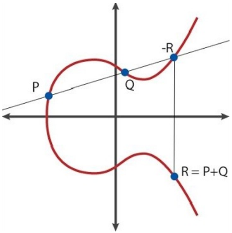
Простой вид: Вейерштрассова нормальная форма

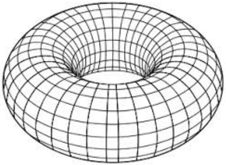
$$y^2 = x^3 + ax + b.$$

Теорема Ньютона

Неособая кубическая кривая приводится к форме Вейерштрасса проективной заменой. Если коэффициенты кривой рациональны и на ней есть рациональная точка, то коэффициенты формы Вейерштрасса рациональны.

(Неособая) плоская кубическая кривая называется *эллиптической*. Точки на эллиптической кривой можно складывать — эллиптическая кривая является *абелевым многообразием*. Если рассматривать все точки над полем $\mathbb{C}$, то наши кривые будут выглядеть как замкнутые поверхности.
Топологически: неособая рациональная кривая является сферой, эллиптическая кривая — тором.





Как устроена группа точек эллиптической кривой (*группа Морделла–Вейля*) над $\mathbb{Q}$? Это абелева группа, так что она состоит из кручения и свободной группы.

Теорема Мазура

Число t рациональных точек кручения равно $1, \dots, 10, 12, 16$.

Теорема Морделла

Ранг группы Морделла–Вейля эллиптической кривой E конечен.

Гипотеза Берча–Свиннертон-Даера

Ранг группы Морделла–Вейля эллиптической кривой E равен порядку нуля дзета-функции Хассе–Вейля $L(E, s)$ в точке $s = 1$.

Теорема Ферма

Не существует положительных целых чисел a, b, c, таких, что

$$a^n + b^n = c^n$$

для $n > 2$.

Теорема Ферма

Не существует положительных целых чисел a, b, c, таких, что

$$a^n + b^n = c^n$$

для $n > 2$.

Идея доказательства.

Пусть $a^n + b^n = c^n$. Рассмотрим эллиптическую кривую

$$y^2 = x^3 + (a^n b^n - a^n c^n - b^n c^n)x + a^n b^n c^n.$$

Можно показать, что такой эллиптической кривой не существует.

$\square$

Решения диф. уравнений

Одно из практических приложений методов алгебраической геометрии — построение класса явных решений нелинейных уравнений математической физики.
Опишем здесь две задачи, которые интересны с точки зрения различных таких возможных приложений, а также многочисленных связей с другими областями математики.

Пусть $k\{x_1, \dots, x_n\}$ обозначает кольцо функций (дифференцируемых) от n переменных, где $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, а k - поле характеристики 0.

Рассмотрим (некоммутативное) кольцо дифференциальных операторов:

$$D_n = k\{x_1, \dots, x_n\}[\partial_1, \dots, \partial_n]$$

Соотношения:

$$[\partial_i, f(x_1, \dots, x_n)] := \partial_i f - f \partial_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Кольцо дифференциальных операторов

Всякий оператор из этого кольца записывается в виде некоммутативного многочлена:

$$P = \sum_{i=(i_1,\dots,i_n)} p_i \partial^i, \quad p_i \in k\{x_1,\dots,x_n\}, \quad \partial^i = \partial_1^{i_1}\dots\partial_n^{i_n}$$

Почему важно кольцо D_n? Потому что оно встречается практически везде! Порождающие его дифференцирования встречаются в мат. анализе в виде производных, в диф. геометрии – в виде касательных векторов и векторных полей. Дифференциальные операторы возникают всякий раз, когда нужно решить дифференциальное уравнение:

Решить уравнение $f''(x) + a(x)f'(x) + b(x) = 0 \Leftrightarrow$ *Найти ядро* $f(x)$ *оператора* $P = \partial^2 + a(x)\partial + b(x)$.

Это кольцо встречается в деформационном квантовании, интегрируемых системах, спектральной теории...

В теории интегрируемых систем есть
две классические проблемы,
появившиеся и впервые исследовавшиеся еще в работах алгебраистов Шура и Бурхнала-Чаунди:

Задача

Как построить в явном виде наборы коммутирующих дифференциальных операторов с определенными свойствами?

Задача

Как классифицировать кольца коммутирующих дифференциальных операторов с определенными свойствами?

Коммутирующие дифференциальные операторы

С современной точки зрения такие кольца являются квантованиями колец коммутирующих относительно стандартной скобки Пуассона функций на кокасательном расслоении.

Явные примеры коммутирующих операторов позволяют строить точные решения ряда нелинейных уравнений в частных производных.

Один из подходов к решению этих проблем — исследование алгебро-геометрических спектральных данных таких колец.

Некоторые уравнения математической физики

Вот одно из известнейших уравнений мат. физики — уравнение Кадомцева-Петвиашвили:

$$(4u_t - u_{xxx} - 12uu_x)_x = 3u_{yy} \qquad u = u(t, x, y).$$

Оно было найдено Кадомцевым и Петвиашвили в 1970 году, когда они изучали так называемые солитонные решения не менее известного уравнения Кортевега де Фриза:

$$4u_t - u_{xxx} - 12uu_x = 0 \qquad u = u(t, x).$$

Это уравнение было получено в 1895 году из уравнения Навье-Стокса (с которым связана одна из нерешенных проблем тысячелетия!), для того чтобы описать модель движения волн на мелководье, наблюдаемое в канале.

Некоторые уравнения математической физики

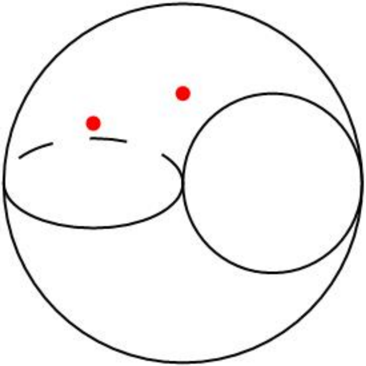
Найти все решения этих уравнений сложно, поскольку они нелинейны. Однако оказалось, что есть ряд точных решений, которые можно написать, используя алгебро-геометрические спектральные данные, в которые входят алгебраические кривые (или компактные двумерные ориентируемые поверхности) и векторные расслоения на них.

В результате получаются решения не только уравнений КП и КдВ, но целой бесконечной системы уравнений, которая коротко записывается в форме Лакса:

$$\frac{\partial L}{\partial t_n} = [(L^n)_+, L], \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Геометрические решения уравнений

Пример. Если ранг расслоения равен 1, его можно описать при помощи набора точек с кратностями на кривой. В этом случае соответствующие решения уравнений полностью описаны.



$$u(x,t) = \frac{2a^{-2}}{\mathrm{Ch}^2\left(\frac{x}{a} + \frac{t}{a^3}\right)}$$

Однако уже если ранг расслоения больше 1, известны лишь немногочисленные примеры таких решений.

Эти же геометрические объекты описывают подкольца коммутирующих дифференциальных операторов в кольце

$$D = k[[x]][\partial].$$

И, если можно явно выписать пару нетривиальных коммутирующих операторов, это дает возможность выписать потом решения уравнений КП или КдВ!
Особый интерес представляют примеры коммутирующих дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами.
Существует гипотеза, что их не очень много. Эта гипотеза связана с другой до сих пор открытой известной гипотезой Диксмье:

Гипотеза из алгебры: гипотеза Диксмье

Гипотеза

Верно ли, что всякий эндоморфизм алгебры

$$A_n = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n][\partial_1, \ldots, \partial_n]$$

является автоморфизмом?

Проблема открыта даже для $n = 1$! Известно, что она эквивалентна другой не менее известной гипотезе: о якобиане. В настоящее время теория коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов (т.е. операторов от одной переменной) хорошо развита, хотя и в ней остается много открытых вопросов.

Дальнейшие перспективы

А что можно сказать про кольца коммутирующих операторов в алгебре дифференциальных операторов от нескольких переменных?

Связаны ли они с решениями нелинейных уравнений в частных производных? С перечисленными открытыми проблемами?

Какие геометрические данные им соответствуют?

Как раз такими исследованиями занимаются в том числе на нашей кафедре. В этом направлении кое-что сделано, но многое предстоит еще открыть... Подробности вы можете узнать на домашней странице на сайте нашей кафедры, где есть ряд материалов, а также учебных пособий по этой теме, или лично (по е-мейлу).

Зеркальная симметрия

Рассмотрим дифференциальный оператор $D = t\frac{\partial}{\partial t}$ и дифференциальное уравнение $P(D,t)[I] = 0$, где P — некоторый многочлен. Пусть $I(t) = \sum a_i t^i$ — его решение. Его коэффициенты можно получить с помощью рекуррентного соотношения, определяемого формулами

$$t \cdot (a_i t^i) = a_i t^{i+1}, \qquad D \cdot (a_i t^i) = i a_i t^i.$$

Проблема

Найти многочлен Лорана f, такой что свободный член $[f^i]$ многочлена f^i равен a_i.

Зеркальная симметрия

Пример

Если

$$P(D,t) = D^2 - 3^3 t^3 (D+1)(D+2),$$

то рекурсия задается как

$$\sum n^2 a_n t^n = \sum 3^3 (n+1)(n+2) a_n t^{n+3}$$

и решение

$$I(t) = 1 + 3t^3 + \frac{6!}{2!^3} t^6 + \frac{9!}{3!^3} t^9 + \dots.$$

Для

$$f = x + y + \frac{1}{xy}$$

имеем $[f^{3k}] = \frac{(3k)!}{(k!)^3}$.

Откуда взялось это дифференциальное уравнение?

Откуда взялось это дифференциальное уравнение?
Физика: трехмерные многообразия Калаби–Яу описывают элементарные частицы.

Зеркальная симметрия

Откуда взялось это дифференциальное уравнение?
Физика: трехмерные многообразия Калаби–Яу описывают элементарные частицы.
Напоминание: многообразие Калаби–Яу — комплексное многообразие с везде определенной не обращающейся в ноль голоморфной старшей дифференциальной формой.

Зеркальная симметрия

Откуда взялось это дифференциальное уравнение?
Физика: трехмерные многообразия Калаби–Яу описывают элементарные частицы.
Напоминание: многообразие Калаби–Яу — комплексное многообразие с везде определенной не обращающейся в ноль голоморфной старшей дифференциальной формой.
Алгебраическое многообразие Калаби–Яу X имеет симплектические свойства $A(X)$ и алгебраические свойства $B(X)$.
Предсказание: для каждого X существует Y, такой что

Зеркальная двойственность

$$A(X) = B(Y), \quad B(X) = A(Y).$$

Зеркальная симметрия

Многообразие Фано X: существует вложение $X \subset \mathbb{P}^N$, в котором гиперплоские сечения являются в точности полюсами глобальных дифференциальных форм, взятых с некоторой тензорной кратностью.

Пример: $\mathbb{P}^1$: в аффинной карте $\mathbb{A}^1$ с координатой x формы пропорциональны dx; в карте с координатой $y = 1/x$ имеем $dx = -1/y^2 dy$. Поэтому эта форма имеет полюс второго порядка на бесконечности. Вложив $\mathbb{P}^1$ как конику в $\mathbb{P}^2$, видим, что $\mathbb{P}^1$ — многообразие Фано.

Многообразие Фано X: существует вложение $X \subset \mathbb{P}^N$, в котором гиперплоские сечения являются в точности полюсами глобальных дифференциальных форм, взятых с некоторой тензорной кратностью.
Пример: $\mathbb{P}^1$: в аффинной карте $\mathbb{A}^1$ с координатой x формы пропорциональны dx; в карте с координатой $y = 1/x$ имеем $dx = -1/y^2 dy$. Поэтому эта форма имеет полюс второго порядка на бесконечности. Вложив $\mathbb{P}^1$ как конику в $\mathbb{P}^2$, видим, что $\mathbb{P}^1$ — многообразие Фано.
Многообразие Фано: двойственный объект — модель Ландау–Гинзбурга $w\colon Y \to \mathbb{C}$, то есть многообразие с функцией, удовлетворяющей некоторым условиям.

Зеркальная симметрия

Когомологии $\mathbb{P}^2$: $(1, l, l^2)$, где l соответствует прямой, l^2 — точке. Иными словами, $H^*(\mathbb{P}^2, \mathbb{C}) = \mathbb{C}[l]/l^3$.
Квантовые когомологии: $l^{\star 3} = t^{\star 3}$, где t — формальный параметр. Иными словами, $H^*(\mathbb{P}^2, \mathbb{C}) = \mathbb{C}[l, t]/(l^{\star 3} - t^{\star 3})$.
Таблица квантового умножения:

$$1 \star l = l,$$

$$l \star l = l^2,$$

$$l^2 \star l = t^3.$$

Квантовое дифференциальное уравнение: D соответствует умножению на $3l$ (полюсу дифференциальной формы):

$$D^3 = 3^3 t^3.$$

Регуляризация: t меняется на Dt. Деля на D слева и используя $Dt = t(D+1)$, получим уравнение

$$D^2 = 3^3 t^3 (D+1)(D+2).$$

Рассмотрим $Y = (\mathbb{C}^*)^n$. Функция на Y — многочлен Лорана f.

Теорема

Пусть $Y_t = \{f = t\}$ — слой отображения f. Тогда существует послойная $(n-1)$-форма ω_t и $(n-1)$-цикл Δ_t, такие, что

$$\int_{\Delta_t} \omega_t = 1 + [f]t + [f^2]t^2 + [f^3]t^3 + \ldots.$$

Иными словами, этот ряд является *периодом* семейства $\{Y_t\}$.

Определение

Многочлен Лорана f называется *слабой моделью Ландау–Гинзбурга* для многообразия Фано X, если периоды для f являются решением регуляризованного квантового дифференциального уравнения для X. Говорят, что для X и f *выполнена гипотеза зеркальной симметрии вариаций структур Ходжа.*

Следствие

Многочлен

$$x + y + \frac{1}{xy}$$

является слабой моделью Ландау–Гинзбурга для $\mathbb{P}^2$.

“Правильные” слабые модели Ландау–Гинзбурга обладают многими свойствами, связанными с исходным многообразием. Говорят, что f удовлетворяет *условию Калаби–Яу*, если слои семейства $\{Y=\lambda\}$ можно компактифицировать до семейства многообразий Калаби–Яу. Говорят, что f удовлетворяет торическому условию, если “веерный многогранник” торического вырождения для X совпадает с многогранником Ньютона для f.

Определение

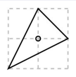
Слабая модель Ландау–Гинзбурга f для многообразия Фано X называется *торической моделью Ландау–Гинзбурга*, если она удовлетворяет условию Калаби–Яу и торическому условию.

Пример

Семейство $\{x + y + \frac{1}{xy} = \lambda\}$ компактифицируется до семейства гладких кубических кривых $\{(x+y)xy + z^3 = \lambda xyz\}$, то есть эллиптических кривых — одномерных многообразий Калаби–Яу.

Проективная плоскость $\mathbb{P}^2$ является торическим многообразием: на ней действует тор $(\mathbb{C}^*)^2 = (\mathbb{C}^*)^3/\mathbb{C}^*$ через

$$(z_0 : z_1 : z_2) \to (\lambda_0 z_0 : \lambda_1 z_1 : \lambda_2 z_2).$$

Его веерный многогранник  совпадает с многогранником Ньютона многочлена $x + y + \frac{1}{xy}$.

Таким образом, $x + y + \frac{1}{xy}$ является торической моделью Ландау–Гинзбурга для $\mathbb{P}^2$.

Оказывается, через торические модели Ландау–Гинзбурга можно вычислить множество инвариантов многообразий Фано — когомологии, структуры Ходжа, рациональность и другие. Более того, гладкие многообразия Фано классифицированы в размерности 2 (дель Пеццо) и 3 (Исковских, Мори–Мукаи). В размерности 4 и больше классификации нет, известно лишь, что их конечное число семейств (Коллар–Мияока–Мори, с ограниченными особенностями Биркар). Изучение торических моделей Ландау–Гинзбурга позволило воссоздать классификацию в размерности 2 и 3 (группа в Имперском Колледже Лондона) и дает подходы в высших размерностях.