Кафедра дифф. геометрии и приложений

****

**Лекторий**

**Для студентов 1-2 курса**

**«Современная геометрия»­­­**

**Лекция 18.12.2020**

**доц. А.Ю. Коняев, проф. Е.А. Кудрявцева, проф. А.А. Ошемков**

**«Алгебра и топология интегрируемых систем»**

Часть 1.

**Профессор А.А.Ошемков**

* 0:00 Общее введение.
* 2:10 **Динамическая система** - система ОДУ первого порядка на фазовом пространстве.
* 2:40, 4:12 Интегральная траектория векторного поля - решение системы.
* 4:50 **Качественное исследование** динамических систем: как описать динам. систему без явного решения системы дифф. Уравнений.
* Примеры качественных характеристик системы (7:40 особые точки - положения равновесия, их количество и тип, 9:29 линеаризация системы в особой точке, 10:18 замкнутые траектории - периодические решения, их количество и тип, 11:38 почти периодические решения, примеры: 13:32 теорема Пуанкаре-Хопфа, 15:20 теорема «о причесывании ежа», 16:10 теорема Люстерника-Шнирельмана о существовании трех замкнутых геодезических).
* 18:12 Интегрируемость и хаос, примеры (геодезические потоки на поверхностях, биллиарды в различных областях, геодезические на эллипсоиде).
* 21:04 **Гамильтоновы** системы (симплектическое многообразие, функция Гамильтона, гамильтонова динамическая система).
* 25:02 **Первый интеграл** системы. Поверхности уровня.
* 26:31 **Теорема Лиувилля**, торы Лиувилля (регулярные слои) и особые слои.
* 30:30 **Ключевые вопросы** в теории ИГС: устройство особых слоев и их окрестностей в фазовом пространстве.
* 31:43 Простейший пример интегрируемой системы с одной степенью свободы (комбинаторное описание с помощью графов, атомов).

Часть 2.

**Доцент А.Ю. Коняев**

* 35:57 Поиск первых интегралов - это нетривиальная глобальная задача (локально в неособых точках всегда существуют).
* 38:12 Примеры **препятствий к интегрируемости** - особые точки типа узел (топологические препятствия), 39:40 седло (аналитические препятствия - ответ разный в аналитическом и гладком случаях).
* 46: 36 **Геометрические структуры**: симплектическая структура, риманова метрика и др.
* 48:26 Механизмы и **методы интегрируемости**, примеры: уравнение с разделяющимися переменными 50:23 (геометрический метод годографа - ищем обратную функцию), механизм интегрирования, связанный с оператором Нийенхейса 53:48.
* 54:36 **Операторное поле** (задается матрицей в каждой точке аналогично симплектической или пуассоновой структуре и римановой метрике), примеры возникновения: строится по первой и второй квадратичным формам, 56:13 строится у *бигамильтоновой* системы по двум согласованным пуассоновым (симлектическим) структурам.
* 59:07 Тензор Нийенхейса, **оператор Нийенхейса**.

Часть 3.

**Профессор Е.А. Кудрявцева**

* 1:00:35 4-мерные интегрируемые системы. Наши коллеги и ученики, изучающие их.
* 1:02:40 Интегральное отображение (отображение момента), особое множество, бифуркационная диаграмма.
* 1:04:46 Теорема Лиувилля (стандартная модель слоения в окрестности тора Лиувилля, переменные действие-угол, явная формула для переменных действия).
* 1:06:38 **Открытая проблема 1**: **некомпактный** случай, примеры решений (Леви-Чивита и выпускники кафедры).
* 1:08:15 Иллюстрация особых слоев: седловая особенность с перекруткой или без нее (отвечает дугам бифуркационной диаграммы), бифуркация седловой особенности (отвечает точке возврата = каспу и другим особым точкам бифуркационной диаграммы), их структурная устойчивость (неустранимость каспа малыми возмущениями системы).
* 1:11:20 **Бифуркационный комплекс = база слоения Лиувилля** (клеточный комплекс, склеенный из «листов») - топологический инвариант слоения Лиувилля.
* 1:13:20 Пример базы слоения Лиувилля (= бифуркационного комплекса) и бифуркационной диаграммы (интегрируемый случай Эйлера из динамики твердого тела).
* 1:14:20 **Открытая проблема 2**: описать все слоения с базами «X x I» и «Y x I», пример (прямое произведение двух слоений на сфере).
* 1:15:26 **Структурно устойчивые** («типичные») особенности.
**Открытая проблема 3**: описать структурно устойчивые особенности и их бифуркации, примеры решений (выпускник и студент кафедры).
* 1:16:25 Иллюстрация целочисленной аффинной структуры на базе слоения Лиувилля = бифуркационном комплексе - на примере сферического маятника (перенос репера при обходе вокруг изолированной особой точки на базе, возникает целочисленная матрица перехода).
* 1:16:50 Задача Кеплера. **Пример решения проблемы 1:** регуляризация=компактификация Леви-Чивиты задачи Кеплера (1:18:25 область отрицательных значений энергии: периодические решения с эллиптическими орбитами и 1:19:20 случай падения на Солнце: некомпактность из-за наличия случая падения на Солнце – т.е. теорема Лиувилля вообще говоря неприменима), 1:21:19 комплексные координаты, 1:22:30 трюк Леви-Чивиты (переход на двулистное накрытие, слой Лиувилля стал компактным после домножения первого уравнения на знаменатель 1:24:30 , описание топологии слоения), открытый вопрос 1:29:30 о геометрии слоения в окрестности точек падения на Солнце.
* 1:33:52 **Итог**: три круга открытых проблем:
 1) полулокальные (в окрестности слоя) - некомпактные слои и их компактификация,

 2) глобальные (на всем пространстве) - описать все слоения с заданной базой,

 3) локальные (в окрестности точки) - описать структурно устойчивые особенности.
Возможные методы решения (метод разделяющихся переменных, дивизоры из алгебраической геометрии).