Лекции по дифференциальной геометрии и топологии.

А. О. Иванов, А. А. Тужилин

Содержание

Предисловие

Эта **книга является продолжением** наших *«Лекций по классической дифференциальной геометрии»* и **представляет собой** подробные конспекты лекций, читанных авторами на механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова для студентов второго и третьего курсов на протяжении более чем десяти лет. Напомним, что традиционно годовой курс дифференциальной геометрии делится на два семестра. Представленные 15 лекций относятся ко второму из них, который называется «Дифференциальная геометрия и топология».

Книга предназначена главным образом для студентов и аспирантов математических, физических и других естественнонаучных специальностей, как систематически изучающих геометрию, так и желающих продолжить беглое знакомство с предметом. Отметим, что эта книга, в комплекте с предыдущей, может быть использована при постановке полноценного курса геометрии для студентов университетов.

План курса. Фактически, этот второй семестр курса мог бы быть озаглавлен «Тензорный анализ на многообразиях». Тензоры и тензорные поля, простейшими примерами которых являются векторные поля и дифференциалы функций, — основные объекты изучения многих математических, механических и физических дисциплин. Мы начнем со стандартных определений тензора и тензорного поля на многообразии. Затем будет построена теория внешних дифференциальных форм (кососимметрических тензорных полей). Оказывается, именно дифференциальные формы представляют собой естественный объект интегрирования по гладкому многообразию. Мы докажем основную теорему интегрального исчисления (формулу Стокса), обобщающую известную формулу Ньютона–Лейбница, а в качестве приложения изучим когомологии де Рама — алгебраический объект, сопоставляемый многообразию, инвариантный при диффеоморфизмах и гомотопиях, а также отвечающий за разрешимость на многообразии дифференциальных уравнений специального вида. Затем мы вернемся к произвольным тензорным полям и построим для них общую теорию тензорного («ковариантного») дифференцирования. Несмотря на то, что таких дифференцирований оказывается много, все они, в некотором смысле, аналогичны ковариантному дифференцированию из теории поверхностей (теория Вейнгартена–Гаусса). В этих терминах можно определить аналог геодезических на поверхностях и параллельный перенос тензоров вдоль кривых, позволяющий сравнивать значения тензорного поля в разных точках многообразия. Будет изучен «маленький монстр» дифференциальной геометрии — тензор кривизны, являющийся аналогом гауссовой кривизны из теории поверхностей и характеризующий локальную «непохожесть» многообразия на евклидово пространство. Мы также познакомимся с понятием степени отображения — мощным топологическим инвариантом, позволяющим решать некоторые глобальные задачи дифференциальной геометрии. В заключении, мы рассмотрим общий подход к вариационным задачам, записав общие уравнения Эйлера–Лагранжа для таких геометрических вариационных функционалов, как длина, энергия и площадь.

Структура книги. Как и в первом семестре, каждая лекция представляет собой подробный конспект реальной лекции, рассчитанной на два академических часа. Затем приводится список задач, которые могут быть использованы при проведении семинарских занятий по теме этой лекции. Наконец, каждая лекция снабжена *Дополнительными материалами*, которые содержат не вошедшие в основной тест лекции примеры, конструкции и результаты, полезные для более глубокого знакомства с предметом, а также часть громоздких доказательств, не поместившихся в основной текст (обычно на лекциях студентам сообщается лишь идея такого доказательства и предлагается восстановить подробности самостоятельно).

Авторы пользуются случаем поблагодарить всех, кто учил и учит нас понимать и любить Геометрию. Прежде всего, нашего учителя, академика Анатолия Тимофеевича Фоменко, чьи замечательные лекции мы сами слушали на мехмате. Мы очень признательны профессорам А. С. Мищенко, $\boxed{\text{В. В. Трофимову}}$, $\boxed{\text{Ю. П. Соловьеву}}$, чьи лекции и семинары нам посчастливилось посещать, а также нашим коллегам–геометрам Л. А. Алании, А. В. Болсинову, В. Л. Голо, Д. П. Ильютко, Е. А. Кудрявцевой, В. М. Мануйлову, Н. Ю. Нецветаеву, И. М. Никонову, А. А. Ошемкову, Ф. Ю. Попеленскому, И. Х. Сабитову, А. Б. Скопенкову, Е. В. Троицкому, А. И. Шафаревичу за многочисленные интересные обсуждения, обмен опытом и полезные советы. Разумеется, эта книга никогда не была бы написана без нашего постоянного общения со студентами и аспирантами механико-математического факультета, которые пытались учиться по этим лекциям, за что мы им также очень признательны.

Мы пытались сделать изложение материала независимым, но не от первого семестра наших лекций. Все понятия, введенные в наших *Лекциях по классической дифференциальной геометрии*, предполагаются известными и используются без пояснений.

В заключении отметим, что в настоящий момент существует много замечательных учебников по дифференциальной геометрии. Их далеко не полный список приведен в конце книги.

Лекция 1. Тензоры и тензорные поля

В любой конкретной задаче, в конечном итоге, требуется определить поведение каких-нибудь числовых характеристик изучаемой системы. В простейшем случае эти числовые характеристики представляют собой функции, в общем случае они организуются в более сложные образования. Например, рассмотрим вектор в линейном пространстве $\mathbb{R}^n$. Чтобы производить реальные вычисления, нужно сначала фиксировать какие-нибудь координаты на конфигурационном пространстве рассматриваемой системы, скажем фиксировать базис в $\mathbb{R}^n$. Но, как только появляются координаты, так сразу требуется выяснить как преобразуются наши числовые данные при замене координат. В простейшем случае — случае функции, значение функции в точке конфигурационного пространства не зависит от системы координат. Такие величины часто называют *скалярными.* Однако в случае вектора в линейном пространстве $\mathbb{R}^n$ это уже не так: компоненты вектора при линейной замене координат преобразуются с помощью матрицы перехода этой замены. В этом семестре мы изучим естественное обобщение понятия «вектор» — понятие «тензор». Тензоры, говоря неформально, это числовые данные, заданные в линейном пространстве и меняющиеся при замене координат в линейном пространстве наиболее простым образом — полилинейным. Возможно, понятие тензора уже появлялось в курсе линейной алгебры и/или в курсе механики сплошной среды. Замечания о различии подходов дифференциальной геометрии и механики сплошной среды см. ниже.

В дифференциальной геометрии в качестве конфигурационных пространств выступают, конечно же, гладкие многообразия. В каждой точке P гладкого многообразия M имеется естественно определенное линейное пространство T_PM — касательное пространство к многообразию в данной точке. Поэтому в каждой точке многообразия можно задать тензор, а именно, тензор в этом линейном пространстве. Обычно в дифференциальной геометрии рассматривают не просто тензоры в касательном пространстве в какой-то одной точке, а тензорные поля, т.е. тензоры в касательных пространствах, гладко зависящие от точки многообразия. Однако, имея это в виду, мы начнем с простейших примеров тензоров, которые нам уже встречались, и с напоминания того, что такое тензоры в одном линейном пространстве.

Замечание. Будем использовать обозначения удобные в дифференциальной геометрии. Так, например, базис в линейном пространстве $\mathbb{R}^n = T_PM$ всегда соответствует некоторым локальным координатам x^i в окрестности точки P на гладком многообразии M, поэтому обозначается через $\{\partial_{x^i}\}$, а матрица перехода от базиса к базису в нашем случае — это матрица Якоби соответствующей замены координат в окрестности точки P, поэтому записывается в виде частных производных. В остальном наши определения ничем не отличаются от стандартных определений из курса линейной алгебры[1].

1.1. Простейшие примеры тензоров

Мы будем пользоваться следующим соглашением, которое используют в тензорном исчислении для упрощения записи выражений в «новых» координатах. Пусть x^i — «старые» координаты. Вместо того, чтобы каждые следующие «новые» координаты обозначать новыми буквами, скажем y^j, где i и j — независимые индексы, мы будем добавлять штрихи к старым буквам: ${x'}^{i'}$, где i и i' — снова независимые индексы. При этом, поскольку последняя запись является громоздкой и неудобной, мы будем сокращенно писать $x^{i'}$, опуская штрих у x, и подразумевая, что «штрих у индекса относится и к x и к i». Если же необходимо вместо i' подставить его значение, например, записать координату $x^{i'}$ при $i' = 1$, т.е. первую «новую» координату, то будем писать так: $x^{1'}$.

Касательный вектор. Пусть M — гладкое n-мерное многообразие, P — его произвольная точка, и T_PM — касательное пространство в этой точке. Предположим, что фиксированы локальные координаты $(x^1, \dots, x^n)$. Тогда каждый касательный вектор $V \in T_PM$ в этих координатах однозначно определяется своими компонентами $(v^1, \dots, v^n)$ (относительно канонического базиса ∂_{x^i}). Если в окрестности точки P заданы еще одни локальные координаты $(x^{1'}, \dots, x^{n'})$, то компоненты $(v^{1'}, \dots, v^{n'})$ вектора V в этих «новых» «штрихованных» координатах, по определению, пересчитываются так:

$$v^{i'} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} v^i,$$

где $\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right)$ — матрица Якоби замены координат в точке P. Отметим, что эта формула в точности совпадает с формулой пересчета компонент вектора при замене базиса, известной из линейной алгебры. Действительно, канонические базисы ∂_{x^i} и $\partial_{x^{i'}}$ в касательном пространстве T_PM связаны, как известно, так:

$$\partial_{x^i} = \sum_{i'=1}^{n} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \partial_{x^{i'}},$$

т.е. матрица Якоби $J = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right)$ замены координат — это матрица перехода от базиса $\{\partial_{x^{i'}}\}$ к базису $\{\partial_{x^i}\}$. В матричном виде формула для

[1] В данной книге приведены все необходимые определения. В качестве учебника по линейной алгебре можно воспользоваться, например, замечательными книгами И. М. Гельфанда или А. И. Кострикина и Ю. И. Манина

пересчета компонент вектора записывается так: $V' = JV$ (здесь V' и V — столбцы компонент рассматриваемого вектора в «новых» и «старых» координатах соответственно). Этот закон преобразования называется *тензорным законом преобразования компонент вектора.*

Дифференциал функции — ковектор. Пусть снова M — гладкое n-мерное многообразие, P — произвольная точка из M, и f — гладкая функция на M. Тогда, как мы уже знаем, определено линейное отображение $df|_P$ линейного пространства $T_PM = \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^1$, т.е. линейная функция на T_PM, называемая дифференциалом функции f. Напомним, что в линейной алгебре линейные функции называются *линейными функционалами.* Если в окрестности точки P фиксированы локальные координаты $(x^1, \dots, x^n)$, то, напомним, дифференциал функции f однозначно определяется матрицей, состоящей из одной строки, которая в координатах $(x^1, \dots, x^n)$ (т.е. в каноническом базисе ∂_{x^i}) имеет вид

$$df = \Big(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\Big),$$

где все частные производные вычисляются в точке P. Если в окрестности точки P заданы еще одни локальные координаты $(x^{1'}, \dots, x^{n'})$, то компоненты матриц дифференциала в разных системах координат — частные производные, связаны между собой так:

$$\frac{\partial f}{\partial x^{i'}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Отметим, что эта формула отличается от формулы преобразования компонент вектора. Однако, эта формула тоже известна из линейной алгебры.

Действительно, рассмотрим двойственное пространство T_P^*M к касательному пространству T_PM, т.е. пространство всех линейных функций на пространстве T_PM. Если фиксированы локальные координаты $(x^1, \dots, x^n)$ в окрестности точки P, и $\{\partial_{x^i}\}$ — канонический базис в линейном пространстве T_PM, то каждая линейная функция ξ, т.е. элемент пространства T_P^*M, однозначно определяется своими значениями на базисных векторах: если V — произвольный вектор из T_PM с компонентами $(v^1, \dots, v^n)$, то

$$\xi(V) = \xi\Big(\sum_{k=1}^{n} v^i \partial_{x^i}\Big) = \sum_{k=1}^{n} v^i \xi(\partial_{x^i}) = \sum_{k=1}^{n} v^i \xi_i,$$

где числа $\xi_i = \xi(\partial_{x^i})$ называются *компонентами линейной функции* ξ в координатах $(x^1, \dots, x^n)$. На самом деле, напомним, в линейном пространстве T_P^*M каноническим образом определен *двойственный базис*

$\{dx^i \in T^*_P M\}$, где линейный функционал dx^i однозначно определяется из соотношений

$$dx^i(\partial_{x^j}) = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

(Отметим, что функционал dx^i — это дифференциал гладкой функции, заданной в рассматриваемой карте, а именно функции, сопоставляющей точке P ее i-ую координату $x^i(P)$.) Линейная функция ξ однозначно представима в виде

$$\xi = \sum_{k=1}^{n} \xi_k dx^k.$$

Так вот, пусть теперь в окрестности точки P заданы еще одни локальные координаты $(x^{1'}, \ldots, x^{n'})$. Тогда, как легко проверить, компоненты линейного функционала ξ относительно разных систем координат связаны по уже знакомой нам формуле для компонент дифференциала:

$$\xi_{i'} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \xi_i.$$

В матричном виде эта формула записывается в виде $\xi' = \left(J^{-1}\right)^T \xi$, где J — матрица Якоби $\left(\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right)$ замены координат, а ξ и ξ' — столбцы из соответствующих компонент функционала. Отметим, что иногда эту же формулу записывают в виде $\xi' = \xi J^{-1}$, обозначая через ξ' и ξ строки из компонент функционала.

В тензорном анализе линейные функционалы называются *ковекторами*, а закон преобразования компонент линейного функционала, т.е. ковектора, называется *тензорным законом преобразования компонент ковектора*. Таким образом, дифференциал функции является ковектором, и его компоненты меняются по ковекторному закону.

Билинейная форма. Приведем еще один пример. Пусть снова M — гладкое n-мерное многообразие, и $T_P M$ — касательное пространство к M в некоторой точке $P \in M$. Рассмотрим на $T_P M$ билинейную форму B, т.е. отображение $B\colon T_P M \times T_P M \to \mathbb{R}^1$, линейное по каждому аргументу. Из линейной алгебры хорошо известно, что если в линейном пространстве фиксирован базис, то билинейная форма однозначно задается своими значениями на всевозможных парах базисных векторов. Эти значения образуют матрицу билинейной формы.

Действительно, если $(x^1, \ldots, x^n)$ — локальные координаты в окрестности точки P, а $V = (v^1, \ldots, v^n)$ и $W = (w^1, \ldots, w^n)$ — произвольные векторы из $T_P M$, заданные своими компонентами, то

$$B(V, W) = B\Big(\sum_{\alpha=1}^{n} v^\alpha \partial_{x^\alpha}, \ \sum_{\beta=1}^{n} w^\beta \partial_{x^\beta}\Big) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} B(\partial_{x^\alpha}, \partial_{x^\beta}) v^\alpha v^\beta,$$

т.е, положив $b_{\alpha\beta} = B(\partial_{x^\alpha}, \partial_{x^\beta})$, получаем:

$$B(V, W) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} b_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta.$$

Числа $b_{\alpha\beta}$ называются *компонентами билинейной формы* B в координатах $(x^1, \ldots, x^n)$.

Если теперь в окрестности точки P заданы другие локальные координаты $(x^{1'}, \ldots, x^{n'})$, то компоненты $b_{\alpha'\beta'} = B(\partial_{x^{\alpha'}}, \partial_{x^{\beta'}})$ билинейной формы B в этих координатах могут быть вычислены через компоненты b_{pq} формы B в координатах $(x^1, \ldots, x^n)$ так:

$$\begin{aligned} b_{\alpha'\beta'} &= B(\partial_{x^{\alpha'}}, \partial_{x^{\beta'}}) = B\Big(\sum_{p=1}^{n} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^p} \partial_{x^p}, \sum_{q=1}^{n} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^q} \partial_{x^q}\Big) \\ &= \sum_{p,q=1}^{n} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^p} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^q} B(\partial_{x^p}, \partial_{x^q}), \end{aligned}$$

т.е. окончательно:

$$b_{\alpha'\beta'} = \sum_{p,q=1}^{n} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^p} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^q} b_{pq}.$$

Этот закон преобразования называется *тензорным законом преобразования компонент билинейной формы.*

Отметим, что нам уже встречался пример билинейных форм, заданных на гладких многообразиях: это риманова метрика.

Упражнение 1.1. Рассмотреть линейный оператор $dF(P)\colon T_PM \to T_PM$, являющийся дифференциалом гладкого отображения $F\colon M \to M$, где $F(P) = P$. Выяснить, как преобразуются компоненты матрицы оператора $dF(P)$ при замене координат. Сравнить полученный закон с тензорным законом преобразования компонент билинейной формы.

1.2. Общее определение тензора

В предыдущем разделе мы напомнили определения хорошо известных из линейной алгебры и геометрии объектов: векторов, ковекторов, линейных операторов и билинейных форм. Все эти объекты, на самом деле, инвариантны, т.е. не зависят от выбора локальных координат (скажем, если оператор $\mathcal{A}$ переводит вектор V в вектор W, то он это делает в не зависимости от выбора локальных координат; оператор «объективен», а координаты — «субъективны»; оператор «не знает» в каких координатах мы записываем его матрицу). Координатное представление (компоненты) каждого из указанных объектов при замене координат меняется, но меняется по строго определенному правилу — по тензорному закону.

Тензоры на линейном пространстве T_PM, которые мы сейчас определим, являются естественным обобщением всех этих понятий. Мы дадим здесь два определения тензора, одно из которых координатное, а другое инвариантное.

Координатное определение тензора и тензорного поля. Данное в этом пункте определение особенно полезно при конкретных вычислениях.

Определение. *Тензором типа* (p,q) *ранга* $p+q$ в касательном пространстве T_PM называется соответствие T, сопоставляющее каждой локальной системе координат $(x^1,\dots,x^n)$ набор из n^{p+q} чисел $T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$, где все верхние и нижние индексы независимо принимают значения от 1 до n, а n — размерность линейного пространства T_PM, т.е. размерность многообразия M. Числа $T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ называются *координатами* или *компонентами тензора* T в локальных координатах $(x^1,\dots,x^n)$. При этом, если $(x^{1'},\dots,x^{n'})$ — другая локальная система координат в окрестности точки P, то компоненты $T^{i'_1\dots i'_p}_{j'_1\dots j'_q}$ тензора T в этой новой системе координат связаны с его компонентами в старой системе координат по следующему правилу, называемому *тензорным законом*:

$$T^{i'_1\dots i'_p}_{j'_1\dots j'_q}=\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_p=1}^{n}\sum_{j_1=1}^{n}\cdots\sum_{j_q=1}^{n}\frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}}\cdots\frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}}T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}.$$

Наконец, если на гладком многообразии M задано отображение $\mathbb{T}$, ставящее в соответствие каждой точке P многообразия некоторый тензор $T=\mathbb{T}(P)$ типа (p,q), причем, в каждой локальной системе координат $(x^1,\dots,x^n)$, компоненты тензора T гладко зависят от $(x^1,\dots,x^n)$, то говорят, что на многообразии M задано (гладкое) *тензорное поле* $\mathbb{T}$ *типа* (p,q).

Удобно считать произвольную константу *тензором типа* $(0,0)$, а произвольную гладкую функцию — *тензорным полем типа* $(0,0)$. Тензор (тензорное поле) типа $(0,0)$ принято называть *скаляром* (соответственно, *полем скаляров*).

Очевидно, вектор является тензором типа $(1,0)$ ранга 1, ковектор — тензором типа $(0,1)$ ранга 1, линейный оператор — тензором типа $(1,1)$ ранга 2, а билинейная форма — тензором типа $(0,2)$ ранга 2. Несколько позднее мы построим еще несколько важных примеров тензоров, а сейчас, прежде чем давать второе, инвариантное определение тензора, мы примем важное соглашение.

Формула, выражающая тензорный закон, очень громоздка. Она содержит $p+q$ знаков суммирования. Чтобы немного сократить записи тензорных вычислений, в тензорном анализе принято *опускать знак* *суммирования, если оно ведется по паре повторяющихся переменных индексов, один из которых верхний, а другой — нижний.* Отметим, что все суммы, входящие в запись тензорного закона, именно такие: например, индекс суммирования i_1 в правой части первый раз появляется в выражении $\dfrac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}}$, в котором является нижним (стоит в знаменателе), а второй раз — в выражении $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$, где является верхним. Таким образом, в силу принятого соглашения, тензорный закон записывается в более компактной форме так:

$$T^{i'_1\ldots i'_p}_{j'_1\ldots j'_q} = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}}\cdots\frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}}T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}.$$

Замечание. Так как все системы координат равноправны, тензорный закон может быть записан и в следующем, эквивалентном виде:

$$T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i'_p}}\frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{j'_q}}{\partial x^{j_q}}T^{i'_1\ldots i'_p}_{j'_1\ldots j'_q}. \qquad (*)$$

Мы определили тензор в T_PM как некоторое соответствие, сопоставляющее каждым локальным координатам в окрестности точки P наборы чисел, связанные между собой по тензорному закону. Возникает естественный вопрос: как задавать такие соответствия, т.е. тензоры? Неужели, нужно задавать наборы чисел для всех систем координат? Ответ на этот вопрос дает следующая простая лемма.

Лемма 1.1. *Пусть $(x^1, \ldots, x^n)$ — произвольные локальные координаты в окрестности точки P многообразия M размерности n. Сопоставим им произвольный набор $\left(T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\right)$ из n^{p+q} чисел. Любой другой системе координат $(x^{1'}, \ldots, x^{n'})$ поставим в соответствие набор чисел $\left(T^{i'_1\ldots i'_p}_{j'_1\ldots j'_q}\right)$, вычисленный по числам $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ и матрице Якоби замены координат по тензорному закону, т.е.*

$$T^{i'_1\ldots i'_p}_{j'_1\ldots j'_q} = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}}\cdots\frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}}T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}.$$

Построенное соответствие задает тензор в T_PM. Таким образом, чтобы задать тензор типа (p,q) в пространстве T_PM достаточно задать его компоненты в какой-нибудь одной системе координат, а во всех остальных системах координат пересчитать компоненты по тензорному закону.

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно проверить, что если

$$T^{i'_1\ldots i'_p}_{j'_1\ldots j'_q} = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}}\cdots\frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}}T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$$

и

$$T^{i_1''\dots i_p''}_{j_1''\dots j_q''} = \frac{\partial x^{i_1''}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_p''}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j_1''}} \cdots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j_q''}} T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} \qquad (**)$$

— вычисленные нами наборы чисел, которые мы хотим сопоставить координатам $(x^{1'}, \dots, x^{n'})$ и $(x^{1''}, \dots, x^{n''})$ соответственно, то они связаны между собой по тензорному закону, т.е.

$$T^{i_1''\dots i_p''}_{j_1''\dots j_q''} = \frac{\partial x^{i_1''}}{\partial x^{i_1'}} \cdots \frac{\partial x^{i_p''}}{\partial x^{i_p'}} \frac{\partial x^{j_1'}}{\partial x^{j_1''}} \cdots \frac{\partial x^{j_q'}}{\partial x^{j_q''}} T^{i_1'\dots i_p'}_{j_1'\dots j_q'}.$$

Последнее равенство получается прямым подсчетом из формул $(*)$ и $(**)$. Лемма доказана.

Инвариантное определение тензора и тензорного поля. Определения тензора, которое мы приведем в данном разделе, имеет то преимущество, что в нем не участвуют локальные координаты, или, как говорят, оно инвариантно.

Итак, пусть M — гладкое n-мерное многообразие, P — произвольная его точка, T_PM — касательное пространство в точке P к многообразию M, и T_P^*M — двойственное к T_PM пространство линейных функционалов (ковекторов).

Определение. *Тензором T типа (p, q) ранга $p+q$ в пространстве T_PM* называется полилинейное (т.е. линейное по каждому аргументу) отображение

$$T\colon \underbrace{T_P^*M \times \dots \times T_P^*M}_{p \text{ раз}} \times \underbrace{T_PM \times \dots \times T_PM}_{q \text{ раз}} \to \mathbb{R}^1.$$

Утверждение 1.1. *Координатное и инвариантное определения тензора эквивалентны.*

Доказательство. Пусть задано полилинейное отображение T прямого произведения p экземпляров двойственного пространства T_P^*M и q экземпляров пространства T_PM в вещественные числа. Предположим, что фиксирована система локальных координат $(x^1, \dots, x^n)$ в окрестности точки P, и пусть, как обычно, $\{\partial_{x^i}\}$ и $\{dx^j\}$ — канонические взаимно двойственные базисы в T_PM и T_P^*M соответственно.

Лемма 1.2. *Если $(x^1, \dots, x^n)$ — локальные координаты, то полилинейное отображение T однозначно задается своими значениями на всевозможных комбинациях элементов канонических базисов вида*

$$\bigl(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_p}; \partial_{x^{j_1}}, \dots, \partial_{x^{j_q}}\bigr).$$

Доказательство. Действительно, пусть $\xi^1, \dots, \xi^p$ — произвольные ковекторы из $T^*_P M$, а $V_1, \dots, V_q$ — произвольные векторы из $T_P M$. Обозначим компоненты вектора V_i в каноническом базисе $\{\partial_{x^i}\}$ через $(v_i^1, \dots, v_i^n)$, а компоненты ковектора ξ^i в каноническом базисе $\{dx^j\}$ через $(\xi_1^i, \dots, \xi_n^i)$. Тогда, в силу полилинейности отображения T имеем:

$$T(\xi^1, \dots, \xi^p; V_1, \dots, V_q) = T\big(\xi^1_{i_1} dx^{i_1}, \dots, \xi^p_{i_p} dx^{i_p}; v_1^{j_1}\partial_{x^{j_1}}, \dots, v_q^{j_q}\partial_{x^{j_q}}\big) =$$
$$= \xi^1_{i_1}\cdots\xi^p_{i_p} v_1^{j_1}\cdots v_q{}^{j_q} T(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_p}; \partial_{x^{j_1}}, \dots, \partial_{x^{j_q}}).$$

Поэтому, зная значения полилинейного отображения T на базисных векторах и ковекторах, мы однозначно восстановим его на любых других, и наоборот, чтобы задать полилинейное отображение, достаточно задать его значения на комбинациях элементов канонических базисов. Лемма доказана.

Итак, обозначив значение $T(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_p}; \partial_{x^{j_1}}, \dots, \partial_{x^{j_q}})$ полилинейного отображения через $T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$, мы однозначно определим по полилинейному отображению T соответствие $\tilde{T}$, сопоставляющее локальным координатам $(x^1, \dots, x^n)$ набор чисел $T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$. Проверим, что соответствие $\tilde{T}$ действительно определяет тензор в смысле координатного определения. Для этого нужно убедиться, что наборы чисел, сопоставляемые соответствием $\tilde{T}$ разным локальным координатам, связаны по тензорному закону.

Проверим это. Пусть $(x^1, \dots, x^n)$ и $(x^{1'}, \dots, x^{n'})$ — две системы локальных координат. Наше соответствие $\tilde{T}$, которое мы построили по полилинейному отображению, устроено так:

$$\tilde{T}\colon \quad (x^1, \dots, x^n) \mapsto \quad T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} = T(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_p}; \partial_{x^{j_1}}, \dots, \partial_{x^{j_q}}),$$
$$\tilde{T}\colon \quad (x^{1'}, \dots, x^{n'}) \mapsto \quad T^{i'_1\dots i'_p}_{j'_1\dots j'_q} = T(dx^{i'_1}, \dots, dx^{i'_p}; \partial_{x^{j'_1}}, \dots, \partial_{x^{j'_q}}).$$

Чтобы найти связь между числами $T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ и $T^{i'_1\dots i'_p}_{j'_1\dots j'_q}$, воспользуемся связью между элементами канонических базисов в $T_P M$ и $T^*_P M$:

$$\partial_{x^{i'}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\partial_{x^i}, \qquad dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} dx^i.$$

Получим:

$$\begin{aligned}
T^{i'_1\dots i'_p}_{j'_1\dots j'_q} &= T(dx^{i'_1},\dots,dx^{i'_p};\partial_{x^{j'_1}},\dots,\partial_{x^{j'_q}}) = \\
&= T\Big(\frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}}dx^{i_1},\dots,\frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}}dx^{i_p};\frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}}\partial_{x^{j_1}},\dots,\frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}}\partial_{x^{j_q}}\Big) = \\
&= \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}}\cdots\frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}}T(dx^{i_1},\dots,dx^{i_p};\partial_{x^{j_1}},\dots,\partial_{x^{j_q}}) = \\
&= \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}}\cdots\frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}}T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}.
\end{aligned}$$

Это и есть тензорный закон. Таким образом, наше соответствие $\tilde{T}$ действительно задает тензор, и мы показали, что по каждому полилинейному отображению T однозначно строится тензор в смысле координатного определения.

Обратно, пусть задан тензор T в смысле координатного определения, и пусть снова фиксированы локальные координаты $(x^1,\dots,x^n)$. Тогда, в силу леммы 1.2, по набору компонент $T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ тензора T, можно однозначно определить полилинейное отображение $\tilde{T}$, положив

$$\tilde{T}(dx^{i_1},\dots,dx^{i_p};\partial_{x^{j_1}},\dots,\partial_{x^{j_q}}) = T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}.$$

Для завершения доказательства остается убедиться, что определенное нами полилинейное отображение $\tilde{T}$ определено корректно, т.е. не зависит от локальной системы координат $(x^1,\dots,x^n)$, фигурирующей в определении $\tilde{T}$.

Проверим это. Пусть $(x^{1'},\dots,x^{n'})$ — другая система локальных координат. Тогда соотношения

$$S(dx^{i'_1},\dots,dx^{i'_p};\partial_{x^{j'_1}},\dots,\partial_{x^{j'_q}}) = T^{i'_1\dots i'_p}_{j'_1\dots j'_q}$$

определяют, вообще говоря, другое полилинейное отображение S. Вычислим значение отображения $\tilde{T}$ на канонических базисных векторах штрихованной системы координат. Получим:

$$\begin{aligned}
\tilde{T}(dx^{i'_1},\dots,dx^{i'_p};\partial_{x^{j'_1}},\dots,\partial_{x^{j'_q}}) &= \\
= \tilde{T}\big(\frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}}dx^{i_1},\dots,\frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}}dx^{i_p};\frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}}\partial_{x^{j_1}},\dots,\frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}}\partial_{x^{j_q}}\big) &= \\
= \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}}\cdots\frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}}\tilde{T}(dx^{i_1},\dots,dx^{i_p};\partial_{x^{j_1}},\dots,\partial_{x^{j_q}}) &= \\
= \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}}\cdots\frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}}T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} &= \\
= T^{i'_1\dots i'_p}_{j'_1\dots j'_q} = S(dx^{i'_1},\dots,dx^{i'_p};\partial_{x^{j'_1}},\dots,\partial_{x^{j'_q}}),
\end{aligned}$$

что и означает совпадение полилинейных отображений $\tilde{T}$ и S. Таким образом, по каждому тензору в смысле координатного определения, мы построили корректно определенное полилинейное отображение. Утверждение доказано.

Замечание. Тензорное поле $\mathbb{T}$ можно определить как гладко зависящее от точки многообразия семейство полилинейных отображений описанного выше типа. Это означает, что если фиксированы локальные координаты $(x^1, \dots, x^n)$ в карте U, то для каждой точки $P \in U$ значение

$$\mathbb{T}(P, dx^{i_1}, \dots, dx^{i_p}; \partial_{x^{j_1}}, \dots, \partial_{x^{j_q}})$$

поля $\mathbb{T}$ на любом фиксированном наборе базисных ковекторов $dx^{i_1}, \dots, dx^{i_p}$ и векторов $\partial_{x^{j_1}}, \dots, \partial_{x^{j_q}}$ гладко зависит от $P \in U$. Другими словами, если определить аналог касательного расслоения — расслоение $T^{(p,q)}M$ со слоем

$$T^{(p,q)} = \underbrace{T_P^*M \times \dots \times T_P^*M}_{p \text{ раз}} \times \underbrace{T_PM \times \dots \times T_PM}_{q \text{ раз}},$$

то тензорное поле $\mathbb{T}$ — это гладкое отображение $\mathbb{T}\colon T^{(p,q)}M \to \mathbb{R}^1$ такое, что для любой фиксированной точки P соответиствующее отображение слоя — полилинейно.

Замечание. Каждое полилинейное отображение $A\colon \big(T_PM\big)^q \to T_PM$ со значениями в векторном пространстве T_PM однозначно определяет тензор типа $(1,q)$. Действительно, определим отображение $T_A\colon T_P^*M \times \big(T_PM\big)^q \to \mathbb{R}^1$, положив для любых векторов $V_1, \dots, V_n$ и произвольного ковектора ξ

$$T_A\colon (\xi, V_1, \dots, V_q) \mapsto \xi\big(A(V_1, \dots, V_q)\big).$$

Очевидно, T_A — полилинейное отображение, т.е. тензор типа $(1,q)$. Обратно, если T — тензор типа $(1,q)$, то определено отображение $A_T\colon \big(T_PM\big)^q \to T_PM$, устроенное так:

$$\xi\big(A_T(V_1, \dots, V_q)\big) = T(\xi, V_1, \dots, V_q)$$

для произвольного ковектора ξ и векторов $V_1, \dots, V_n$.

1.3. Линейное пространство тензоров

Рассмотрим множество $\mathbb{T}_q^p$ всех тензоров фиксированного типа (p,q) в касательном пространстве T_PM в точке P к многообразию M. Поскольку линейная комбинация полилинейных отображений тоже является полилинейным отображением, множество $\mathbb{T}_q^p$ образует линейное пространство. Чтобы определить размерность этого пространства, предъявим естественный базис в нем. А именно, пусть фиксированы локальные координаты $(x^1, \dots, x^n)$. Определим полилинейные отображения

$$\Delta_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}\colon \big(T_P^*M\big)^p \times \big(T_PM\big)^q \to \mathbb{R}^1,$$

положив для любых ковекторов $\xi^1, \dots, \xi^p$ и векторов $V_1, \dots, V_q$

$$\Delta^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p}\big(\xi^1, \dots, \xi^p; V_1, \dots, V_q\big) = \partial_{x^{i_1}}(\xi^1)\cdots\partial_{x^{i_p}}(\xi^p)dx^{j_1}(V_1)\cdots dx^{j_q}(V_q).$$

Другими словами,

$$\Delta^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p}\big(dx^{\alpha_1}, \dots, dx^{\alpha_p}; \partial_{x^{\beta_1}}, \dots, \partial_{x^{\beta_q}}\big) = \\ = \begin{cases} 1, & i_k = \alpha_k, \quad k = 1, \dots, p; \qquad j_l = \beta_l, \quad l = 1, \dots, q; \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

В силу леммы 1.2, каждое полилинейное отображение T можно представить в виде

$$T = T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\Delta^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p},$$

где

$$T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} = T\big(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_p}; \partial_{x^{j_1}}, \dots, \partial_{x^{j_q}}\big).$$

При этом, линейная комбинация

$$\Lambda = \lambda^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\Delta^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p}$$

не равна нулю, если хотя бы один коэффициент, скажем $\lambda^{\alpha_1\dots\alpha_p}_{\beta_1\dots\beta_q}$, отличен от нуля. Действительно, достаточно вычислить значение полилинейного отображения Λ на наборе векторов

$$dx^{\alpha_1}, \dots, dx^{\alpha_p}; \partial_{x^{\beta_1}}, \dots, \partial_{x^{\beta_q}},$$

которое будет, очевидно, равно $\lambda^{\alpha_1\dots\alpha_p}_{\beta_1\dots\beta_q}$ и, поэтому, отлично от нуля. Итак, мы показали, что полилинейные отображения

$$\Delta^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p},$$

где все индексы i_k и j_l пробегают независимо всевозможные значения от 1 до n, образуют базис в пространстве $\mathbb{T}^p_q$. Таким образом, мы доказали следующее полезное утверждение.

Утверждение 1.2. *Множество $\mathbb{T}^p_q$ всех тензоров типа (p, q) образует линейное пространство размерности n^{p+q}. Если фиксированы локальные координаты $(x^1, \dots, x^n)$, то в качестве базиса в пространстве $\mathbb{T}^p_q$ можно выбрать полилинейные отображения*

$$\Delta^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p},$$

где все индексы i_k и j_l пробегают независимо всевозможные значения от 1 до n. Этот базис называется ***каноническим***.

Замечание. Часто полилинейные отображения $\Delta^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}$ обозначают так:

$$\Delta^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} = \partial_{x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \partial_{x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_q}.$$

Естественность этих более громоздких обозначений будет понятна из следующей лекции.

Отметим, что если $(x^1, \ldots, x^n)$ и $(x^{1'}, \ldots, x^{n'})$ — две системы координат в окрестности точки P, то в пространстве $\mathbb{T}^p_q$ тензоров типа (p,q) в точке P возникает два канонических базиса

$$\Delta^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} \quad \text{и} \quad \Delta^{j'_1\ldots j'_q}_{i'_1\ldots i'_p}$$

которые связаны между собой, как несложно проверить, следующим образом:

$$\Delta^{j'_1\ldots j'_q}_{i'_1\ldots i'_p} = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i'_p}} \frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{j'_q}}{\partial x^{j_q}} \Delta^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}.$$

Задачи

Задача 1.1. Пусть на двойственном пространстве $T^*_P M$ к касательному пространству, т.е. на пространстве линейных функционалов на $T_P M$, задана билинейная форма $B\colon T^*_P M \times T^*_P M \to \mathbb{R}^1$. Если фиксированы локальные координаты $(x^1, \ldots, x^n)$, то форма B однозначно определяется своими значениями на всевозможных парах ковекторов из канонического базиса $\left(dx^i\right)^n_{i=1}$. Эти значения называются ***компонентами формы*** B в координатах $(x^1, \ldots, x^n)$. Вывести закон преобразования компонент формы B при замене координат. Совпадает ли он с законом преобразования компонент билинейной формы на $T_P M$?

Задача 1.2. Назовем тензор ***инвариантным***, если его компоненты не меняются ни при каких заменах координат. Доказать, что набор δ^j_i символов Кронекера задает инвариантный тензор типа $(1,1)$. Проверить, что тот же самый набор δ_{ij} задает уже не инвариантный тензор типа $(0,2)$.

Задача 1.3. Описать все инвариантные тензоры типа $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$ и $(2,2)$. Существуют ли инвариантные тензоры типа (p,q), если $p \neq q$?

Задача 1.4. Каким полилинейным отображениям соответствуют вектор, ковектор и линейный оператор? Выпишите явные формулы в локальных координатах.

Задача 1.5. Показать, что операция взятия смешанного произведения в $\mathbb{R}^3$ является тензором типа $(0,3)$ и найти его компоненты в стандартных декартовых координатах.

Задача 1.6. Показать, что операция взятия векторного произведения в $\mathbb{R}^3$ задает тензор типа $(1,2)$ и найти его компоненты в стандартных декартовых координатах.

Задача 1.7. На плоскости $\mathbb{R}^2$ фиксированы декартова (x,y) и полярная (r,φ) системы координат. В декартовых координатах задана точка $P = (\sqrt{3}, 1)$ и вектор $V \in T_P\mathbb{R}^2$, $V = (3,4)$. В полярных координатах задан ковектор $\xi \in T^*_P\mathbb{R}^2$, $\xi = (5,6)$. Вычислить $\xi(V)$.

Дополнительный материал

1.1. Линейный оператор — тензор типа $(1,1)$**.** Пусть снова M — гладкое n-мерное многообразие, P — некоторая точка из M, и пусть $F\colon M \to M$ — гладкое отображение многообразия M в себя, причем $F(P) = P$, т.е. P — неподвижная точка отображения F. Тогда, как мы уже знаем, определено линейное отображение $dF|_P\colon T_PM \to T_PM$ касательного пространства T_PM в себя — дифференциал гладкого отображения F в точке P. Если на многообразии в окрестности точки P заданы локальные координаты $(x^1,\dots,x^n)$, то, напомним, линейное отображение $dF|_P$ задается матрицей

$$\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right), \tag{$*$}$$

где $x^i = f^i(x^1,\dots,x^n)$, $i = 1,\dots,n$, — координатное представление отображения F в координатах $(x^1,\dots,x^n)$. Пусть теперь на многообразии M в окрестности точки P заданы еще одни локальные координаты $(x^{1'},\dots,x^{n'})$. Тогда, естественно, линейное отображение $dF|_P$ задается в этих новых координатах уже другой матрицей, элементы которой связаны с элементами матрицы $(*)$ так:

$$\frac{\partial f^{i'}}{\partial x^{j'}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^j}\,\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\,\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}},$$

где $x^{i'} = f^{i'}(x^{1'},\dots,x^{n'})$ — координатное представление отображения F в координатах $(x^{1'},\dots,x^{n'})$. Действительно, координатное представление отображения F в координатах $(x^{1'},\dots,x^{n'})$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} x^{i'} &= x^{i'}\Big(f^1\big(x^1(x^{1'},\dots,x^{n'}),\dots,x^n(x^{1'},\dots,x^{n'})\big),\dots \\ &\qquad \dots,f^n\big(x^1(x^{1'},\dots,x^{n'}),\dots,x^n(x^{1'},\dots,x^{n'})\big)\Big), \end{aligned}$$

поэтому остается воспользоваться теоремой о дифференцировании сложной функции.

Отметим, что закон преобразования элементов матрицы дифференциала также известен нам из линейной алгебры и совпадает с законом изменения матрицы линейного оператора при замене координат в линейном пространстве. Действительно, если A — произвольный линейный оператор, заданный на T_PM, и $(x^1,\dots,x^n)$ — локальные координаты в окрестности точки P, то оператор A однозначно задается компонентами образов векторов канонического базиса $\big(\partial_{x^i}\big)_{i=1}^n$ в этом же самом базисе. А именно, если $V = (v^1,\dots,v^n)$ — произвольный касательный вектор из T_PM, заданный своими координатами, то

$$A(V) = A\Big(\sum_{\alpha=1}^n v^\alpha \partial_{x^\alpha}\Big) = \sum_{\alpha=1}^n v^\alpha A(\partial_{x^\alpha}),$$

и, положив $A(\partial_{x^\alpha}) = a_\alpha^1 \partial_{x^1} + \dots + a_\alpha^n \partial_{x^n}$, получим

$$A(V) = \sum_{\alpha=1}^n v^\alpha \Big(\sum_{\beta=1}^n a_\alpha^\beta \partial_{x^\beta}\Big) = \sum_{\beta=1}^n \Big(\sum_{\alpha=1}^n a_\alpha^\beta v^\alpha\Big)\partial_{x^\beta}.$$

Числа a_α^β называются ***компонентами линейного оператора*** A в координатах x^i.

Пусть теперь $(x^{1'},\dots,x^{n'})$ — другие локальные координаты в окрестности точки P. Тогда компоненты линейного оператора A в этих новых координатах определяются из соотношения

$$A(\partial_{x^{\alpha'}}) = \sum_{\beta'=1}^n a_{\alpha'}^{\beta'} \partial_{x^{\beta'}}.$$

Воспользовавшись связью между векторами из канонических базисов, перепишем последнее соотношение в виде:

$$A\Bigl(\sum_{p=1}^{n}\frac{\partial x^p}{\partial x^{\alpha'}}\partial_{x^p}\Bigr)=\sum_{\beta'=1}^{n}a_{\alpha'}^{\beta'}\Bigl(\sum_{q=1}^{n}\frac{\partial x^q}{\partial x^{\beta'}}\partial_{x^q}\Bigr),$$

откуда, по определению компонент оператора A в координатах $(x^1,\dots,x^n)$,

$$\sum_{p=1}^{n}\frac{\partial x^p}{\partial x^{\alpha'}}\Bigl(\sum_{q=1}^{n}a_p^q\partial_{x^q}\Bigr)=\sum_{\beta'=1}^{n}a_{\alpha'}^{\beta'}\Bigl(\sum_{q=1}^{n}\frac{\partial x^q}{\partial x^{\beta'}}\partial_{x^q}\Bigr).$$

Приравняв коэффициенты при базисных векторах ∂_{x^q}, найдем:

$$\sum_{p=1}^{n}\frac{\partial x^p}{\partial x^{\alpha'}}a_p^q=\sum_{\beta'=1}^{n}a_{\alpha'}^{\beta'}\frac{\partial x^q}{\partial x^{\beta'}},$$

откуда, умножив на обратную матрицу, получаем окончательно:

$$a_{\alpha'}^{\beta'}=\sum_{p,q=1}^{n}\frac{\partial x^p}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^q}a_p^q.$$

Эти формулы называются ***тензорным законом преобразования компонент линейного оператора***.

Таким образом, линейный оператор — это тензор типа $(1,1)$. С точки зрения инвариантного определения, тензор A типа $(1,1)$ представляет собой два-линейное отображение $A\colon T_P^*M\times T_PM\to\mathbb{R}$. Построим по каждому такому отображению A соответствующий линейный оператор $L_A\colon T_PM\to T_PM$. Положим

$$\xi\bigl(L_A(V)\bigr)=A(\xi,V)$$

для произвольных $\xi\in T_P^*M$ и $V\in T_PM$. Ясно, что значение оператора на каждом векторе $V\in T_PM$ определено однозначно. Кроме того, в локальных координатах $(x^1,\dots,x^n)$ компоненты вектора $L_A(V)$ могут быть вычислены так:

$$L_A(V)^i=dx^i\bigl(L_A(V)\bigr)=A(dx^i,V)=a_j^iV^j,$$

где a_j^i — компоненты тензора A в координатах $((^1,\dots,(^n)x)$. Поэтому L_A — действительно линейный оператор. Обратно, та же формула однозначно определяет тензор A типа $(1,1)$ по линейному оператору L_A.

1.2. Одна очень простая задача. Пусть задан тензор T типа $(1,2)$. Найти его компоненту $T_{2'3'}^{1'}$ в локальных координатах $(x^{1'},\dots,x^{n'})$, если даны все его компоненты T_{jk}^i в локальных координатах $(x^1,\dots,x^n)$.

На всякий случай, приведем ответ к этой очень популярной на экзаменах задаче:

$$T_{2'3'}^{1'}=\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{2'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{3'}}T_{jk}^i;$$

по индексам i, j и k подразумевается суммирование.

1.3. Как строить примеры тензорных полей. Мы дали общее определение тензорного поля, но как построить пример такого поля на гладком многообразии? Конечно, можно рассмотреть тензорное поле любого типа, равное нулю в каждой точке многообразия. А как построить нетривиальный, т.е. не нулевой, пример? В прошлом семестре мы уже видели, как теорема Уитни о существовании вложения многообразия в евклидово пространство подходящей размерности позволяет построить пример римановой метрики, т.е. тензорного поля типа $(0,2)$. Эта же теорема приходит на помощь и в общем случае. А именно, ограничение гладкой функции, заданной на $\mathbb{R}^n$, на подмногообразие $M \subset \mathbb{R}^n$ является гладкой функцией на многообразии M. Так можно построить пример не постоянной функции на многообразии. Взяв дифференциал, мы получаем не нулевое ковекторное поле, т.е. тензорное поле типа $(0,1)$. Используя алгебраические операции, описанные в следующей лекции, можно построить примеры тензорных полей любого типа.

Лекция 2. Алгебраические операции над тензорами и тензорными полями

В данном лекции мы определим несколько операций, позволяющих конструировать новые тензоры (тензорные поля) из уже имеющихся. Такие операции обычно называются *тензорными.* Для простоты, мы будем вести речь о тензорах в фиксированной точке многообразия, но все определяемые ниже операции естественно переносятся и на тензорные поля. Там где это необходимо, мы приводим соответствующие комментарии.

2.1. Линейная комбинация

Пусть имеется два тензора P и T одинакового типа (p, q). Тогда для любых двух чисел λ и μ определен новый тензор $S = \lambda P + \mu T$ того же типа, называемый *линейной комбинацией тензоров P и T с коэффициентами λ и μ.* Здесь сложение и умножение на числа происходит в линейном пространстве $\mathbb{T}^p_q$ тензоров типа (p, q), поэтому S — действительно тензор типа (p, q). Если фиксированы локальные координаты $(x^1, \dots, x^n)$, то, очевидно, компоненты тензора S выражаются через компонент тензоров P и T так:

$$S^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = \lambda P^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \mu T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}.$$

Замечание. Отметим, что если мы работаем с тензорными полями, то в качестве коэффициентов в линейной комбинации выступают гладкие функции на многообразии.

2.2. Перестановка индексов одного типа

Пусть задан тензор T типа (p, q), и предположим, что задана некоторая перестановка $\sigma \in S_q$ множества из q элементов. Построим новый тензор ${}_\sigma T$, который определяется так: для любых ковекторов $\xi^1, \dots, \xi^p$ и векторов $V_1, \dots, V_q$ положим

$${}_\sigma T\big(\xi^1, \dots, \xi^p; V_1, \dots, V_q\big) = T\big(\xi^1, \dots, \xi^p; V_{\sigma(1)}, \dots, V_{\sigma(q)}\big),$$

т.е. мы переставили векторные аргументы полилинейного отображения T с помощью перестановки σ. Очевидно, ${}_\sigma T$ — полилинейное отображение, т.е. мы действительно определили некоторый новый тензор ${}_\sigma T$. Говорят, что тензор ${}_\sigma T$ получен из тензора T *перестановкой σ нижних индексов.*

Нам будет полезна следующая лемма.

Лемма 2.1. *Пусть σ и τ — перестановки из S_q. Тогда ${}_\tau({}_\sigma T) = {}_{\tau\sigma} T$.*

Доказательство. Действительно, для произвольных векторов $V_1, \dots, V_q$ имеем:

$$\begin{aligned} {}_\tau\big({}_\sigma T\big)\big(V_1, \dots, V_q\big) &= {}_\sigma T(V_{\tau(1)}, \dots, V_{\tau(q)}) = T(V_{\tau(\sigma(1))}, \dots, V_{\tau(\sigma(q))}) = \\ &= {}_{\tau\sigma}T(V_1, \dots, V_q). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Пусть $(x^1, \dots, x^n)$ — локальная система координат, и $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ — компоненты тензора T относительно $(x^1, \dots, x^n)$. Найдем компоненты тензора ${}_\sigma T$, для чего вычислим его значение на произвольной комбинации базисных векторов. Получим:

$$\begin{aligned} {}_\sigma T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} &= {}_\sigma T\big(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_p}; \partial_{x^{j_1}}, \dots, \partial_{x^{j_q}}\big) \\ &= T\big(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_p}; \partial_{x^{j_{\sigma(1)}}}, \dots, \partial_{x^{j_{\sigma(q)}}}\big) = T^{i_1 \dots i_p}_{j_{\sigma(1)} \dots j_{\sigma(q)}}. \end{aligned}$$

Итак, доказана следующая лемма.

Лемма 2.2. *Если тензор ${}_\sigma T$ получен из тензора T перестановкой σ нижних индексов, то компоненты тензора ${}_\sigma T$ в локальной системе координат $(x^1, \dots, x^n)$ выражаются так:*

$${}_\sigma T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = T^{i_1 \dots i_p}_{j_{\sigma(1)} \dots j_{\sigma(q)}},$$

где $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ — компоненты тензора T в $(x^1, \dots, x^n)$.

Замечание. Отметим, что перестановка меняет местами расположение индексов а не их значения. Например, если $\sigma = (1, 2, 3)$ — циклическая перестановка, т.е. $(\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3)) = (2, 3, 1)$ то, скажем,

$${}_\sigma T_{789} = T_{897},$$

и вообще,

$${}_\sigma T_{j_1 j_2 j_3} = T_{j_2 j_3 j_1}.$$

Аналогично определяется перестановка верхних индексов: если T — тензор типа (p, q), и π — произвольная перестановка из S_p, то тензор ${}^\pi T$ определяется так: для любых ковекторов $\xi^1, \dots, \xi^p$ и векторов $V_1, \dots, V_q$ положим

$${}^\pi T\big(\xi^1, \dots, \xi^p; V_1, \dots, V_q\big) = T\big(\xi^{\pi(1)}, \dots, \xi^{\pi(p)}; V_1, \dots, V_q\big).$$

Говорят, что тензор ${}^\pi T$ получен из тензора T *перестановкой π верхних индексов.* Имеет место следующее утверждение.

Лемма 2.3. *Если тензор ${}^{\pi}T$ получен из тензора T перестановкой π верхних индексов, то компоненты тензора ${}^{\pi}T$ в локальной системе координат $(x^1, \dots, x^n)$ выражаются так:*

$${}^{\pi}T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = T^{i_{\pi(1)} \dots i_{\pi(p)}}_{j_1 \dots j_q},$$

где $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ — компоненты тензора T в $(x^1, \dots, x^n)$.

Замечание. Менять местами верхние и нижние индексы, вообще говоря, нельзя, см. задачу 2.2.

2.3. Свертка

Если предыдущие операции было удобно определять в инвариантной форме, то операцию свертки нам будет проще определить в локальных координатах. Разберем сначала простейший случай тензора типа $(1,1)$ — линейного оператора.

Итак, пусть A — тензор типа $(1,1)$ в $T_P M$, и $(x^1, \dots, x^n)$ — произвольные локальные координаты в окрестности точки P. Обозначим, как обычно, через A^i_j компоненты тензора A в координатах $(x^1, \dots, x^n)$. Определим скаляр $C^1_1(A)$, положив $C^1_1(A) = A^i_i$. Эта величина называется *сверткой линейного оператора* или его *следом*.

Покажем, что величина $C^1_1(A)$ не зависит от выбора локальных координат, фигурирующих в определении. Для этого рассмотрим в окрестности точки P другую систему локальных координат $(x^{1'}, \dots, x^{n'})$, и пусть $A^{i'}_{j'}$ — компоненты тензора A в этих новых координатах. Нам нужно проверить, что $A^{i'}_{i'} = A^i_i$. Действительно, воспользовавшись тензорным законом, получаем:

$$A^{i'}_{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} A^i_j = \delta^j_i A^i_j = A^i_i,$$

где δ^j_i — символы Кронекера, что и требовалось. Итак, для каждого тензора типа $(1,1)$, мы построили скаляр, т.е. величину, не зависящую от локальных координат, называемую сверткой этого линейного оператора. Отметим, что след тензора A типа $(1,1)$ можно, также, записать в виде $C^1_1(A) = A(dx^i; \partial_{x^i})$.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть задан тензор T типа (p,q), где $p \geq 1$ и $q \geq 1$, и пусть $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ — его компоненты в локальных координатах $(x^1, \dots, x^n)$. Фиксируем два целых числа α и β, такие что $1 \leq \alpha \leq p$ и $1 \leq \beta \leq q$. Построим новый тензор $C^{\alpha}_{\beta}(T)$ типа $(p-1, q-1)$, компоненты которого в координатах $(x^1, \dots, x^n)$ имеют вид:

$$\left(C^{\alpha}_{\beta}(T)\right)^{i_1 \dots i_{p-1}}_{j_1 \dots j_{q-1}} = T^{i_1 \dots i_{\alpha-1} k i_{\alpha} \dots i_{p-1}}_{j_1 \dots j_{\beta-1} k j_{\beta} \dots j_{q-1}}.$$

Тензор $C^\alpha_\beta(T)$ называется *сверткой тензора T по верхнему индексу с номером α и нижнему индексу с номером β.* Чтобы проверить, что $C^\alpha_\beta(T)$ — корректно определенный тензор, следует рассмотреть еще одни локальные координаты $(x^{1'},\dots,x^{n'})$, в которых определен, вообще говоря, другой тензор $\tilde C^\alpha_\beta(T)$, компоненты которого в координатах $(x^{1'},\dots,x^{n'})$ имеют вид

$$\bigl(\tilde C^\alpha_\beta(T)\bigr)^{i'_1\dots i'_{p-1}}_{j'_1\dots j'_{q-1}} = T^{i'_1\dots i'_{\alpha-1}k' i'_\alpha\dots i'_{p-1}}_{j'_1\dots j'_{\beta-1}k' j'_\beta\dots j'_{q-1}},$$

и, воспользовавшись тензорным законом, убедиться что $\tilde C^\alpha_\beta(T)$ совпадает с $C^\alpha_\beta(T)$.

Упражнение 2.1. Проверить совпадение тензоров $C^\alpha_\beta(T)$ и $\tilde C^\alpha_\beta(T)$ с помощью тензорного закона.

Особый интерес представляет случай тензоров типа (p,p). В этом случае с помощью последовательного применения p штук последовательных операций свертки можно построить по тензору скаляр, который называется *полной сверткой.*

Упражнение 2.2. Зависит ли полная свертка тензора от того, по каким парам индексов производится сворачивание?

2.4. Тензорное произведение

Пусть в T_PM заданы два тензора: тензор T типа (p,q) и тензор S типа (u,v). Определим новый тензор $T\otimes S$ типа $(p+u,q+v)$, положив для произвольных ковекторов $\xi^1,\dots,\xi^{p+u}$, и векторов $V_1,\dots,V_{q+v}$

$$\begin{aligned}(T\otimes S)\bigl(\xi^1,\dots,\xi^{p+u};V_1,\dots,V_{q+v}\bigr) &=\\ = T(\xi^1,\dots,\xi^p;V_1,\dots,V_q)&S(\xi^{p+1},\dots,\xi^{p+u};V_{q+1},\dots,V_{q+v}).\end{aligned}$$

Тривиальным образом проверяется, что $T\otimes S$ действительно тензор, т.е. что отображение $T\otimes S$ — полилинейно. Действительно, например

$$\begin{aligned}(T\otimes S)(\dots,a\xi+b\psi,\dots) &= T(\dots,a\xi+b\psi,\dots)S(\dots) =\\ &= aT(\dots,\xi,\dots)S(\dots)+bT(\dots,\psi,\dots)S(\dots) =\\ &= a(T\otimes S)(\dots,\xi,\dots)+b(T\otimes S)(\dots,\psi,\dots),\end{aligned}$$

где ковектор $a\xi+b\psi$ стоит на месте с номером, не превосходящим p. Тензор $T\otimes S$ называется *тензорным произведением* тензоров T и S.

Нам будут полезны следующие свойства тензорного произведения.

Лемма 2.4. *Тензорное произведение обладает следующими свойствами.*

- *Ассоциативность: для любых тензоров T, S и R, имеем:*

$$T\otimes(S\otimes R) = (T\otimes S)\otimes R.$$

- *Дистрибутивность: для любых тензоров T_1, T_2 из $\mathbb{T}^p_q$, и S_1, S_2 из $\mathbb{T}^u_v$, и для любых чисел α_1 и α_2,*

$$\begin{aligned}(\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2) \otimes S_1 &= \alpha_1 (T_1 \otimes S_1) + \alpha_2 (T_2 \otimes S_1),\\ T_1 \otimes (\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2) &= \alpha_1 (T_1 \otimes S_1) + \alpha_2 (T_1 \otimes S_2)\end{aligned}$$

Замечание. Тензорное произведение тензорных полей дистрибутивно относительно умножения на гладкие функции α_i.

Замечание. Тензорное произведение, вообще говоря, не коммутативно. Например, если (x, y) — координаты на плоскости, то $dx \otimes dy \neq dy \otimes dx$. В общем случае тензоры $T \otimes S$ и $S \otimes T$ отличаются перестановкой индексов.

Пусть $(x^1, \dots, x^n)$ — локальная система координат в окрестности точки P. Вычислим компоненты тензора $T \otimes S$ в этих координатах. Получим:

$$\begin{aligned}(T \otimes S)^{i_1 \cdots i_{p+u}}_{j_1 \cdots j_{q+v}} &= (T \otimes S)\big(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_{p+u}}; \partial_{x^{j_1}}, \dots, \partial_{x^{j_{q+v}}}\big) = \\ &= T(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_p}; \partial_{x^{j_1}}, \dots, \partial_{x^{j_q}}) \cdot \\ &\qquad \cdot S(dx^{i_{p+1}}, \dots, dx^{i_{p+u}}; \partial_{x^{j_{q+1}}}, \dots, \partial_{x^{j_{q+v}}}) = \\ &= T^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} S^{i_{p+1} \cdots i_{p+u}}_{j_{q+1} \cdots j_{q+v}}\end{aligned}$$

Таким образом, имеется следующий результат.

Лемма 2.5. *Компоненты тензорного произведения $T \otimes S$ тензоров T и S вычисляются по формуле*

$$(T \otimes S)^{i_1 \cdots i_{p+u}}_{j_1 \cdots j_{q+v}} = T^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} S^{i_{p+1} \cdots i_{p+u}}_{j_{q+1} \cdots j_{q+v}}.$$

Значимость операции тензорного произведения определяется следующим утверждением.

Утверждение 2.1. *Пространство $\mathbb{T}^p_q$ всех тензоров типа (p, q) можно представить в виде тензорного произведения p экземпляров пространства $T_P M = \mathbb{T}^1_0$ и q экземпляров $T^*_P M = \mathbb{T}^0_1$.*

Доказательство. Действительно, в утверждении 1.2 мы построили базис пространства $\mathbb{T}^p_q$, состоящий из отображений вида

$$\partial_{x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \partial_{x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_q}.$$

Теперь ясно, что обозначения для этих полилинейных отображений были выбраны не случайно: каждое из них является тензорным произведением p соответствующих векторов $\partial_{x^{i_k}}$ канонического базиса пространства $T_P M$ и q соответствующих ковекторов dx^{j_l} канонического базиса пространства $T^*_P M$. Утверждение доказано.

Пример. Пусть фиксированы локальные координаты $(x^1, \dots, x^n)$, и пусть $dx^{i_1}, \dots, dx^{i_q}$ — произвольные q ковекторов соответствующего канонического базиса. Построим тензор типа $(0, q)$, положив

$$T = dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_q}.$$

Нам будет полезна следующая лемма, доказательство которой получается прямым подсчетом.

Лемма 2.6. *В сделанных выше обозначениях, для произвольной перестановки $\sigma \in S_q$, имеем:*

$$_\sigma T = dx^{i_{\sigma^{-1}(1)}} \otimes \dots \otimes dx^{i_{\sigma^{-1}(q)}}.$$

Замечание. Отметим, что по определению тензорного произведения имеет место следующее тождество для произведения базисных элементов:

$$\begin{aligned}\big(\partial_{x^{i_1}} \otimes \cdots \partial_{x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots dx^{j_q}\big) \otimes \big(\partial_{x^{\alpha_1}} \otimes \cdots \partial_{x^{\alpha_p}} \otimes dx^{\beta_1} \otimes \cdots dx^{b_q}\big) = \\ = \partial_{x^{i_1}} \otimes \cdots \partial_{x^{i_p}} \otimes \partial_{x^{\alpha_1}} \otimes \cdots \partial_{x^{\alpha_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots dx^{j_q} \otimes dx^{\beta_1} \otimes \cdots dx^{b_q}.\end{aligned}$$

В частности, $dx^i \otimes \partial_{x^j} = \partial_{x^j} \otimes dx^i$.

2.5. Опускание и поднятие индекса

Предположим, что фиксирован некоторый тензор A типа $(0, 2)$. Тензор A называется *невырожденным*, если в какой-нибудь, а значит и в любой локальной системе координат $(x^1, \dots, x^n)$ определитель матрицы (A_{ij}) компонент тензора A отличен от нуля. В этом случае существует обратная матрица $(A_{ij})^{-1}$, элементы которой мы обозначим через A^{ij}.

Лемма 2.7. *В сделанных выше обозначениях, соответствие*

$$(x^1, \dots, x^n) \mapsto (A^{ij})$$

задает тензор типа $(2, 0)$.

Доказательство. Действительно, пусть $(x^{1'}, \dots, x^{n'})$ — другая система локальных координат, $A_{i'j'}$ — компоненты тензора A в этих новых координатах, и $(A^{i'j'})$ — элементы матрицы, обратной к невырожденной матрице $(A_{i'j'})$. Последнее означает, что $A_{i'\alpha'}A^{\alpha'j'} = \delta^{j'}_{i'}$. Применив тензорный закон к тензорам A и δ, получим

$$\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial x^{i'}}\delta^p_q = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}A_{i\alpha}A^{\alpha'j'},$$

поэтому

$$\begin{aligned}\delta^p_q &= \frac{\partial x^p}{\partial x^{j'}}\Big(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^q}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\Big)\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}A_{i\alpha}A^{\alpha'j'} = \frac{\partial x^p}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\big(\delta^i_q A_{i\alpha}\big)A^{\alpha'j'} = \\ &= A_{q\alpha}\Big(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^p}{\partial x^{j'}}A^{\alpha'j'}\Big).\end{aligned}$$

Отсюда, в силу единственности обратной матрицы, заключаем:

$$\Big(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{p}}{\partial x^{j'}}A^{\alpha' j'}\Big) = A^{\alpha p},$$

т.е. для элементов матрицы, обратной к матрице тензора A, выполняется тензорный закон, что и требовалось.

Таким образом, если фиксирован невырожденный тензор A типа $(0,2)$, то определен однозначно и тензор типа $(2,0)$, компоненты которого в каждых локальных координатах образуют обратную матрицу к матрице компонент тензора A. Это тензор будем обозначать через A^{-1} и называть *обратным* по отношению к A.

Пример. Важным примером невырожденного тензора типа $(0,2)$ является риманова метрика. Именно она обычно используется для подъема и опускания индексов тензоров на римановых многообразиях.

Итак, пусть в точке P фиксирован невырожденный тензор A типа $(0,2)$. Пусть, далее, T — тензор типа (p,q), причем $p \geq 1$. Определим новый тензор L типа $(p-1, q+1)$, положив $L = C_2^1(A \otimes T)$. Таким образом, тензор L получается в результате применения двух последовательных операций — тензорного произведения и свертки. Говорят, что тензор L получен из тензора T *опусканием первого индекса с помощью тензора* A. Аналогично можно определить опускание k-го индекса: $C_2^k(A \otimes T)$, где $1 \leq k \leq p$.

Далее, $q \geq 1$, и $1 \leq k \leq q$, то можно построить новый тензор U типа $(p+1, q-1)$, положив $U = C_k^2(A^{-1} \otimes T)$. Говорят, что тензор U получен из тензора T *поднятием k-го индекса с помощью тензора A*.

Выясним, как выглядит операция опускания и поднятия индекса в локальных координатах. Следующая лемма очевидна.

Лемма 2.8. *Если тензоры L и U получены из тензора T типа (p,q) операциями опускания и поднятия первого индекса с помощью тензора A типа $(0,2)$, то в произвольных локальных координатах $(x^1, \dots, x^n)$ их компоненты вычисляются так:*

$$L^{i_1 \dots i_{p-1}}_{j_1 \dots j_{q+1}} = A_{j_1 \alpha} T^{\alpha i_1 \dots i_{p-1}}_{j_2 \dots j_{q+1}}, \qquad U^{i_1 \dots i_{p+1}}_{j_1 \dots j_{q-1}} = A^{i_1 \alpha} T^{i_2 \dots i_{p+1}}_{\alpha j_1 \dots j_{q-1}}.$$

Непосредственно из леммы 2.8 вытекает следующий полезный факт.

Лемма 2.9. *Операции опускания и поднятия индекса взаимно обратны в следующем смысле: если у тензора T сначала, скажем, опустить а затем поднять индекс с помощью одного и того же тензора A, то в результате получится исходный тензор T с точностью до перестановки индексов.*

Доказательство. Действительно, если $T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ — компоненты тензора T в координатах $(x^1,\dots,x^n)$, и мы опустим у T верхний k-ый индекс с помощью тензора $A=(A_{ij})$, то получим тензор L с компонентами

$$L^{i_1\dots i_{p-1}}_{j_1\dots j_{q+1}} = A_{j_1,\alpha} T^{i_1\dots i_{k-1}\alpha i_k\dots i_{p-1}}_{j_2\dots j_{q+1}}.$$

Если мы теперь поднимем у L первый индекс, то получим тензор U с компонентами

$$U^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} = A^{i_1\beta} L^{i_2\dots i_p}_{\beta j_1\dots j_q} = A^{i_1\beta}A_{\beta,\alpha} T^{i_2\dots i_k\alpha i_{k+1}\dots i_p}_{j_1\dots j_q} = T^{i_2\dots i_k i_1 i_{k+1}\dots i_p}_{j_1\dots j_q}.$$

Тензор U, очевидно, отличается от исходного тензора T на перестановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & k & k+1 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & k & 1 & k+1 & \dots & n \end{pmatrix},$$

что и требовалось.

Замечание. Если фиксирован невырожденный тензор типа $(0,2)$, то операции опускания и поднятия индексов задают каноническое, т.е. не зависящее от локальных координат, отождествление двойственных пространств T_PM и T^*_PM. Действительно, опустив индекс у вектора, мы получим ковектор, и наоборот, подняв индекс у ковектора, мы получим вектор.

Замечание. Если невырожденный тензор A типа $(0,2)$, с помощью которого мы опускаем или поднимаем индекс, в некоторой системе координат имеет вид δ_{ij} — символы Кронекера, то в этих координатах операция опускания и поднятия индекса тривиальна: соответствующие компоненты тензоров просто совпадают.

2.6. Симметрирование и альтернирование

Пусть T — произвольный тензор типа $(0,q)$. Построим по нему новые тензоры $S(T)$ и $A(T)$ того же типа, положив

$$S(T) = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in S_q} {}_\sigma T, \qquad A(T) = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in S_q} (-1)^\sigma {}_\sigma T,$$

где суммирование берется по всем перестановкам σ множества из q элементов. Говорят, что тензор $S(T)$ получен из тензора T *симметрированием* или *симметризацией*, а тензор $A(T)$ — *альтернированием*. Ясно, что симметризация и альтернирование — это результат последовательного применения перестановок индексов и взятия линейной комбинации тензоров, поэтому $S(T)$ и $A(T)$ — действительно тензоры.

Лемма 2.10. *Компоненты тензоров $S(T)$ и $A(T)$ имеют в локальных координатах $(x^1,\dots,x^n)$ следующий вид*:

$$S(T)_{j_1\dots j_q} = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in S_q} T_{j_{\sigma(1)}\dots j_{\sigma(q)}}, \qquad A(T)_{j_1\dots j_q} = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in S_q} (-1)^\sigma T_{j_{\sigma(1)}\dots j_{\sigma(q)}}.$$

Нам будут полезна следующая очевидная лемма.

Лемма 2.11. *Операции альтернирования и симметрирования линейны*:

$$A(\alpha_1 T_1+\alpha_2 T_2) = \alpha_1 A(T_1)+\alpha_2 A(T_2), \quad S(\alpha_1 T_1+\alpha_2 T_2) = \alpha_1 S(T_1)+\alpha_2 S(T_2).$$

Тензор T типа $(0, q)$ называется *симметричным*, если для любой перестановки $\sigma \in S_q$ имеет место равенство $T = {}_\sigma T$. Тензор T типа $(0, q)$ называется *кососимметричным*, если для любой перестановки $\sigma \in S_q$ имеет место соотношение $T = (-1)^\sigma {}_\sigma T$. Имеет место следующий результат.

Лемма 2.12. *Для произвольного тензора T, Тогда тензор $S(T)$ — симметричен, а тензор $A(T)$ — антисимметричен. Симметрирование не меняет симметричных тензоров, и обращает в нуль любой кососимметричный тензор. Аналогично, альтернирование не меняет кососимметричных тензоров, и обращает любой симметричный тензор в нуль.*

Доказательство. Докажем, например, последнее утверждение. Если T — симметричный тензор, то $T = {}_\sigma T$, поэтому

$$A(T) = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in S_q}(-1)^\sigma {}_\sigma T = \frac{T}{q!}\Big(\sum_{\sigma \text{ четная}} 1 + \sum_{\sigma \text{ нечетная}} -1\Big) = 0,$$

так как четных перестановок столько же, сколько нечетных, что и требовалось. Остальные утверждения доказываются аналогично.

Ясно, что линейная комбинация симметричных (кососимметричных) тензоров представляет собой симметричный (соответственно, кососимметричный) тензор. Поэтому множество всех симметричных (кососимметричных) тензоров представляет собой линейное подпространство в пространстве всех тензоров данного типа.

Замечание. Мы определили операциях симметрирования и альтернирования для тензоров типа $(0, q)$, хотя их можно аналогично определить и для тензоров типа $(p, 0)$, а также и для тензоров произвольного типа, проводя симметрирование или альтернирование по индексам одного типа.

2.7. Частичное альтернирование

В дальнейшем нам также понадобится следующее обобщение понятия альтернирования. Пусть T, как и выше, тензор типа $(0, q)$, и предположим, что фиксировано некоторое подмножество U группы перестановок S_q (подчеркнем, что U вовсе не обязано быть подгруппой). Тогда *частичной альтернацией тензора T по U* называется тензор $A_U(T)$ следующего вида

$$A_U(T) = \frac{1}{|U|}\sum_{\sigma\in U}(-1)^\sigma {}_\sigma T,$$

где через $|U|$ обозначено количество элементов множества U.

Имеет место следующий полезный для нас факт.

Лемма 2.13. *Пусть T — тензор типа $(0,q)$, и U — подмножество группы перестановок S_q. Тогда*

$$A\big(A_U(T)\big) = A(T),$$

т.е. альтернация "съедает" любую частичную альтернацию.

Доказательство. Действительно,

$$A\big(A_U(T)\big) = A\Big(\frac{1}{|U|}\sum_{\sigma\in U}(-1)^{\sigma}{}_{\sigma}T\Big).$$

В силу линейности альтернации, перепишем правую часть в виде

$$\frac{1}{|U|}\sum_{\sigma\in U}(-1)^{\sigma}A({}_{\sigma}T) = \frac{1}{|U|}\sum_{\sigma\in U}\sum_{\tau\in S_q}\frac{1}{q!}(-1)^{\sigma}(-1)^{\tau}{}_{\tau}({}_{\sigma}T).$$

Обозначим композицию $\sigma\tau$ через π. Отметим, что для каждой фиксированной перестановки σ, если τ пробегает всю группу S_q, то и произведение $\sigma\tau$ тоже пробегает S_q. В силу леммы 2.1, получим:

$$\frac{1}{|U|}\sum_{\sigma\in U}\frac{1}{q!}\Big(\sum_{\pi\in S_q}(-1)^{\pi}{}_{\pi}T\Big) = \frac{1}{|U|}\sum_{\sigma\in U}A(T) = A(T).$$

Лемма доказана.

Сформулируем полезное следствие.

Следствие 2.1. *Пусть T и Q — произвольные тензоры типа $(0,q)$ и $(0,u)$ соответственно. Тогда*

$$A\big(A(T)\otimes Q\big) = A(T\otimes Q) = A\big(T\otimes A(Q)\big).$$

Задачи

Задача 2.1. Пусть в $\mathbb{R}^3$ фиксированы стандартные координаты (x,y,z). Рассмотрим тензорное поле T типа $(1,2)$, заданное так:

$$T = (x+y)\partial_x\otimes dx\otimes dx + (y-z)\partial_z\otimes dy\otimes dz.$$

Фиксируем точку $P=(1,2,3)$, ковектор $\xi=(2,3,4)$ из $T_P^*\mathbb{R}^3$ и векторы $V_1=(3,4,5)$ и $V_2=(4,5,6)$ из $T_P\mathbb{R}^3$. Вычислить $T(P)(\xi,V_1,V_2)$. Та же задача, но (другое) тензорное поле T задано в цилиндрических координатах (r,φ,z) так:

$$T = (r+z)\partial_\varphi\otimes d\varphi\otimes dz + (r-z)\partial_z\otimes dr\otimes d\varphi.$$

Задача 2.2. Рассмотреть пример перестановки верхнего и нижнего индексов у линейного оператора, т.е. тензора типа $(1,1)$. Убедиться, что эта операция не тензорная, т.е. полученный в результате объект не является тензором (а именно, матрицы, полученные такой перестановкой в разных системах координат, задают разные линейные операторы).

Задача 2.3. Сколько существует способов получить полную свертку тензора типа (p,p)? Все ли полные свертки различны?

Задача 2.4. Пусть T — произвольный тензор типа (p,q), а $\xi^1,\dots,\xi^p$ и $V_1,\dots,V_q$ — произвольные p ковекторов и q векторов. Рассмотрим тензор

$$S = T\otimes\xi^1\otimes\dots\otimes\xi^p\otimes V_1\otimes\dots\otimes V_q$$

типа $(p+q,q+p)$. Показать, что полная свертка тензора S

$$C^1_{q+1}(\dots(C^p_{q+p}(C^{p+1}_1(\dots(C^{p+q}_q(S)\dots)$$

равна значению тензора T на наборе $\xi^1,\dots,\xi^p;V_1,\dots,V_q$.

Задача 2.5. Выписать формулы для вычисления дифференциала функции (ковектора) в цилиндрических и сферических координатах в $\mathbb{R}^3$. Поднять у полученных ковекторов индекс с помощью евклидовой метрики δ (записанной в *тех же* координатах). Сравнить ответ с формулами для градиента из стандартного учебника по математическому анализу.

Задача 2.6. Найти размерности пространств симметричных и кососимметричных тензоров типа $(0,q)$. Верно ли, что любой тензор типа $(0,q)$ может быть представлен в виде суммы симметричного и кососимметричного тензоров типа $(0,q)$?

Дополнительный материал

2.1. Проверка корректности определения свертки. Вместо того, чтобы проверять корректность определения свертки с помощью тензорного закона, можно проделать это на языке инвариантного определения, используя только свертку линейного оператора.

Фиксируем произвольные $(p-1)$ ковекторов $\xi^1,\dots,\xi^{p-1}$ и произвольные $(q-1)$ векторов $V_1,\dots,V_{q-1}$. Тогда, для произвольных чисел $1\le\alpha\le p$ и $1\le\beta\le q$, по тензору T типа (p,q) можно построить тензор A типа $(1,1)$ следующим образом:

$$A(\psi,W)=T(\xi^1,\dots,\xi^{\alpha-1},\psi,\xi^\alpha,\dots,\xi^{p-1};V_1,\dots,V_{\beta-1},W,V_\beta,\dots,V_{q-1}).$$

Тензор A зависит от ξ^i и V_j полилинейно. Определим теперь функцию $C^\alpha_\beta(T)$ на $(T^*_PM)^{p-1}\times(T_PM)^{q-1}$, положив ее значение на наборе $(\xi^1,\dots,\xi^{p-1};V_1,\dots,V_{q-1})$ равным следу соответствующего линейного оператора A. Поскольку взятие следа линейного оператора — тензорная операция, функция $C^\alpha_\beta(T)$ очевидно является полилинейной, поэтому определяет тензор типа $(p-1,q-1)$, который называется ***сверткой тензора T по верхнему индексу с номером α и нижнему индексу с номером β***. Чтобы убедиться, что это определение свертки совпадает с данным выше координатным определением, вычислим компоненты только что определенного тензора в локальных координатах $(x^1,\dots,x^n)$. Получим:

$$\begin{aligned}
C^\alpha_\beta(T)^{i_1\cdots i_{p-1}}_{j_1\cdots j_{q-1}} &= C^\alpha_\beta(T)\Big(dx^{i_1},\dots,dx^{i_{p-1}};\partial_{x^{j_1}},\dots,\partial_{x^{j_{q-1}}}\Big)=\\
&= A(dx^k;\partial_{x^k})=T\Big(dx^{i_1},\dots,dx^{i_{\alpha-1}},dx^k,dx^\alpha,\dots,dx^{i_{p-1}};\\
&\qquad\qquad \partial_{x^{j_1}},\dots,\partial_{x^{j_{\beta-1}}},\partial_{x^k},\partial_{x^\beta},\dots\partial_{x^{j_{q-1}}}\Big)=\\
&= T^{i_1,\dots,i_{\alpha-1},k,i_\alpha,\dots,i_{p-1}}_{j_1,\dots,j_{\beta-1},k,j_\beta,\dots,j_{q-1}},
\end{aligned}$$

что и требовалось. Таким образом, мы показали, что два определения свертки совпадают, и, тем самым, установили корректность первого, координатного определения.

2.2. Некоммутативность тензорного произведения. Пусть на плоскости фиксированы координаты (x^1, x^2). Рассмотрим тензорные произведения $dx^1 \otimes dx^2$ и $dx^2 \otimes dx^1$. Тогда для любых векторов $V = (v^1, v^2)$ и $W = (w^1, w^2)$ имеем:

$$dx^1 \otimes dx^2(V, W) = v^1 w^2, \qquad \text{а} \qquad dx^2 \otimes dx^1(V, W) = v^2 w^1.$$

Поэтому, если векторы V и W линейно независимы, то

$$dx^1 \otimes dx^2(V, W) \neq dx^2 \otimes dx^1(V, W).$$

Последнее означает, что отображения $dx^1 \otimes dx^2$ и $dx^2 \otimes dx^1$ различны.

2.3. Тензорное произведение и перестановка индексов. Приведем тут доказательство формулы из леммы 2.6, а именно, если

$$T = dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_q},$$

где dx^i — базисные ковекторы, соответствующие локальным координатам $(x^1, \ldots, x^n)$, то для произвольной перестановки $\sigma \in S_q$ выполнено:

$$_\sigma T = dx^{i_{\sigma^{-1}(1)}} \otimes \cdots \otimes dx^{i_{\sigma^{-1}(q)}},$$

По определению операции перестановки, для любых векторов канонического базиса $\partial_{x^{\alpha_1}}, \ldots, \partial_{x^{\alpha_q}}$ имеем:

$$\begin{aligned}
{}_\sigma T(\partial_{x^{\alpha_1}}, \ldots, \partial_{x^{\alpha_q}}) &= T(\partial_{x^{\alpha_{\sigma(1)}}}, \ldots, \partial_{x^{\alpha_{\sigma(q)}}}) = \\
&= (dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_q})\left(\partial_{x^{\alpha_{\sigma(1)}}}, \ldots, \partial_{x^{\alpha_{\sigma(q)}}}\right) = \\
&= dx^{i_1}\left(\partial_{x^{\alpha_{\sigma(1)}}}\right) \cdots dx^{i_q}\left(\partial_{x^{\alpha_{\sigma(q)}}}\right) = \delta^{i_1}_{\alpha_{\sigma(1)}} \cdots \delta^{i_q}_{\alpha_{\sigma(q)}}.
\end{aligned}$$

Полученное число отлично от нуля (и равно единице), если и только если $\alpha_{\sigma(k)} = i_k$ для всех $k = 1, \ldots, q$. Это условие переписывается в виде $\alpha_k = i_{\sigma^{-1}(k)}$. Таким образом,

$$_\sigma T(\partial_{x^{\alpha_1}}, \ldots, \partial_{x^{\alpha_q}}) = 1,$$

если и только если $\alpha_k = i_{\sigma^{-1}(k)}$, а на всех остальных наборах базисных ковекторов значение тензора $_\sigma T$ равно нулю, что и завершает доказательство.

2.4. Опускание и поднятие индексов в евклидовых координатах. Если тензор A, с помощью которого мы опускаем или поднимаем индекс, в некоторой системе координат имеет вид δ_{ij} — символы Кронекера, то в этих координатах операция опускания и поднятия индекса тривиальна: соответствующие компоненты тензоров просто совпадают. Поэтому, в этом случае, все индексы можно считать, скажем, нижними. Эта ситуация имеет место, например, если работать с тензорами в евклидовом пространстве, т.е. линейном пространстве со скалярным произведением, поднимая и опуская индексы с помощью невырожденной билинейной формы, задающей это скалярное произведение, при условии, что фиксированы евклидовы координаты (координаты, в которых матрица скалярного произведения равна единичной матрице).

Например в математическом анализе, работая в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ с евклидовыми координатами $(x^1, \ldots, x^n)$, не различают векторы и ковекторы, молчаливо предполагая, что индексы поднимаются и опускаются с помощью евклидового метрического тензора δ, имеющего, по определению, в евклидовых координатах компоненты δ_{ij}. Отметим, однако, что тензор, соответствующий набору чисел δ_{ij} в координатах $(x^1, \ldots, x^n)$, не является, к сожалению, постоянным: при замене координат его компоненты меняются по тензорному закону:

$$\delta_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \delta_{ij} = \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}.$$

Таким образом, равенство компонент $\delta_{i'j'}$ символам Кронекера есть в точности условие ортогональности матрицы Якоби замены координат. Поэтому, пока мы в математическом анализе делаем ортогональные замены координат, никаких проблем не возникает. Однако, как только замена координат перестает быть ортогональной, возникают, например, «странные», с точки зрения математического анализа, формулы для вычисления компонент «вектора градиента функции». В математическом анализе иногда градиент определяют как вектор, компоненты которого равны компонентам дифференциала. Так можно поступать, как мы теперь понимаем, только в евклидовых координатах. На самом деле, кажущаяся странность формул для градиента объясняется тем, что дифференциал является ковектором, и чтобы получить из него вектор градиента, чего обычно и хотят в математическом анализе, нужно поднять индекс с помощью непостоянного тензора δ.

2.5. Симметричные линейные операторы. В линейной алгебре часто идет речь о симметричных или кососимметричных линейных операторах. Однако, линейный оператор — этот тензор типа $(1,1)$, поэтому, чтобы определить для него понятие симметричности или кососимметричности, следует фиксировать невырожденный тензор A типа $(0,2)$. Тогда, если L — линейный оператор, то опустив сначала его индекс с помощью тензора A, можно говорить о его симметричности или кососимметричности в тензорном смысле. В линейной алгебре в качестве тензора A берут обычно евклидов метрический тензор. Вообще, если фиксирована произвольная риманова метрика g_{ij}, то симметричность линейного оператора L относительно этого невырожденного тензора типа $(0,2)$ эквивалентна, как легко проверить, следующему соотношению, выполненному для произвольных векторов V и W:

$$\langle L(V), W\rangle = \langle V, L(W)\rangle,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение, соответствующее римановой метрике g_{ij}.

2.6. Тензоры в механике сплошной среды. В механике сплошной среды[2] также активно используется тензорный анализ. При этом, особенность рассматриваемой модели сплошной среды состоит в том, что всегда предполагается заданным некоторый метрический тензор g_{ij}. Поэтому всегда можно поднимать и опускать индексы. В механике сплошной среды принято говорить, что в результате операции опускания или поднятия индекса получается «тот же тензор, но записанный в другой форме». Так, скажем, вектор V в одной и той же системе координат может быть задан как своими обычными «контравариантными» компонентами v^i, т.е. компонентами с верхними индексами, так и «ковариантными» компонентами, т.е. компонентами $v_i = g_{i\alpha}v^\alpha$.

При этом, чтобы избежать путаницы с перестановками индексов при их поднятии–опускании, порядок *всех* индексов считается фиксированным, и он, по определению, сохраняется при поднятии–опускании индексов. Скажем, тензор ранга 3 может быть записан с первым верхним, вторым нижним и третьим снова верхним индексами. Вообще, для тензора ранга r имеется 2^r разных «способов записи». При записи соответствующих формул используют точки на месте пропущенных индексов, например $T^{i\cdot k}_{\cdot j\cdot}$. Связь между разными формами одного и того же тензора выражается формулами типа $T^{i\cdot k}_{\cdot j\cdot} = g^{k\alpha}g_{j\beta}T^{i\beta\cdot}_{\cdot\cdot\alpha}$.

Таким образом, с точки зрения дифференциальной геометрии, в механике сплошной среды молчаливо предполагаются фиксированными изоморфизмы между пространствами тензоров одного ранга (но разного типа). Эти изоморфизмы порождаются, как и положено, невырожденным тензором типа $(0,2)$ и перестановками индексов. Это надо иметь ввиду, переходя с одного языка на другой.

---

[2] В качестве классического учебника по механике сплошной среды следует назвать замечательную книгу Л. И. Седова.

Лекция 3. Алгебра внешних дифференциальных форм

В нескольких следующих разделах мы более подробно изучим кососимметрические тензорные поля типа $(0, q)$. Оказывается, для таких тензорных полей можно построить содержательную теорию дифференцирования и интегрирования. Сам термин «дифференциальные формы» объясняется естественной записью этих тензоров в локальных координатах в дифференциальном виде (напомним, что каждым локальным координатам соответствует канонический базис $\left(dx^i\right)_{i=1}^n$ пространства T_P^*M).

3.1. Пространство кососимметричных тензоров

Напомним, что тензор T типа $(0, q)$ называется *кососимметрическим*, если для произвольной перестановки $\sigma \in S_q$ выполнено соотношение ${}_\sigma T = (-1)^\sigma \cdot T$.

Пример. Произвольный ковектор $\xi \in T_P^*M$ представляет собой кососимметрический тензор (нетривиальных перестановок множества из одного элемента нет).

Пример. Тензор T типа $(0, 2)$ является кососимметрическим, если в любой системе локальных координат соответствующая матрица кососимметрична: $T_{ij} = -T_{ji}$.

Напомним, что множество всех кососимметрических тензоров типа $(0, q)$ образует линейное пространство. Найдем размерность этого пространства. Пусть фиксированы локальные координаты $(x^1, \dots, x^n)$. Для каждого набора натуральных чисел $(i_1, \dots, i_q)$, где $1 \le i_1 < \ldots < i_q \le n$ определим кососимметричное полилинейное отображение, которое обозначим через $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}$, положив

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}\left(V_1, \dots, V_q\right) = \det \begin{pmatrix} v_1^{i_1} & v_1^{i_2} & \dots & v_1^{i_q} \\ v_2^{i_1} & v_2^{i_2} & \dots & v_2^{i_q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_q^{i_1} & v_q^{i_2} & \dots & v_q^{i_q} \end{pmatrix},$$

где $V_i = (v_i^1, \dots, v_i^n)$. В правой части стоит определитель матрицы, k-ая строка которой состоит из компонент вектора V_k с номерами $i_1, \dots, i_q$. Так как определитель — кососимметричная полилинейная функция строк, определенное нами отображение действительно полилинейно и кососимметрично.

Замечание. Отметим, что определение тензора $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}$ можно переписать в виде

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}\big(V_1, \dots, V_q\big) = \det \begin{pmatrix} dx^{i_1}(V_1) & dx^{i_2}(V_1) & \dots & dx^{i_q}(V_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ dx^{i_1}(V_q) & dx^{i_2}(V_q) & \dots & dx^{i_q}(V_q) \end{pmatrix}.$$

В такой форме это определение легко обобщается на случай произвольного набора ковекторов, не обязательно базисных. В частности, очевидно, что если $q > n$, то функции $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}$ всегда равны нулю (в определителе будут одинаковые столбцы).

Утверждение 3.1. *Система* $\big\{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}\big\}$ *кососимметрических тензоров,* $1 \le i_1 < \dots < i_q \le n$*, образует базис в пространстве кососимметричных тензоров типа* $(0, q)$*.*

Доказательство. Пусть T — произвольный кососимметрический тензор типа $(0, q)$. Покажем, что он может быть представлен в виде

$$T = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_q \le n} T_{i_1 \dots i_q} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}. \tag{$*$}$$

Для этого вычислим значение правой и левой части на произвольном наборе базисных векторов $\big(\partial_{x^{\alpha_1}}, \dots, \partial_{x^{\alpha_q}}\big)$. В левой части, очевидно, получим:

$$T\big(\partial_{x^{\alpha_1}}, \dots, \partial_{x^{\alpha_q}}\big) = T_{\alpha_1 \dots \alpha_q}.$$

Чтобы вычислить правую часть, докажем следующую лемму.

Лемма 3.1. *Справедливо следующее равенство*:

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q} = \sum_{\sigma \in S_q} (-1)^\sigma dx^{i_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes dx^{i_{\sigma(q)}}$$

Доказательство. Действительно, по определению,

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}\big(V_1, \dots, V_q\big) = \det \begin{pmatrix} dx^{i_1}(V_1) & \dots & dx^{i_q}(V_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ dx^{i_1}(V_q) & \dots & dx^{i_q}(V_q) \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_q} (-1)^\sigma dx^{i_{\sigma(1)}}(V_1) \cdots dx^{i_{\sigma(q)}}(V_q) =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_q} (-1)^\sigma dx^{i_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes dx^{i_{\sigma(q)}}\big(V_1, \dots, V_q\big),$$

что и требовалось.

В силу леммы 3.1, вычисляя значение правой части выражения $(*)$ на наборе векторов $\big(\partial_{x^{\alpha_1}}, \dots, \partial_{x^{\alpha_q}}\big)$, получим:

$$\sum_{1\le i_1<\dots<i_q\le n} T_{i_1\dots i_q} dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_q}\big(\partial_{x^{\alpha_1}}, \dots, \partial_{x^{\alpha_q}}\big) =$$
$$= \sum_{1\le i_1<\dots<i_q\le n} T_{i_1\dots i_q} \sum_{\sigma\in S_q}(-1)^\sigma dx^{i_{\sigma(1)}}\otimes\dots\otimes dx^{i_{\sigma(q)}}\big(\partial_{x^{\alpha_1}}, \dots, \partial_{x^{\alpha_q}}\big) =$$
$$= \sum_{1\le i_1<\dots<i_q\le n} T_{i_1\dots i_q} \sum_{\sigma\in S_q}(-1)^\sigma \delta^{i_{\sigma(1)}}_{\alpha_1}\dots\delta^{i_{\sigma(q)}}_{\alpha_q}.$$

Выражение
$$\delta^{i_{\sigma(1)}}_{\alpha_1}\dots\delta^{i_{\sigma(q)}}_{\alpha_q}$$
отлично от нуля (и равно единице) в том и только том случае, если $i_{\sigma(k)} = \alpha_k$ для всех $k = 1, \dots, q$. Чтобы это было выполнено, необходимо чтобы наборы $(i_1, \dots, i_q)$ и $(\alpha_1, \dots, \alpha_q)$ совпадали как множества. Последние возможно, только если все индексы α_k различны. Если все α_k различны, то среди всех упорядоченных наборов $(i_1, \dots, i_q)$ имеется ровно один, совпадающий как множество с набором $(\alpha_1, \dots, \alpha_q)$. Поэтому, в этом случае, имеем:

$$\sum_{1\le i_1<\dots<i_q\le n} T_{i_1\dots i_q} dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_q}\big(\partial_{x^{\alpha_1}}, \dots, \partial_{x^{\alpha_q}}\big) = T_{i_1\dots i_q}(-1)^\sigma,$$

где $\sigma\in S_q$ — та самая единственная перестановка, для которой $i_{\sigma(k)} = \alpha_k$, а наборы $(i_1, \dots, i_q)$, $1\le i_1<\dots<i_q\le n$, и $(\alpha_1, \dots, \alpha_q)$ совпадают как множества. Наконец, в силу косой симметрии тензора T и равенств $i_{\sigma(k)} = \alpha_k$, можно записать следующее

$$(-1)^\sigma T_{i_1\dots i_q} = T_{i_{\sigma(1)}\dots i_{\sigma(q)}} = T_{\alpha_1\dots\alpha_q}.$$

Поэтому окончательно:

$$\sum_{1\le i_1<\dots<i_q\le n} T_{i_1\dots i_q} dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_q}\big(\partial_{x^{\alpha_1}}, \dots, \partial_{x^{\alpha_q}}\big) = T_{\alpha_1\dots\alpha_q}.$$

Осталось заметить, что если среди индексов α_k есть совпадающие, то, в силу косой симметрии тензора T, снова получаем

$$\sum_{1\le i_1<\dots<i_q\le n} T_{i_1\dots i_q} dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_q}\big(\partial_{x^{\alpha_1}}, \dots, \partial_{x^{\alpha_q}}\big) = 0 = T_{\alpha_1\dots\alpha_q}.$$

Формула $(*)$ доказана.

Для завершения доказательства утверждения осталось проверить, что тензоры $dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_q}$ линейно независимы. Однако из определения этих полилинейных отображений вытекает, что на каждом из наборов $\left(\partial_{x^{\alpha^1}}, \dots, \partial_{x^{\alpha^q}}\right)$, где $1 \le \alpha_1 < \dots < \alpha_q \le n$, ровно одно такое отображение отлично от нуля (а именно, $dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_q}$), откуда и следует нетривиальность произвольной их линейной комбинации. Доказательство закончено.

Пространство кососимметрических тензоров типа $(0, q)$ на пространстве $T_P M$ обычно обозначают через $\Lambda^q(T_P M)$.

Следствие 3.1. *Если $q \le n$, то размерность пространства $\Lambda^q(T_P M)$ кососимметричных тензоров типа $(0, q)$ на касательном пространстве к n-мерному многообразию M равна биномиальному коэффициенту C_n^q. Если $q > n$, то размерность $\Lambda^q(T_P M)$ равна нулю.*

Пример. Рассмотрим пространство $\Lambda^n(T_P M)$ кососимметрических тензоров типа $(0, n)$, где n — размерность многообразия M. В силу следствия 3.1, это пространство одномерно. Пусть T — произвольный тензор из $\Lambda^n(T_P M)$. Из утверждения 3.1 вытекает, что в произвольных локальных координатах $(x^1, \dots, x^n)$ он представим в виде $T = T_{1\dots n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. Изучим, как меняется компонента $T_{1\dots n}$ при замене координат. Пусть $(x^{1'}, \dots, x^{n'})$ — еще одна система локальных координат в окрестности точки P. Тогда, применяя тензорный закон, получаем

$$T_{1'\dots n'} = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{1'}} \cdots \frac{\partial x^{i_n}}{\partial x^{n'}} T_{i_1\dots i_n} = \sum_{\text{все } i_k \text{ различны}} + \sum_{\text{не все } i_k \text{ различны}},$$

где вторая сумма равна нулю в силу косой симметрии тензора T. Далее, если набор индексов $(i_1, \dots, i_n)$ состоит из попарно различных чисел, то его можно воспринимать как результат применения некоторой однозначно определенной перестановки $\sigma \in S_n$. Поэтому, продолжая равенство, запишем

$$T_{1'\dots n'} = \sum_{\sigma \in S_n} \frac{\partial x^{\sigma(1)}}{\partial x^{1'}} \cdots \frac{\partial x^{\sigma(n)}}{\partial x^{n'}} T_{\sigma(1)\dots\sigma(n)} =$$
$$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \frac{\partial x^{\sigma(1)}}{\partial x^{1'}} \cdots \frac{\partial x^{\sigma(n)}}{\partial x^{n'}} T_{1\dots n} = T_{1\dots n} \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\right).$$

Таким образом, нами доказана следующая полезная лемма.

Лемма 3.2. *Компонента $T_{1\dots n}$ кососимметричного тензора типа $(0, n)$ на n-мерном многообразии при замене координат умножается на определитель матрицы Якоби этой замены:*

$$T_{1'\dots n'} = T_{1\dots n} \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\right).$$

Компонента $T_{1\dots n}$ называется *существенной компонентой* тензора T из $\Lambda^n(T_P M)$.

3.2. Внешние дифференциальные формы

Пусть M — гладкое многообразие.

Определение. *Внешней дифференциальной формой степени q на M* называется гладкое тензорное поле кососимметрических тензоров типа $(0, q)$.

Пусть ω^q — внешняя дифференциальная форма степени q на многообразии M. Если на M фиксированы некоторые локальные координаты $(x^1, \ldots, x^n)$, то в каждой точке P из области определения $U \subset M$ этих локальных координат, кососимметрический тензор ω^q типа $(0, q)$ может быть записан, в силу утверждения 3.1, в виде

$$\omega^q(P) = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_q \le n} \omega_{i_1 \ldots i_q}(P) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_q},$$

где $\omega_{i_1 \ldots i_q}$ — гладкие функции, определенные на области U многообразия M. Если точка P принадлежит пересечению $U \cap U'$ областей определения U и U' локальных координат $(x^1, \ldots, x^n)$ и $(x^{1'}, \ldots, x^{n'})$, то форму ω^q можно записать в этих координатах в виде

$$\omega^q(P) = \sum_{1 \le i'_1 < \cdots < i'_q \le n} \omega_{i'_1 \ldots i'_q}(P) dx^{i'_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i'_q},$$

Функции $\omega_{i_1 \ldots i_q}(P)$ и $\omega_{i'_1 \ldots i'_q}(P)$ — это компоненты одного и того же тензорного поля ω^q, поэтому они на пересечении $U \cap U'$ связаны по тензорному закону.

Если ω^q — внешняя форма на многообразии M, то в каждой точке P многообразия M задано, тем самым, кососимметричное полилинейное отображение из $\left(T_P M\right)^q$ в числа, которое мы обозначим через $\omega^q|_P$.

Пример. Пусть f — гладкая функция на многообразии M. Тогда ее дифференциал df является 1-формой на многообразии M. Если $(x^1, \ldots, x^n)$ — локальные координаты, то форма df записывается в виде $df = \dfrac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$. Если $V \in T_P M$ — касательный вектор, заданный своим компонентами $(v^1, \ldots, v^n)$ в координатах $(x^1, \ldots, x^n)$, то

$$df|_P(V) = \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_P v^i.$$

Линейная комбинация внешних дифференциальных форм степени q (с функциональными коэффициентами) является дифференциальной формой степени q. Поэтому дифференциальные формы степени q на M образуют линейное пространство, которое мы обозначим через $\Omega^q(M)$. Удобно рассматривать гладкие функции на M как внешние формы степени 0, тогда $\Omega^0(M)$ — это пространство всех гладких функций на M.

Объединение $\cup_{q=0}^{n}\Omega^q(M)$ обозначим через $\Omega^*(M)$ (напомним, что при $q > n$ все дифференциальные формы степени q на n-мерном многообразии тривиальны, т.е. равны нулю).

3.3. Внешнее умножение

Превратим пространство $\Omega^*(M)$ в алгебру, введя на нем операцию умножения. Обычное тензорное произведение не подходит, так как тензорное произведение кососимметрических тензоров не обязано быть кососимметричным. Пусть $P \in \Omega^p(M)$ и $Q \in \Omega^q(M)$ — дифференциальные формы на M. Обозначим через $P\wedge Q$ дифференциальную форму степени $p+q$, определенную так:

$$P \wedge Q = \frac{(p+q)!}{p!\,q!}A(P\otimes Q).$$

Так как результат альтернирования — это кососимметрический тензор, $P\wedge Q$ действительно представляет собой элемент пространства $\Omega^{p+q}(M)$. Форма $P \wedge Q$ называется ***внешним произведением форм P и Q***, а сама операция $\wedge\colon \Omega^p(M)\times\Omega^q(M) \to \Omega^{p+q}(M)$ — ***внешним умножением.***

Докажем простейшие свойства внешнего произведения.

Утверждение 3.2. *Внешнее произведение билинейно, ассоциативно и кососоммутативно в следующем смысле*: $P \wedge Q = (-1)^{pq}Q\wedge P$.

Доказательство. Билинейность немедленно вытекает из дистрибутивности тензорного произведения и линейности альтернирования.

Проверим ассоциативность. Пусть $P \in \Omega^p$, $Q \in \Omega^q$, и $R \in \Omega^r$. Тогда

$$(P\wedge Q)\wedge R = \Big(\frac{(p+q)!}{p!\,q!}A(P\otimes Q)\Big)\wedge R = \frac{(p+q)!}{p!\,q!}\frac{(p+q+r)!}{(p+q)!\,r!}A\big(A(P\otimes Q)\otimes R\big).$$

Осталось воспользоваться следствием 2.1 и ассоциативностью тензорного произведения. В итоге, получаем

$$(P\wedge Q)\wedge R = \frac{(p+q+r)!}{p!\,q!\,r!}A\big(P\otimes Q\otimes R\big),$$

что и доказывает ассоциативность внешнего умножения.

Для доказательства косой симметрии вычислим сначала значение полилинейного отображения $A(P\otimes Q)$, где как и выше $P \in \Omega^p$, и $Q \in \Omega^q$, на произвольном наборе векторов $V_1,\dots,V_{p+q}$. Получим:

$$\begin{aligned} A(P\otimes Q)(V_1,\dots,V_{p+q}) \quad &= \\ = \frac{1}{(p+q)!}\sum_{\sigma\in S_{p+q}}&(-1)^\sigma(P\otimes Q)(V_{\sigma(1)},\dots,V_{\sigma(p+q)}) = \\ = \frac{1}{(p+q)!}\sum_{\sigma\in S_{p+q}}&(-1)^\sigma P(V_{\sigma(1)},\dots,V_{\sigma(p)})Q(V_{\sigma(p+1)},\dots,V_{\sigma(p+q)}). \end{aligned}$$

Обозначим через τ перестановку из S_{p+q}, переводящую набор чисел $(1,\dots,p+q)$ в набор $(q+1,\dots,q+p,1,\dots,q)$. Очевидно, $(-1)^\tau$ равна $(-1)^{pq}$. Вычислим значение тензора ${}_\tau A(P\otimes Q)$ на том же наборе векторов $V_1,\dots,V_{p+q}$. Получим:

$$
\begin{gathered}
{}_\tau A(P\otimes Q)(V_1,\dots,V_{p+q}) = A(P\otimes Q)(V_{q+1},\dots,V_{q+p},V_1,\dots,V_q) = \\
= \frac{1}{(p+q)!}\sum_{\sigma\in S_{p+q}}(-1)^\sigma P(V_{\sigma(q+1)},\dots,V_{\sigma(q+p)})Q(V_{\sigma(1)},\dots,V_{\sigma(q)}).
\end{gathered}
$$

Сравнивая полученное выражение с предыдущим, заключаем, что

$$
{}_\tau A(P\otimes Q) = A(Q\otimes P).
$$

С другой стороны, тензор $A(P\otimes Q)$ кососимметричен, поэтому

$$
{}_\tau A(P\otimes Q) = (-1)^\tau A(P\otimes Q).
$$

Окончательно получаем:

$$
A(Q\otimes P) = {}_\tau A(P\otimes Q) = (-1)^{pq}A(P\otimes Q),
$$

что и требовалось. Утверждение доказано.

Выясним, как устроены внешние произведения базисных 1-форм dx^i.

Пример. Пусть $(x^1,\dots,x^n)$ — система локальных координат на многообразии, и dx^1 и dx^2 — базисные ковекторы. Найдем, чему равно внешнее произведение $dx^1\wedge dx^2$. Воспользовавшись определением и леммой 2.6, получим:

$$
\begin{aligned}
dx^1\wedge dx^2 &= \frac{2!}{1!\,1!}A(dx^1\otimes dx^2) = 2\frac{1}{2!}\sum_{\sigma\in S_2}(-1)^\sigma\ {}_\sigma(dx^1\otimes dx^2) \\
&= \sum_{\sigma\in S_2}(-1)^\sigma\ dx^{\sigma^{-1}(1)}\otimes dx^{\sigma^{-1}(2)} = \sum_{\tau\in S_2}(-1)^\tau\ dx^{\tau(1)}\otimes dx^{\tau(2)}.
\end{aligned}
$$

(Тут мы воспользовались тем, что четность перестановок σ и σ^{-1} одинакова.) Но тогда, в силу леммы 3.1, мы получаем, что внешнее произведение ковекторов dx^1 и dx^2 совпадает в каждой точке с элементом $dx^1\wedge dx^2$ базиса пространства Λ^2. В частности,

$$
dx^1\wedge dx^2(V_1,V_2) = \det\begin{pmatrix} v_1^1 & v_1^2 \\ v_2^1 & v_2^2 \end{pmatrix},
$$

где $V_1=(v_1^1,v_1^2)$, и $V_2=(v_2^1,v_2^2)$. Оказывается, и вообще все базисные элементы $(dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_q})$ пространства Λ^q на самом деле — внешние произведения соответствующих базисных ковекторов.

Следующая лемма доказывается прямым подсчетом.

Лемма 3.3. *Для произвольного набора целых чисел* $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, *таких что* $1 \le \alpha_i \le n$, *и произвольного набора векторов* $V_1, \dots, V_k$ *имеет место равенство*

$$dx^{\alpha_1}\wedge\dots\wedge dx^{\alpha_k}(V_1,\dots,V_k) = \det\begin{pmatrix} dx^{\alpha_1}(V_1) & dx^{\alpha_2}(V_1) & \dots & dx^{\alpha_k}(V_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ dx^{\alpha_1}(V_k) & dx^{\alpha_2}(V_k) & \dots & dx^{\alpha_k}(V_k) \end{pmatrix}.$$

В частности, внешнее произведение ковекторов $dx^{\alpha_1}, \dots, dx^{\alpha_k}$, *где* $1 \le \alpha_1 < \cdots \alpha_k \le n$, *совпадает с базисным элементом* $dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_k}$ *пространства* Λ^k, *определенным в предыдущем разделе.*

Следствие 3.2. *Пусть* $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ *— произвольный набор целых чисел, таких что* $1 \le \alpha_i \le n$. *Рассмотрим внешнее произведение* $\omega^k = dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_k}$. *Тогда*

- *форма* ω^k *равна нулю если и только если среди чисел* α_i *встречаются одинаковые*;
- *для любой перестановки* $\sigma \in S_k$ *имеет место равенство*

$$dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_k} = (-1)^\sigma dx^{\alpha_{\sigma(1)}} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_{\sigma(k)}}.$$

Замечание. Выше мы дали инвариантное определение внешнего умножения форм. Можно поступить иначе. А именно, определив внешнее умножение базисных ковекторов по формуле из леммы 3.3, а внешнее произведение базисных форм по формуле

$$\left(dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_p}\right) \wedge \left(dx^{\beta_1} \wedge \dots \wedge dx^{\beta_q}\right) = dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_p} \wedge dx^{\beta_1} \wedge \dots \wedge dx^{\beta_q},$$

можно продолжить эту операцию на все формы по дистрибутивности. После этого останется проверить, что определение не зависит от выбора координат.

В дальнейшем нам также будет полезно следующий технический результат.

Следствие 3.3. *Пусть* T *— произвольная внешняя форма степени* q. *Тогда*

$$\sum_{1\le i_1<\dots<i_q\le n} T_{i_1\dots i_q} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q} = \frac{1}{q!} T_{i_1\dots i_q} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}.$$

Итак, мы определили на множестве всех внешних форм на многообразии M операцию внешнего умножения, превратив тем самым линейное пространство $\Omega^*(M) = \cup_{p=0}^m \Omega^p(M)$ в алгебру. Эта алгебра называется *алгеброй внешних дифференциальных форм на многообразии* или, коротко, *внешней алгеброй.*

Выясним, наконец, как записывается операция внешнего умножения в локальных координатах. Пусть $P \in \Lambda^p$ и $Q \in \Lambda^q$ — дифференциальные формы, и $(x^1, \dots, x^n)$ — локальная система координат. Тогда, в силу следствия 3.3, формы P и Q можно записать в виде

$$P = \frac{1}{p!} P_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}, \quad \text{и} \quad Q = \frac{1}{q!} Q_{j_1 \dots j_q} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}.$$

Пользуясь свойствами внешнего умножения и следствием 3.3, имеем:

$$\begin{aligned} P \wedge Q &= \frac{1}{p!\, q!} P_{i_1 \dots i_p} Q_{j_1 \dots j_q} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q} = \\ &= \frac{1}{p!\, q!} \sum_{1 \le \alpha_1 < \dots < \alpha_{p+q} \le n} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} P_{\alpha_{\sigma(1)} \dots \alpha_{\sigma(p)}} Q_{\alpha_{\sigma(p+1)} \dots \alpha_{\sigma(p+q)}} \cdot \\ &\qquad \cdot dx^{\alpha_{\sigma(1)}} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_{\sigma(p+q)}} = \\ &= \frac{1}{p!\, q!} \sum_{1 \le \alpha_1 < \dots < \alpha_{p+q} \le n} \Big(\sum_{\sigma \in S_{p+q}} (-1)^\sigma P_{\alpha_{\sigma(1)} \dots \alpha_{\sigma(p)}} Q_{\alpha_{\sigma(p+1)} \dots \alpha_{\sigma(p+q)}} \Big) \cdot \\ &\qquad \cdot dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_{p+q}}. \end{aligned}$$

Итак, доказано следующее утверждение.

Утверждение 3.3. *Пусть $P \in \Lambda^p$ и $Q \in \Lambda^q$ — внешние формы. Тогда компоненты формы $P \wedge Q$ в локальных координатах выражаются через компоненты форм P и Q так:*

$$P \wedge Q_{\alpha_1 \dots \alpha_{p+q}} = \frac{1}{p!\, q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} (-1)^\sigma P_{\alpha_{\sigma(1)} \dots \alpha_{\sigma(p)}} Q_{\alpha_{\sigma(p+1)} \dots \alpha_{\sigma(p+q)}}.$$

Замечание. Пользоваться формулой из утверждения 3.3, перемножая конкретные формы, не очень удобно. Часто проще раскрыть скобки и привести подобные члены, преобразуя все возникающие мономы $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ так, чтобы индексы i_p были упорядочены.

Упражнение 3.1. Пусть M^n — n-мерное ориентированное риманово многообразие, и $(x^1, \dots, x^n)$ — локальные координаты на M. Обозначим через $g(x)$ определитель матрицы метрики g_{ij} в координатах $(x^1, \dots, x^n)$. Определим на M внешнюю форму vol_n степени n, положив ее в координатах $(x^1, \dots, x^n)$ равной

$$\mathrm{vol}_n = \sqrt{g}\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

если эти координаты согласованы с ориентацией многообразия M, и

$$\mathrm{vol}_n = -\sqrt{g}\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

в противном случае. Проверить, что vol_n — корректно определенная внешняя n-форма на M.

Упражнение 3.2. Пусть M — ориентированное риманово многообразие размерности n. Определим отображение $*\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$, называемое *звездочка Ходжа*. Пусть $\sqrt{g}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ — форма объема на M, и обозначим через $\varepsilon_{i_1 \ldots i_n}$ ее компоненты в координатах $(x^1, \ldots, x^n)$. Пусть T — произвольная дифференциальная форма из $\Omega^k(M)$, и $T_{i_1 \ldots i_k}$ — ее компоненты в координатах $(x^1, \ldots, x^n)$. Определим форму $*T \in \Omega^{n-k}$, положив

$$(*T)_{i_{k+1} \ldots i_n} = \frac{1}{k!} \varepsilon_{i_1 \ldots i_n} T^{i_1 \ldots i_k},$$

где $T^{i_1 \cdots i_k}$ — тензор, полученный из T поднятием индексов с помощью римановой метрики g_{ij}.

Проверить, что $*T$ — корректно определенная форма из $\Omega^{n-k}(M)$.

3.4. Формы и отображения

Пусть $F\colon M \to N$ — гладкое отображение гладких многообразий M и N. Предположим, что на многообразии N задана внешняя форма ω^q степени q. Тогда, оказывается, на многообразии M естественно определяется внешняя форма той же степени q, которую мы обозначим через $F^*(\omega^q)$. Действительно, если P — произвольная точка на M, и $V_1, \ldots, V_q$ — произвольные векторы из $T_P M$, то положим

$$F^*(\omega^q)|_P\big(V_1, \ldots, V_q\big) = \omega^q|_{F(P)}\big(dF|_P(V_1), \ldots, dF|_P(V_q)\big).$$

Кососимметричность и полилинейность построенного отображения очевидна. Говорят, что форма $F^*(\omega^q)$ получена из формы ω^q *перенесением с помощью отображения* F.

Замечание. Дифференциал гладкого отображения $F\colon M \to N$, напомним, отображает каждое касательное пространство $T_P M$ в касательное пространство $T_{F(P)} N$, перенося тем самым касательные векторы к многообразию M в касательные векторы к многообразию N, т.е. «вперед». Дифференциальные формы переносятся отображением F в противоположную сторону, т.е. «назад». Отметим, что векторные поля, вообще говоря, «вперед» не переносятся. Дело в том, что отображение F может не быть взаимно однозначным. Тогда в одной точке образа мы можем получить несколько (даже бесконечно много) векторов. Переносить векторные поля можно только взаимно однозначными отображениями. С дифференциальными формами, как мы видим, дело обстоит куда проще: они переносятся назад любым гладким отображением, причем в результате получается форма, заданная на всем многообразии.

Таким образом, каждое отображение $F\colon M \to N$ порождает отображение алгебр внешних дифференциальных форм $F^*\colon \Omega^*(N) \to \Omega^*(M)$. Оказывается, это отображение уважает структуру внешней алгебры. А именно, имеет место следующее утверждение.

Утверждение 3.4. *Отображение F^* линейно. Более того, для любых форм $P \in \Omega^p(N)$ и $Q \in \Omega^q(N)$ на многообразии N имеет место следующее соотношение*:

$$F^*(P \wedge Q) = F^*(P) \wedge F^*(Q).$$

Доказательство. Линейность отображения F^* очевидна из определения. Далее, в силу линейности отображения F^*, второе свойство достаточно проверить для мономов, т.е. для форм $P = f\,dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$ и $Q = g\,dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}$. Для случая мономов требуемое свойство проверяется прямым подсчетом.

Упражнение 3.3. Показать, что если задано два отображения $F_1\colon M_1 \to M_2$ и $F_2\colon M_2 \to M_3$, то $(F_2 \circ F_1)^* = F_1^* \circ F_2^*$.

Выясним, как вычисляются компоненты формы $F^*(\omega^q)$ через компоненты формы ω^q в локальных координатах. Пусть $(x^1, \dots, x^m)$ и $(y^1, \dots, y^n)$ — локальные координаты в окрестности точек P и $F(P)$ соответственно. Тогда для произвольного набора $(\partial_{x^{i_1}}, \dots, \partial_{x^{i_q}})$ векторов канонического базиса пространства $T_P M$ имеем:

$$\begin{aligned} F^*(\omega^q)|_P\big(\partial_{x^{i_1}}, \dots, \partial_{x^{i_q}}\big) &= \omega^q|_{F(P)}\big(F_*|_P(\partial_{x^{i_1}}), \dots, F_*|_P(\partial_{x^{i_q}})\big) = \\ &= \omega^q|_{F(P)}\Big(\frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{i_1}}\partial_{y^{\alpha_1}}, \dots, \frac{\partial y^{\alpha_q}}{\partial x^{i_q}}\partial_{y^{\alpha_q}}\Big) = \\ &= \frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial y^{\alpha_q}}{\partial x^{i_q}} \omega^q|_{F(P)}\big(\partial_{y^{\alpha_1}}, \dots, \partial_{y^{\alpha_q}}\big), \end{aligned}$$

где $y^i(x^1, \dots, x^m)$ — координатное представление отображения F.

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Утверждение 3.5. *Компоненты формы $F^*(\omega)$, полученной из формы ω перенесением с помощью отображения $F\colon M \to N$, выражаются через компоненты формы ω по следующей формуле*

$$\big(F^*(\omega)\big)_{i_1 \dots i_q}(P) = \frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{i_1}}(P) \cdots \frac{\partial y^{\alpha_q}}{\partial x^{i_q}}(P)\omega_{\alpha_1 \dots \alpha_q}\big(F(P)\big).$$

Задачи

Задача 3.1. Пусть $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ — внешняя 2-форма на многообразии $\mathbb{R}^3$, с декартовыми координатами (x, y, z), заданная так: $\omega = (x + y^2)dx \wedge dz + (y + z)dy \wedge dz$. Фиксируем точку $P = (1, 2, 3)$ и пару векторов $a = (4, 5, 6)$ и $b = (7, 8, 9)$ из $T_P(\mathbb{R}^3)$. Вычислить $\omega|_P(a, b)$.

Задача 3.2. Построить пример не нулевой гладкой 2-формы на трехмерной сфере S^3.

Задача 3.3. Показать, что $*1$ — это форма объема на M, где 1 — это гладкая функция на ориентируемом римановом многообразии M, тождественно равная единице.

Задача 3.4. Пусть F — гладкая функция на ориентируемом римановом многообразии M. Найти $*F$.

Задача 3.5. Пусть T — тензорное поле типа $(0, 1)$ на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Показать, что в евклидовых координатах

$$(*T)_{23} = T_1, \quad (*T)_{31} = T_2, \quad (*T)_{12} = T_3.$$

Задача 3.6. Пусть (x, y, z) — евклидовы координаты в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Вычислить

$$*\,dx,\quad *\,dy,\quad *\,dz,\quad *(dx\wedge dy),\quad *(dx\wedge dz),\quad *(dy\wedge dz),\quad *(dx\wedge dy\wedge dz).$$

Задача 3.7. Вычислить $*(*1)$, и более общо, $*(*T)$ на ориентированном римановом многообразии M.

Задача 3.8. Пусть $f\colon S^1\to\mathbb{R}^2$ стандартное вложение окружности в плоскость:

$$x = R\cos\varphi,\qquad y = R\sin\varphi,$$

а $\omega_1 = x\,dy + y\,dx$ и $\omega_2 = (x+y)dx\wedge dy$ — внешние формы на плоскости. Вычислить $f^*(\omega_1)$ и $f^*(\omega_2)$.

Дополнительный материал

3.1. Примеры внешних форм. Приведем несколько примеров.

1. Пусть на многообразии $M=\mathbb{R}^2$ фиксированы стандартные декартовы координаты (x, y). Зададим на $\mathbb{R}^2$ внешнюю форму ω^2 степени 2, положив

$$\omega^2 = (x^2+y)dx\wedge dy.$$

Вычислим значение формы ω^2 на касательных векторах $V=(1,2)$ и $W=(3,4)$ из касательного пространства $T_P\mathbb{R}^2$ к плоскости в точке $P=(5,6)$. Форма $\omega^2|_P$ имеет вид $\omega^2|_P = (5^2+6)dx\wedge dy = 31dx\wedge dy$. Поэтому

$$\omega^2|_P(V,W) = 31dx\wedge dy(V,W) = 31\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = -62.$$

2. Пусть M^n — n-мерное ориентированное риманово многообразие. Обозначим через g гладкую функцию на M, равную определителю матрицы метрики в точках многообразия. Определим на M внешнюю форму vol_n степени n, положив ее равной

$$\mathrm{vol}_n = \sqrt{g}dx^1\wedge\dots\wedge dx^n$$

в локальных координатах, согласованных с ориентацией многообразия M, и

$$\mathrm{vol}_n = -\sqrt{g}dx^1\wedge\dots\wedge dx^n$$

в остальных локальных координатах. Легко проверить, что приведенные формулы действительно задают на M дифференциальную форму. В самом деле, если g_{ij} — компоненты римановой метрики в координатах $(x^1,\dots,x^n)$, и $(x^{1'},\dots,x^{n'})$ — другая система локальных координат на M, то компоненты $g_{i'j'}$ римановой метрики в новых координатах выглядят так:

$$g_{i'j'} = g_{ij}\,\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\,\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}.$$

Поэтому

$$\det(g_{i'j'}) = \left(\det\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right)^2\det(g_{ij}),$$

откуда, пользуясь леммой 3.2, заключаем что

$$(\mathrm{vol}_n)_{1'\dots n'} = (\mathrm{vol}_n)_{1\dots n}\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right) = \sqrt{\det(g_{ij})}\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right) =$$
$$= \operatorname{sign}\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right)\sqrt{\det(g_{i'j'})},$$

т.е. выражение $\sqrt{g}$ меняется при замене координат как существенная компонента дифференциальной формы степени n, что и требовалось. Форма vol_n называется ***формой объема риманова многообразия*** M (Подумайте, почему?).

3.2. Внешнее умножение базисных ковекторов. Пусть $(x^1, \dots, x^n)$ — система координат на многообразии. Оказывается, базисные элементы $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}$ пространства Λ^q на самом деле — внешние произведения соответствующих базисных ковекторов, а именно, для произвольного набора целых чисел $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, таких что $1 \le \alpha_i \le n$, и произвольного набора векторов $V_1, \dots, V_k$ имеет место равенство

$$dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_k}(V_1, \dots, V_k) = \det \begin{pmatrix} dx^{\alpha_1}(V_1) & dx^{\alpha_2}(V_1) & \dots & dx^{\alpha_k}(V_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ dx^{\alpha_1}(V_k) & dx^{\alpha_2}(V_k) & \dots & dx^{\alpha_k}(V_k) \end{pmatrix}.$$

В частности, внешнее произведение форм $dx^{\alpha_1}, \dots, dx^{\alpha}_k$, где $1 \le \alpha_1 < \dots \alpha_k \le n$, совпадает с базисным элементом $dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_k}$ пространства Λ^k. Этот результат уже был сформулирован выше в виде леммы 3.3

Действительно, воспользовавшись ассоциативностью внешнего произведения, и следствием 2.1, запишем форму $dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_k}$ так:

$$\begin{aligned} dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_k} \quad &= \quad dx^{\alpha_1} \wedge \Big(dx^{\alpha_2} \wedge \big(\cdots(dx^{\alpha_{k-1}} \wedge dx^{\alpha_k})\cdots\big)\Big) = \\ &= dx^{\alpha_1} \wedge \Big(dx^{\alpha_2} \wedge \cdots \big(dx^{\alpha_{k-2}} \wedge \big[\frac{2!}{1!\,1!} A(dx^{\alpha_{k-1}} \otimes dx^{\alpha_k})\big]\big)\cdots\Big) = \\ &= dx^{\alpha_1} \wedge \Big(dx^{\alpha_2} \wedge \cdots \big[\frac{3!}{2!\,1!}\frac{2!}{1!\,1!} A\big(dx^{\alpha_{k-2}} \otimes A(dx^{\alpha_{k-1}} \otimes dx^{\alpha_k})\big)\big]\cdots\Big) = \\ &= \dots = k! A(dx^{\alpha_1} \otimes \dots \otimes dx^{\alpha_k}). \end{aligned}$$

Но тогда, в силу определения альтернирования и леммы 2.6 можно переписать последнее выражение в виде

$$\begin{aligned} dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_k} \quad &= \quad k! A(dx^{\alpha_1} \otimes \dots \otimes dx^{\alpha_k}) = \\ &= \quad k! \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma {}_\sigma\big(dx^{\alpha_1} \otimes \dots \otimes dx^{\alpha_k}\big) = \\ &= \quad \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma dx^{\alpha_{\sigma^{-1}(1)}} \otimes \dots \otimes dx^{\alpha_{\sigma^{-1}(k)}} = \\ &= \quad \sum_{\pi \in S_k} (-1)^\pi dx^{\alpha_{\pi(1)}} \otimes \dots \otimes dx^{\alpha_{\pi(k)}}, \end{aligned}$$

где через π мы переобозначили перестановку σ^{-1}. Поэтому

$$dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_k}(V_1, \dots, V_k) = \sum_{\pi \in S_k} (-1)^\pi dx^{\alpha_{\pi(1)}}(V_1) \cdots dx^{\alpha_{\pi(k)}}(V_k),$$

что и требовалось.

3.3. Доказательство следствия 3.3. Действительно,

$$T_{i_1 \dots i_q} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q} = \sum_{\text{все } i_k \text{ различны}} + \sum_{\text{не все } i_k \text{ различны}},$$

причем вторая сумма равна нулю. Представим теперь первую сумму в виде

$$\sum_{1 \le i_1 < \dots < i_q \le n} \Big(\sum_{\sigma \in S_q} T_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(q)}} dx^{i_{\sigma(1)}} \wedge \dots \wedge dx^{i_{\sigma(q)}}\Big).$$

Но, для каждого упорядоченного набора $1 \le i_1 < \cdots < i_q \le n$ соответствующее слагаемое в скобках в силу кососимметричности тензора T и следствия 3.2 переписывается в виде

$$\sum_{\sigma \in S_q} T_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(q)}} dx^{i_{\sigma(1)}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{\sigma(q)}} = T_{i_1 \dots i_q} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_q} \sum_{\sigma \in S_q} \Bigl((-1)^\sigma (-1)^\sigma \Bigr),$$

и, таким образом, это слагаемое равно

$$q! T_{i_1 \dots i_q} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_q}.$$

Поэтому окончательно

$$T_{i_1 \dots i_q} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_q} = q! \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_q \le n} T_{i_1 \dots i_q} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_q},$$

что и требовалось.

3.4. Пример вычисления звездочки Ходжа. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ в координатах (x, y, z) задана риманова метрика (g_{ij}), где

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \qquad (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 \end{pmatrix}, \qquad g = \sqrt{\det(g_{ij})} = 6,$$

а также дифференциальные формы dz и $dx \wedge dy$. Вычислим 2-форму $\omega = *(dz)$. Вычисления проведем в координатах (x, y, z). Заметим, что компоненты формы dz имеют вид $(0, 0, 1)$. После поднятия индекса, получаем векторное поле с компонентами $T^i = g^{i\alpha}(dz)_\alpha$, равными $(0, 0, 1/9)$. По определению,

$$\omega_{ij} = \frac{1}{k!} \varepsilon_{ij\beta} T^\beta,$$

где $\varepsilon_{ij\beta}$ — компоненты формы объема, а $k = 1$ как степень формы dz. В свою очередь, форма объема имеет вид $g\,dx \wedge dy \wedge dz$, а ее компонента $\varepsilon_{ijk} = g\,\mathrm{sign}\{i, j, k\}$, где $\mathrm{sign}\{i, j, k\}$ равен нулю, если среди $\{i, j, k\}$ есть совпадающие, и равен знаку перестановки (i, j, k) в противном случае. Итак,

$$\omega_{12} = \varepsilon_{12\beta} T^\beta = \varepsilon_{123} T^3 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}, \quad , \omega_{13} = \varepsilon_{132} T^2 = 0, \quad \omega_{23} = \varepsilon_{231} T^1 = 0,$$

поэтому $*(dz) = \dfrac{2}{3} dx \wedge dy$.

Теперь вычислим $\xi = *(dx \wedge dy)$. Компоненты T^{ij} тензорного поля, полученного из $dx \wedge dy$ поднятием индексов, можно записать в виде следующей матрицы:

$$(T^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Снова по определению,

$$\xi_i = \frac{1}{2!} \varepsilon_{i\alpha\beta} T^{\alpha\beta}.$$

Поэтому

$$\xi_1 = \frac{1}{2} \varepsilon_{1\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \Bigl(\varepsilon_{123} T^{23} + \varepsilon_{132} T^{32} \Bigr) = \varepsilon_{123} T^{23} = 0,$$

где мы сначала выписали все потенциально ненулевые слагаемые а затем воспользовались косой симметрией. Аналогично,

$$\xi_2 = \varepsilon_{231} T^{31} = 0, \qquad \xi_3 = \varepsilon_{312} T^{12} = 6 \frac{1}{4} = \frac{3}{2},$$

откуда $*(dx \wedge dy) = \dfrac{3}{2} dz$. Поэтому $*\Bigl(*(dz)\Bigr) = dz$ и $*\Bigl(*(dx \wedge dy)\Bigr) = dx \wedge dy$.

Лекция 4. Дифференцирование и интегрирование форм

В прошлой лекции мы определили алгебру внешних дифференциальных форм. Теперь введем на дифференциальных формах операции интегрирования и дифференцирования. Нам также понадобится расширить понятие многообразия, определив многообразия с краем.

4.1. Внешнее дифференцирование

Внешняя дифференциальная форма степени нуль — это просто гладкая функция на многообразии. Тогда, как мы уже знаем, каждой функции можно поставить в соответствие кососимметричное (автоматически) тензорное поле типа $(0,1)$ — дифференциал этой функции. Таким образом, определено отображение $d\colon \Omega^0(M) \to \Omega^1(M)$, ставящее в соответствие каждой 0-форме $f \in \Omega^0(M)$ ковектор, т.е. 1-форму, df. Если $(x^1,\dots,x^n)$ — координаты на многообразии M, и $f(x^1,\dots,x^n)$ — координатное представление функции f, то, в этих координатах, $df = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}dx^i$.

В общем случае, для произвольного натурального p, построим отображение $d\colon \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$. Мы определим его в локальных координатах. Пусть $(x^1,\dots,x^n)$ — локальные координаты на многообразии M, и P — произвольная форма из $\Omega^p(M)$, которая в этих координатах записывается в виде

$$P = \sum_{1\le i_1<\dots<i_p\le n} P_{i_1\dots i_p} dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_p}.$$

Коэффициенты $P_{i_1\dots i_p}$ — это гладкие функции в карте $U(x^1,\dots,x^n)$ на многообразии M. Определим *внешний дифференциал* (*внешнюю производную*) *dP формы P*, положив

$$dP = \sum_{1\le i_1<\dots<i_p\le n} d(P_{i_1\dots i_p})\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_p}.$$

Отметим, что если записать форму P в виде

$$P = \frac{1}{p!}P_{i_1\dots i_p}dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_p},$$

то определенная только что ее внешняя производная запишется в виде

$$dP = \frac{1}{p!}d(P_{i_1\dots i_p})\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_p}.$$

Лемма 4.1. *Операция внешнего дифференцирования определена корректно, т.е. не зависит от выбора локальной системы координат, участвующей в ее определении.*

Доказательство. Пусть в некоторой окрестности $U \subset M$ заданы две локальных системы координат $(x^1, \dots, x^n)$ и $(x^{1'}, \dots, x^{n'})$. Тогда дифференциальная форма $P \in \Omega^p(M)$ в U может быть записана двумя способами:

$$P = \frac{1}{p!} P_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = \frac{1}{p!} P_{i'_1 \dots i'_p} dx^{i'_1} \wedge \dots \wedge dx^{i'_p},$$

где компоненты $P_{i_1 \dots i_p}$ и $P_{i'_1 \dots i'_p}$ связаны по тензорному закону. Тогда в координатах $(x^{1'}, \dots, x^{n'})$ внешняя производная dP, в соответствие с определением, вычисляется так:

$$dP = \frac{1}{p!} d(P_{i'_1 \dots i'_p}) \wedge dx^{i'_1} \wedge \dots \wedge dx^{i'_p} = \frac{1}{p!} \frac{\partial P_{i'_1 \dots i'_p}}{\partial x^{\alpha'}} dx^{\alpha'} \wedge dx^{i'_1} \wedge \dots \wedge dx^{i'_p}.$$

Воспользовавшись тензорным законом, получим:

$$p!\, dP = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}} \Big(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i'_p}} P_{i_1 \dots i_p} \Big) dx^{\alpha'} \wedge dx^{i'_1} \wedge \dots \wedge dx^{i'_p}.$$

Так как вторые производные $\dfrac{\partial^2 x^{i_k}}{\partial x^{i'_l} \partial x^{\alpha'}}$ симметричны по i'_l и α', а внешнее произведение $dx^{\alpha'} \wedge dx^{i'_l}$ — кососимметрично, все слагаемые, содержащие эти вторые производные сокращаются. В результате получаем:

$$\begin{aligned} p!\, dP &= \frac{\partial P_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i'_p}} dx^{\alpha'} \wedge dx^{i'_1} \wedge \dots \wedge dx^{i'_p} = \\ &= \frac{\partial P_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} dx^{\alpha'} \wedge \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} dx^{i'_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i'_p}} dx^{i'_p} = \\ &= \frac{\partial P_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^{\alpha}} dx^{\alpha} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}. \end{aligned}$$

Но выражение справа — это, с точностью до деления на $p!$, внешняя производная dP формы P, записанная в координатах $(x^1, \dots, x^n)$. Лемма доказана.

Установим простейшие свойства внешнего дифференциала.

Утверждение 4.1. *Пусть $P \in \Omega^p(M)$ и $Q \in \Omega^q(M)$ — дифференциальные формы на M.*

- *Для произвольных постоянных c_1 и c_2 имеет место равенство: $d(c_1 P + c_2 Q) = c_1 d(P) + c_2 d(Q)$ (линейность).*

- *Имеет место следующий аналог правила Лейбница*: $d(P \wedge Q) = d(P) \wedge Q + (-1)^p P \wedge d(Q)$.

- *Идемпотентность*: $d(dP) = 0$.

- *Для произвольного гладкого отображения* $F\colon X \to M$ *имеет место равенство* $F^*(dP) = d(F^*P)$.

Доказательство. Первое свойство очевидно.[3]

В силу линейности, второе свойство достаточно проверить для случая мономов, т.е. для $P = f\,dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$ и $Q = g\,dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}$. Имеем:

$$P \wedge Q = \big(f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}\big) \wedge \big(g dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}\big) = \\ = fg\big(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}\big) \wedge \big(dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}\big),$$

поэтому

$$d(P \wedge Q) = d(fg) \wedge \big(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}\big) \wedge \big(dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}\big) = \\ = \frac{\partial fg}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \wedge \big(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}\big) \wedge \big(dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}\big) = \\ = \Big(\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} g + f\frac{\partial g}{\partial x^\alpha}\Big) dx^\alpha \wedge \big(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}\big) \wedge \big(dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}\big) = \\ = \Big(\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \wedge \big(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}\big)\Big) \wedge \Big(g\, dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}\Big) + \\ + (-1)^p \Big(f\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}\Big) \wedge \Big(\frac{\partial g}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \wedge \big(dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}\big)\Big) = \\ = dP \wedge Q + (-1)^p P \wedge dQ,$$

что и требовалось. Отметим, что здесь $(-1)^p$ — четность перестановки, «меняющей местами» dx^α и моном $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$.

Докажем третье свойство. Для мономов вида $f\,dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$ оно немедленно вытекает из симметричности вторых частных производных $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ и косой симметрии внешнего произведения $dx^i \wedge dx^j$.

Наконец, в силу линейности внешнего дифференцирования и операции перенесения, последнее свойство тоже достаточно проверить для монома $P = f\,dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$. Обозначим через $(t^1, \dots, t^m)$ локальные координаты на X, и пусть $x^i = x^i(t^1, \dots, t^m)$ — координатное предста-

[3] На самом деле, мы определили только дифференциал формы фиксированной степени p, а не произвольного элемента алгебры Ω^*, каким является $c_1 P + c_2 Q$. Поэтому для $p \neq q$ формула $d(P + Q) = dP + dQ$ имеет место по определению.

вление отображения F. Тогда

$$F^*(dP) = F^*\big(d(f\,dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p})\big) = F^*\big(\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}dx^\alpha\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}\big) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial t^\beta}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_p}}{\partial t^{j_p}}dt^\beta\wedge dt^{j_1}\wedge\cdots\wedge dt^{j_p} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial t^\beta}\Big(f\big(x(t)\big)\frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_p}}{\partial t^{j_p}}\Big)dt^\beta\wedge dt^{j_1}\wedge\cdots\wedge dt^{j_p} =$$
$$= d\Big((f\circ F)(t)\frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_p}}{\partial t^{j_p}}dt^{j_1}\wedge\cdots\wedge dt^{j_p}\Big) = d(F^*P),$$

что и требовалось. Утверждение полностью доказано.

Наконец, в заключение настоящего раздела запишем, как выглядит операция внешнего дифференцирования в локальных координатах. Доказательство следующей леммы непосредственно вытекает из определений и оставляется в качестве обязательного упражнения.

Лемма 4.2. *Пусть T — внешняя форма степени k на многообразии M^n, и обозначим через R ее внешний дифференциал, т.е. $R = dT$. Пусть $(x^1,\dots,x^n)$ — произвольные локальные координаты на многообразии M. Тогда для любых $1\le i_1<\cdots i_{k+1}\le n$ имеет место равенство*

$$R_{i_1\dots i_{k+1}} = \sum_{p=1}^{k+1}(-1)^{p+1}\frac{\partial}{\partial x^{i_p}}T_{i_1\dots i_{p-1}i_{p+1}\dots i_{k+1}}.$$

4.2. Интегрирование дифференциальных форм на ориентированных многообразиях

Пусть M — гладкое ориентируемое многообразие размерности n, и предположим, что на M раз и навсегда фиксирована некоторая ориентация. Последнее означает, что якобиан матрицы перехода от одних рассматриваемых локальных координат к другим предполагается положительным. Пусть ω^n — некоторая дифференциальная форма степени n на M. Как и для случая обычных функций, *носителем* $\operatorname{supp}\omega^n$ формы ω^n называется замыкание множества всех точек x из M, в которых форма ω^n отлична от нуля. В данном разделе мы определим интеграл от формы ω^n с компактным носителем по ориентированному многообразию M.

Пусть $W\subset M$ — некоторая область на многообразии M. Предположим сначала, что область W целиком лежит внутри некоторой карты (U,φ) многообразия M, и обозначим через $(x^1,\dots,x^n)$ соответствующие локальные координаты. Тогда в этих координатах форма $\omega^n\in\Omega^n(M)$ записывается в виде

$$f(x^1,\dots,x^n)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n,$$

где $f = \omega_{1\ldots n}$. Положим

$$\int_W \omega^n = \int\limits_{\varphi(W)}\!\!\cdots\!\int f(x^1,\ldots,x^n)dx^1\cdots dx^n,$$

где справа стоит обычный кратный интеграл по области $\varphi(W) \subset \mathbb{R}^n$. Это число назовем *интегралом от формы* ω^n *по области* W.

Величина, стоящая в правой части, не зависит от выбора локальных координат. Действительно, пусть (U', φ') — еще одна карта на M, и $(x^{1'},\ldots,x^{n'})$ — соответствующие локальные координаты. Предположим, что $W \subset U \cap U'$. Тогда форма ω^n записывается в этих координатах в виде

$$g(x^{1'},\ldots,x^{n'})dx^{1'}\wedge\cdots\wedge dx^{n'},$$

где, как мы вычислили в лемме 3.2, функции f и g связаны так:

$$g(x^{1'},\ldots,x^{n'}) = f\big(x^1(x^{1'},\ldots,x^{n'}),\ldots,x^n(x^{1'},\ldots,x^{n'})\big)\det\Big(\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\Big).$$

Но тогда, воспользовавшись формулой замены переменных в кратном интеграле и тем фактом, что якобиан функции перехода $\varphi\circ(\varphi')^{-1}$ положителен, можно переписать интеграл от формы ω^n по W в «новых» координатах $(x^{1'},\ldots,x^{n'})$ так:

$$\int_W \omega^n = \int\limits_{\varphi'(W)}\!\!\cdots\!\int g(x^{1'},\ldots,x^{n'})dx^{1'}\cdots dx^{n'} =$$

$$= \int\limits_{\varphi'(W)}\!\!\cdots\!\int f\big(x^1(x^{1'},\ldots,x^{n'}),\ldots,x^n(x^{1'},\ldots,x^{n'})\big)\det\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}dx^{1'}\cdots dx^{n'} =$$

$$= \int\limits_{\varphi'(W)}\!\!\cdots\!\int f\big(x^1(x^{1'},\ldots,x^{n'}),\ldots,x^n(x^{1'},\ldots,x^{n'})\big)\left|\det\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\right|dx^{1'}\cdots dx^{n'} =$$

$$= \int\limits_{(\varphi\circ(\varphi')^{-1})(\varphi'(W))}\!\!\cdots\!\int f(x^1,\ldots,x^n)dx^1\cdots dx^n =$$

$$= \int\limits_{\varphi(W)}\!\!\cdots\!\int f(x^1,\ldots,x^n)dx^1\cdots dx^n.$$

Осталось заметить, что в правой части мы получили в точности интеграл от формы ω^n, записанный в координатах $(x^1,\ldots,x^n)$. Итак, мы доказали следующую лемму.

Лемма 4.3. *Интеграл от формы ω^n по области $W \subset M$, целиком лежащей в одной карте, не зависит от выбора ориентированных локальных координат.*

Чтобы определить интеграл от формы ω^n в общем случае, нам придется вспомнить кое-что из прошлого семестра. А именно, тогда мы уже пользовались существованием *разбиения единицы*, подчиненного (локально) конечному покрытию $\{U_\alpha\}$ топологического пространства M. Последнее означает, что существует набор функций $\{f_\alpha\}$ на M, таких что

- множество значений каждой функции f_α лежит в отрезке $[0,1]$;
- носитель функции f_α содержится в соответствующем элементе покрытия, т.е. $\operatorname{supp} f_\alpha \subset U_\alpha$;
- для каждой точки x из M имеет место равенство $\sum_\alpha f_\alpha(x) = 1$.

Более того, было отмечено, что если U_α — открытые множества в $\mathbb{R}^n$, то все функции f_α могут быть выбраны гладкими. Поскольку координатный гомеоморфизм φ_α отождествляет каждую карту U_α с областью в $\mathbb{R}^n$, отсюда вытекает следующий результат.

Утверждение 4.2. *Пусть M — гладкое многообразие, и $\big\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\big\}$ — локально конечный атлас на M. Тогда существует разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$, состоящее из гладких функции на M.*

Итак, пусть снова $\omega^n \in \Omega^n(M)$ — форма с компактным носителем, и $\big\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\big\}$ — ориентированный локально конечный атлас на ориентированном многообразии M. Пусть $\{f_\alpha\}$ — разбиение единицы, подчиненное атласу $\{U_\alpha\}$. Так как носитель формы ω^n компактен, он содержится в объединении конечного числа карт $U_1,\dots,U_N$. Определим *интеграл от формы ω^n по многообразию M*, положив

$$\int_M \omega^n = \sum_{i=1}^N \int_{U_i} f_i\omega^n.$$

Отметим, что все интегралы, стоящие в сумме справа берутся по областям, целиком лежащим в карте, поэтому определены.

Лемма 4.4. *Определение интеграла от формы ω^n по многообразию M не зависит ни от выбора разбиения единицы, ни от выбора ориентированного атласа на ориентированном многообразии M.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что атлас карт $\big\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\big\}$ конечен. Действительно, для этого достаточно вместо многообразия M рассмотреть его подмножество $\cup_{i=1}^N U_i$, которое тоже, очевидно, является многообразием.

Итак, пусть на M имеется два конечных атласа $\big\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\big\}_{\alpha=1}^N$ и $\big\{(W_\beta,\psi_\beta)\big\}_{\beta=1}^M$, и $\{f_\alpha\}$ и $\{g_\beta\}$ — подчиненные им разбиения единицы.

Рассмотрим набор функций $\{h_{\alpha\beta} = f_\alpha g_\beta\}$. Легко видеть, что этот набор функций представляет собой разбиение единицы для системы множеств $\{V_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap W_\beta\}$. Действительно, первые два свойства из определения разбиения единицы очевидны, а

$$\sum_{\alpha,\beta} h_{\alpha\beta} = \sum_\alpha \Big(f_\alpha \sum_\beta g_\beta \Big) = \sum_\alpha f_\alpha = 1,$$

что и требовалось.

Проверим теперь совпадение интегралов от формы ω, определенных с помощью разных атласов. Имеем:

$$\sum_\alpha \int_{U_\alpha} f_\alpha \omega = \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \Big(\sum_\beta g_\beta \Big) f_\alpha \omega = \sum_{\alpha,\beta} \int_{U_\alpha} (f_\alpha g_\beta)\omega =$$
$$= \sum_{\alpha,\beta} \int_{U_\alpha \cap W_\beta} h_{\alpha\beta}\omega = \sum_{\alpha\beta} \int_{V_{\alpha\beta}} h_{\alpha\beta}\omega,$$

т.е. интеграл, определенный с помощью покрытия $\{U_\alpha\}$ совпадает с интегралом, определенным с помощью покрытия $\{V_{\alpha\beta}\}$. Аналогично проверяется и что интеграл, определенный с помощью $\{W_\beta\}$ совпадает с интегралом, определенным с помощью $\{V_{\alpha\beta}\}$. Лемма доказана.

Перечислим простейшие свойства интеграла.

Утверждение 4.3. *Пусть M — гладкое ориентированное многообразие.*

- *Интегрирование внешних форм по M линейно*:

  $$\int_M (\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2) = \lambda_1 \int_M \omega_1 + \lambda_2 \int_M \omega_2$$

  для любых форм ω_1 и ω_2 с компактным носителем и любых чисел λ_1 и λ_2.

- *Обозначим через $\tilde{M}$ многообразие M с противоположной ориентацией. Тогда*

  $$\int_{\tilde{M}} \omega = -\int_M \omega$$

  для любой формы ω с компактным носителем.

Доказательство. Первое свойство очевидно.

В силу аддитивности интеграла, второе свойство достаточно проверять для формы, носитель которой содержится в одной карте. Пусть $\big\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\big\}$ — ориентированный атлас на M. Тогда атлас с противоположной ориентацией, т.е. атлас на $\tilde{M}$ можно получить заменив знак первой координатной функции в каждой системе локальных координат. Другими словами, если $(x^1, \dots, x^n)$ — локальные координаты на M в карте (U, φ), то в качестве локальных координат на $\tilde{M}$ можно взять $(y^1, \dots, y^n) = (-x^1, x^2, \dots, x^n)$. Соответствующую карту на $\tilde{M}$ обозначим через $(U, \tilde{\varphi})$.

Пусть в карте $(U, \tilde{\varphi})$ форма ω имеет вид $f(y^1, \dots, y^n)dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n$. Тогда в силу леммы 3.2

$$\int_{U \subset \tilde{M}} \omega = \underset{\tilde{\varphi}(U)}{\int \cdots \int} f(y^1, \dots, y^n) dy^1 \cdots dy^n =$$

$$= \underset{\tilde{\varphi}(U)}{\int \cdots \int} g\big(x^1(y^1, \dots, y^n), \dots, x^n(y^1, \dots, y^n)\big) \det\Big(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\Big) dy^1 \cdots dy^n,$$

где $g(x^1, \dots, x^n)$ — существенная компонента формы ω в локальных координатах $(x^1, \dots, x^n)$. Воспользуемся теоремой о замене переменной в кратном интеграле, учитывая что $\det\Big(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\Big) < 0$. Получим:

$$\int_{U \subset \tilde{M}} \omega =$$

$$= \underset{\tilde{\varphi}(U)}{\int \cdots \int} g\big(x^1(y^1, \dots, y^n), \dots, x^n(y^1, \dots, y^n)\big) \det\Big(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\Big) dy^1 \cdots dy^n =$$

$$= -\underset{\varphi(U)}{\int \cdots \int} g(x^1, \dots, x^n) dx^1 \cdots dx^n = -\int_{U \subset M} \omega.$$

Утверждение доказано.

Итак, мы определили интегрирование дифференциальных форм по многообразию и изучили простейшие свойства этой операции. Теперь естественно перенести на случай многообразий известные из курса математического анализа формулы Грина, Стокса и Остроградского–Гаусса (соответствующий результат имеет место и называется общей теоремой Стокса). Однако в этих формулах интегрирование производиться не по многообразиям, а по несколько более общим объектам: к соответствующим многообразиям (области на плоскости или в пространстве, поверхности в пространстве) добавляются граничные (в топологическом смысле) точки. Поэтому, чтобы построить соответствующее обобщение, мы начнем с определения аналога области с границей, который называется многообразием с краем.

Замечание. Отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$ не является многообразием, так как его концевые точки a и b не имеют окрестностей, гомеоморфных открытым дискам. Поэтому, пока, величина $\int_a^b f(x)dx$, где x — координата на прямой, а $f(x)dx$ — гладкая 1-форма на ней, не определена.

4.3. Многообразия с краем

Пусть N — гладкое многообразие. Замыкание M открытого подмножества из N называется *многообразием с краем*, если существует такая гладкая функция $f\colon N \to \mathbb{R}$, что $M = \{x \in N \mid f(x) \geq 0\}$, и дифференциал функции f во всех точках x, где $f(x) = 0$, отличен от нуля. В этом случае множество точек, где $f(x) = 0$, называется *краем многообразия* M и обозначается через ∂M. *Размерностью многообразия M с краем ∂M* называется размерность многообразия N. Компактные многообразия без края называют *замкнутыми*.

Отметим, что если край ∂M пуст, то M является обычным гладким многообразием (без края). Из прошлого семестра мы знаем, что край многообразия M, как множество решений регулярного уравнения, обладает структурой гладкого многообразия (без края), причем в качестве карт можно рассмотреть пересечения карт многообразия N с краем ∂M. Если размерность многообразия M равняется n, то размерность его края ∂M равна $n - 1$.

Эквивалентное определение многообразия с краем получается, если немного модифицировать определение многообразия. А именно, хаусдорфово топологическое пространство M называется *многообразием с краем*, если его можно покрыть не более чем счетным семейством открытых множеств, каждое из которых гомеоморфно некоторому открытому подмножеству в полупространстве $\mathbb{R}^n_+ = \big\{(x^1, \ldots, x^n) \mid x^1 \geq 0\big\}$. Последнее означает, что точки пространства M разбиваются на два класса: точки, обладающие окрестностью, гомеоморфной пространству $\mathbb{R}^n$ (такие точки называют *внутренними*); и точки, обладающие лишь окрестностью, гомеоморфной полупространству $\mathbb{R}^n_+$ (такие точки называют *краевыми*). Край ∂M — это множество всех краевых точек из M.

В качестве примера многообразия с краем можно взять любую область в $\mathbb{R}^n$, (топологическая) граница которой задана неявно гладкой функцией в виде $f(x) = 0$, причем $df \neq 0$ на этой границе.

В каждом конкретном случае удобно пользоваться то одним, то другим из приведенных определений. Отметим, что все понятия, введенные нами выше для случая многообразий без края дословно переносятся и на случай многообразий с краем. Для них также легко можно переформулировать и доказанные нами теоремы. В качестве примера, рассмотрим аналог теоремы о задании многообразия системой уравнений.

Пусть $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $k \leq n$, — вектор-функция, и предположим, что во всех точках множества уровня $M = \{P \in \mathbb{R}^n \mid F(P) = 0\}$ дифференциал dF отображения F имеет максимальный ранг, равный k. Обозначим через $(x^1, \ldots, x^n)$ и $(y^1, \ldots, y^k)$ декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^k$ соответственно, и пусть $y^i = f^i(x^1, \ldots, x^n)$ — координатное представление функции F. Рассмотрим систему из $k - 1$ уравнения и одного неравенства:

$$f^i(x^1,\dots,x^n)=0,\quad i=1,\dots,k-1,\qquad f^k(x^1,\dots,x^n)\geq 0,$$

и пусть $\tilde M$ — множество решений этой системы. Из первого определения многообразия с краем и соответствующего результата об обычных многообразиях, немедленно вытекает следующая теорема.

Теорема 4.1. *Если во всех точках множества*

$$M=\{P\in\mathbb{R}^n\mid F(P)=0\}$$

дифференциал dF отображения F имеет максимальный ранг, равный k, и в каждой точке $P\in\tilde M$ ранг матрицы

$$\Big(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\Big),\qquad i=1,\dots,k-1,\quad j=1,\dots,n,$$

равен $k-1$, то множество $\tilde M$ — многообразие с краем $\partial\tilde M=M$.

В дальнейшем нам будет полезен следующий результат.

Теорема 4.2. *Если M — ориентируемое многообразие с краем, то его край ∂M тоже ориентируем.*

Доказательство. Воспользуемся определением многообразия с краем через обобщенные карты. Пусть $\{(U_i,\varphi_i),(V_\alpha,\psi_\alpha)\}$ — ориентированный атлас на многообразии M, где карты U_i гомеоморфны $\mathbb{R}^n$, а карты V_α — $\mathbb{R}^n_+$. Тогда атлас на крае ∂M строится как пересечение карт V_α, гомеоморфных $\mathbb{R}^n_+$, с краем ∂M. Обозначим через $(x^1_\alpha,\dots,x^n_\alpha)$ локальные координаты, порожденные картой V_α. Тогда пересечение $W_\alpha=V_\alpha\cap\partial M$ задается условием $x^1=0$, сама карта V_α — условием $x^1\geq 0$, а $(x^2_\alpha,\dots,x^n_\alpha)$ — локальные координаты на ∂M. Пусть W_α и W_β — две такие пересекающиеся карты. Нам нужно показать, что якобиан матрицы перехода от W_α к W_β положителен. Рассмотрим матрицу $\big(\dfrac{\partial {x_\alpha}^i}{\partial {x_\beta}^j}\big)$ перехода от V_α к V_β в точке $P\in W_\alpha\cap W_\beta$. Она имеет, по условию, положительный определитель, который мы обозначим через Δ_n. Поскольку на краю ∂M выполнено соотношение $x^1_\alpha=0$, все производные вида $\dfrac{\partial {x_\alpha}^1}{\partial {x_\beta}^k}$, $k=2,\dots,n$, равны нулю. Поэтому определитель Δ_n равен произведению $\dfrac{\partial {x_\alpha}^1}{\partial {x_\beta}^1}\Delta_{n-1}$, где Δ_{n-1} — якобиан матрицы перехода от W_α к W_β. Осталось заметить, что производная $\dfrac{\partial {x_\alpha}^1}{\partial {x_\beta}^1}$ не отрицательна, так как в V_α и в V_β обе функции x^1_α и x^1_β положительны. Поэтому Δ_{n-1} больше нуля, что и требовалось доказать.

Определение. Ориентация края ∂M ориентированного многообразия M, противоположная построенной в доказательстве теоремы 4.2, называется *согласованной* с ориентацией многообразия M или *канонической*.

Замечание. Геометрически, каноническая ориентация края ∂M ориентированного многообразия M^n устроена так. Рассмотрим в точке P края ∂M базис $e_1, \dots, e_n$ касательного пространства $T_P M$, где векторы $e_2, \dots, e_n$ касаются края, а вектор e_1 направлен от края ∂M «наружу» многообразия M (формально последнее означает, что, если $(x^1, \dots, x^n)$ — локальные координаты в окрестности краевой точки P, в которых край ∂M задается условием $x_1 = 0$, то вектор $e_1 \in T_P M$ имеет отрицательную составляющую по координате x^1). Ориентация базиса $e_2, \dots, e_n$ согласована с ориентацией края, порожденной ориентацией многообразия M, если и только если ориентация базиса $e_1, \dots, e_n$ согласована с ориентацией многообразия M.

Пример. На рис. 1 изображена ориентация края цилиндра — двух окружностей, согласованная с ориентацией цилиндра, заданной базисом (e_1, e_2), где e_1 — вектор, параллельный меридиану, а e_2 — параллели, см. рис. 1.

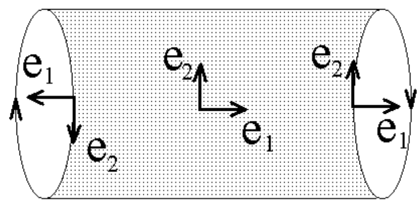

Рис. 1. Ориентация цилиндра и его края

Замечание. Край неориентируемого многообразия может быть ориентируемым многообразием. Например, край неориентируемого листа Мебиуса — ориентируемая окружность. Поэтому продолжить ориентацию с края на многообразие можно не всегда.

Задачи

Задача 4.1. Пусть на многообразии $\mathbb{R}^3$ со стандартными координатами (x, y, z) задана 1-форма $\omega = x\,dy + y\,dx$. Вычислить $d\omega$.

Задача 4.2. Пусть $f\colon S^1 \to \mathbb{R}^2$ стандартное вложение окружности в плоскость:

$$x = R\cos\varphi, \qquad y = R\sin\varphi,$$

а $\omega_1 = x\,dy + y\,dx$ — внешняя форма на плоскости. Вычислить $df^*(\omega_1)$.

Задача 4.3. Пусть M — риманово многообразие размерности n. Вычислить $d\,\mathrm{vol}_n$.

Задача 4.4. Пусть S^2 — стандартно вложенная в $\mathbb{R}^3$ сфера радиуса R, и (g_{ij}) — индуцированная метрика на S^2. Вычислить

$$\int_{S^2} \mathrm{vol}_2 .$$

Задача 4.5. Покажите, что полноторий, ограниченный тором, полученным при вращении вокруг оси z окружности радиуса r в плоскости xz с центром в точке $(R, 0, 0)$, $0 < r < R$, является многообразием с краем.

Задача 4.6. Что произойдет с канонической ориентацией края многообразия, если поменять ориентацию многообразия с краем на противоположную?

Дополнительный материал

4.1. Доказательство леммы 4.2. Пусть

$$P = \sum_{1 \le j_1 < \dots < j_p \le n} P_{j_1 \dots j_p} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}$$

— внешняя форма степени p на многообразии M, записанная в локальных координатах $(x^1, \dots, x^n)$, и $R = dP \in \Omega^{p+1}(M)$. Тогда, по определению,

$$R = \sum_{1 \le j_1 < \dots < j_p \le n} d(P_{j_1 \dots j_p}) \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} .$$

Поэтому

$$R = \sum_{1 \le j_1 < \dots < j_p \le n} \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial T_{j_1 \dots j_p}}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \right) \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} =$$
$$= \sum_{1 \le j_1 < \dots < j_p \le n} \left(\sum_{\alpha \notin \{j_1, \dots, j_p\}} \frac{\partial T_{j_1 \dots j_p}}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} \right).$$

Отметим, что индексы j_k упорядочены по возрастанию. Переставив dx^α так, чтобы полученный набор из $(p+1)$-го индекса стал упорядоченным по возрастанию и переобозначив индексы, получаем

$$R = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_{p+1} \le n} \left(\sum_{\alpha=1}^{p+1} \frac{\partial T_{i_1 \dots i_{\alpha-1} i_{\alpha+1} \dots i_{p+1}}}{\partial x^{i_\alpha}} (-1)^{\alpha+1} \right) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{p+1}},$$

что и требовалось.

4.2. Об интегрировании форм. Предположим, что атлас гладкого компактного многообразия M содержит карту (U, φ), такую что $M \setminus U$ представляет собой множество меры нуль. Такое часто случается в примерах, скажем стандартная карта стереографической проекции — это сфера без точки. В сделанных предположениях имеет место следующее утверждение.

Утверждение 4.4. *Для любой внешней формы ω старшей степени на M имеет место равенство*

$$\int_U \omega = \int_M \omega.$$

Доказательство проводится стандартными средствами математического анализа и оставляется в качестве упражнения.

4.3. Два определения многообразия с краем. Рассмотрим $M \subset N$ — многообразие с краем, край которого ∂M задан невырожденной на ∂M функцией $f\colon N \to \mathbb{R}$, и пусть $n = \dim N$. Построим на M атлас обобщенных карт. Во внутренних точках множества M, т.е. в точках из множества $M \setminus \partial M$, в качестве карт искомого атласа можно взять соответствующие карты многообразия N, пересекая их, если нужно с открытым множеством $M \setminus \partial M$.

Рассмотрим теперь точку P из ∂M. Функция f является гладкой функцией на N, причем дифференциал этой функции в точках из ∂M по определению отличен от нуля, т.е. функция f является субмерсией в точках из M. Поэтому множество ∂M является многообразием размерности $(n-1)$. Более того, ∂M является подмногообразием в N. Воспользовавшись утверждением о нормальной форме субмерсии, см. прошлый семестр, выберем в окрестности точки P такие координаты $(t^1, \dots, t^n)$ на N, что функция f запишется в них так: $f(t^1, \dots, t^n) = t^1$. В частности, множество ∂M в этом случае совпадет с множеством $\{X \in N \mid t^1(X) = 0\}$, а множество $N \cap M$ — с множеством $\{X \in N \mid t^1(X) \geq 0\}$. Но последнее в точности означает, что ограничение соответствующего координатного гомеоморфизма на $N \cap M$ задает гомеоморфизм на $\mathbb{R}^n_+$. Таким образом, мы определим карты во всех точках края ∂M. Остается проверить, что все функции перехода в объединенном атласе для внутренних и краевых точек многообразия M — гладкие. Это, фактически, вытекает из гладкости многообразия N.

Обратно, если многообразие с краем задано как хаусдорфово топологическое пространство с не более чем счетным атласом обобщенных карт, то следует вложить это многообразие в $\mathbb{R}^N$ (существование такого вложения для достаточно больших N доказывается дословным повторением рассуждений для многообразий без края). Затем, в малой окрестности края, следует расширить многообразие с краем, продолжив отображения вложения в малой окрестности границ параметризующих полупространств. Полученное в результате вложенное многообразие N будет содержать многообразие с краем M, которое будет задаваться в нем неравенством $f \geq 0$, где функция f в каждой (краевой) карте задается равенством вида $f(x) = x^1$.

Лекция 5. Теорема Стокса

В данном разделе мы докажем основную теорему интегрального исчисления, обобщающую многочисленные формулы интегрирования, известные из математического анализа.

5.1. Интеграл по подмногообразию и формула Стокса

Пусть M — гладкое многообразие, и $i\colon V^k \to M^n$ — гладкое k-мерное подмногообразие в M, заданное вложением. Пусть на M задана внешняя форма ω степени k, и пусть носитель формы $i^*(\omega)$ — компактное подмножество в V. Тогда *интегралом от формы ω по подмногообразию V* называется величина

$$\int_V \omega = \int_V i^*(\omega).$$

Отметим, что $i^*(\omega)$ — это форма степени k с компактным носителем на k-мерном многообразии V, поэтому интеграл в левой части определен. Форму $i^*(V)$ иногда обозначают через $\omega|_V$ и называют *ограничением формы ω на подмногообразие V*.

Теперь все готово для формулировки основной теоремы интегрального исчисления.

Теорема 5.1 (Формула Стокса). *Пусть M — гладкое n-мерное ориентированное многообразие с краем ∂M, и $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ — внешняя дифференциальная форма степени $(n-1)$ с компактным носителем. Тогда*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega,$$

где ориентация края ∂M согласована с ориентацией многообразия M.

Доказательство. В силу аддитивности интеграла, теорему достаточно доказать для формы, носитель которой лежит внутри одной карты (U, φ) многообразия M. Более того, из тех же соображений можно предполагать, что если $(x^1, \dots, x^n)$ — локальные координаты карты (U, φ), то форма ω представляет собой моном вида

$$\omega = f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{k-1} \wedge dx^{k+1} \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Дифференциал формы ω в этом случае имеет вид

$$d\omega = (-1)^{k-1} \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Пусть сначала (U, φ) — «внутренняя» карта на M, т.е. $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$. Покажем, что в этом случае интеграл от $d\omega$ по U равен нулю. Действительно, перейдя от кратного интеграла к повторному, получаем:

$$\begin{aligned}\int_U d\omega &= \underset{\mathbb{R}^n}{\int\cdots\int}(-1)^{k-1}\frac{\partial f}{\partial x^k}dx^1\cdots dx^n = \\ &= (-1)^{k-1}\underset{\mathbb{R}^{n-1}}{\int\cdots\int}dx^1\cdots dx^{k-1}dx^{k+1}\cdots dx^n\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x^k}dx^k.\end{aligned}$$

Но внутренний интеграл равен нулю в силу формулы Ньютона–Лейбница, так как форма ω имеет компактный носитель:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x^k}dx^k = f(x^1, \dots, x^n)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0,$$

что и требовалось.

Пусть теперь (U, φ) — «краевая» карта на M, т.е. $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n_+(x^1 \geq 0)$. Здесь следует рассмотреть два случая: $k = 1$ и $k > 1$. Пусть сначала $k > 1$. Так как на крае ∂M координата x^1 постоянна и равна нулю, ограничение $\omega|_{\partial M}$ формы ω на край ∂M в этом случае равно нулю. С другой стороны, интеграл от формы $d\omega$ по карте U в этом случае равен нулю по тем же соображениям, что и выше. Случай $k > 1$ разобран.

Пусть теперь $k = 1$. Форма ω в этом случае имеет вид

$$f(x^1, \dots, x^n)dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

и ее дифференциал dw вычисляется так:

$$dw = \frac{\partial f}{\partial x^1}dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Вычислим интеграл от $d\omega$ по карте U. Имеем:

$$\begin{aligned}\int_U d\omega = \underset{\mathbb{R}^n_+(x^1\geq 0)}{\int\cdots\int}\frac{\partial f}{\partial x^1}dx^1\cdots dx^n &= \underset{\mathbb{R}^{n-1}(x^1=0)}{\int\cdots\int}dx^2\cdots dx^n\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x^1}dx^1 = \\ &= -\underset{\mathbb{R}^{n-1}(x^1=0)}{\int\cdots\int}f(0, x^2, \dots, x^n)dx^2\cdots dx^n.\end{aligned}$$

С другой стороны, интеграл от формы ω по множеству $U \cap \partial M$ записывается так:

$$\int_{U\cap\partial M}\omega = \underset{\mathbb{R}^{n-1}(x^1=0)}{\int\cdots\int}f(0, x^2, \dots, x^n)dx^2\cdots dx^n,$$

поэтому
$$\int_U d\omega = -\int_{U\cap\partial M} \omega.$$
Осталось заметить, что мы рассматривали на краю ориентацию, противоположную канонической, поэтому в канонической ориентации знак «минус» в последней формуле исчезнет, что и завершает доказательство теоремы Стокса.

Замечание. Формула Стокса, как видно из доказательства, есть прямое обобщение формулы Ньютона–Лейбница.

Пример. Пусть M — замкнутое многообразие размерности n (т.е. компактное и без края). Пусть ω — некоторая форма степени $(n-1)$ на M. Тогда
$$\int_M d\omega = 0.$$
Действительно, по теореме Стокса $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega = \int_{\emptyset} \omega = 0$.

5.2. Интеграл от функции, интегралы «первого» и «второго» рода

Пусть M — риманово многообразие. Напомним, что форма $*1$, где $*$ — это звездочка Ходжа, совпадает с формой объема на M. ***Интегралом от функции*** F по ориентированному компактному риманову многообразию M называется интеграл $\int_M F\ *1 = \int_M *F$, который в локальных координатах $(x^1, \dots, x^n)$ имеет вид
$$\int_M F\sqrt{g}\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$
В частности, если M — ориентируемое компактное подмногообразие риманова многообразия W, и $F\colon M \to \mathbb{R}$ — функция на M, то определен интеграл от F по подмногообразию M.

Отметим, что для ориентируемого компактного риманова многообразия M интеграл $\int_M *1$ является положительным числом и называется ***объемом*** этого многообразия.

Пример. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — неособая поверхность в $\mathbb{R}^n$. Тогда, напомним, на ней определена первая квадратичная форма, которая превращает M в ориентированное риманово многообразие размерности $(n-1)$. Очевидно, определенный нами объем $\mathrm{vol}_{n-1}(M)$ совпадает с определенным в прошлом семестре объемом поверхности M.

Замечание. Аналогично можно определить интеграл от гладкой функции по области $U \subset M$ и, соответственно, объем компактной области U ориентированного риманова многообразия.

В математическом анализе определенные только что интегралы от функций называют интегралами *первого рода.* Эти интегралы зависят от метрики, так как при их вычислении используется форма объема подмногообразия. В отличие от таких интегралов, интегралы от обычных дифференциальных форм называют интегралами *второго рода.*

В качестве следствий из теоремы Стокса, получим классические формулы Грина, Стокса и Гаусса–Остроградского.

5.3. Формула Грина

Пусть на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ задана регулярная замкнутая кривая $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$, ограничивающая замкнутую область U, и пусть $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ — координатное представление для γ (здесь (x,y) — стандартные декартовы координаты на плоскости). Более того, предположим, что при движении по кривой γ область U остается слева, т.е. ориентация кривой γ такова, что базис $(N, \dot\gamma)$ имеет положительную ориентацию (по отношению к стандартной ориентации плоскости). Здесь N — поле внешних нормалей к области U вдоль ее границы, т.е. вдоль кривой γ, а $\dot\gamma$ — вектор скорости кривой γ.

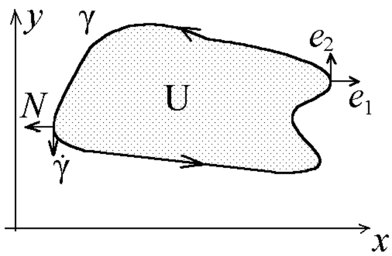

Рис. 2. Формула Грина

Пусть $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ — гладкие функции, определенные в некоторой области $\hat U$, содержащей область U. Обозначим через $X = (P,Q)$ соответствующее векторное поле. Тогда определен интеграл

$$\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =$$
$$= \int_a^b \Big[P\big(x(t),y(t)\big)\,\dot x(t) + Q\big(x(t),y(t)\big)\,\dot y(t)\Big]\,dt = \int_a^b \langle X, \dot\gamma\rangle\,dt,$$

называемый *циркуляцией векторного поля X вдоль кривой γ.* Классическая *формула Грина* утверждает, что

$$\int_a^b \langle X, \dot\gamma\rangle\,dt = \int_U \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Покажем, что эта формула является следствием теоремы Стокса. Действительно, будем рассматривать область U как многообразие с краем, ориентированное с помощью стандартной ориентации плоскости: в каждом касательном пространстве ориентация задана стандартным репером (e_1, e_2). Тогда γ — это край ∂U многообразия U. Каноническая ориентация края γ — это выбор того из двух направлений касательных к γ векторов v, при котором (N, v) — положительно ориентированный репер на плоскости, где N — внешняя нормаль к U. Эта ориентация соответствует ориентации кривой γ векторами скоростей $\dot\gamma$, так как при обходе кривой γ (т.е. при изменении параметра t от a до b) область U остается слева.

Пусть $\omega = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ — дифференциальная 1-форма. Тогда $d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy$. По теореме Стокса, имеем

$$\int_{\gamma=\partial U} \omega = \int_U d\omega,$$

а это и есть формула Грина.

Отметим, что все наши рассуждения были проведены в декартовых координатах (x, y) на евклидовой плоскости. Именно в этих координатах, в которых евклидова метрика имеет вид (δ_{ij}), векторному полю $X = P\partial_x + Q\partial_y$ соответствует дифференциальная форма $\omega = P\,dx + Q\,dy$. Напомним, что соответствие между векторами и ковекторами зависит, вообще говоря, от выбора римановой метрики.

Пусть теперь на плоскости заданы произвольные регулярные координаты (x^1, x^2), и $X = X^1\partial_{x^1} + X^2\partial_{x^2}$ — векторное поле, заданное в этих координатах. Как записать формулу Грина не переходя в декартовы координаты?

Как мы уже знаем, чтобы построить по векторному полю дифференциальную 1-форму, нужно воспользоваться операцией опускания индекса. Пусть (g_{ij}) — компоненты метрики в координатах (x^1, x^2). Тогда соответствующая векторному полю X форма ω имеет вид $\omega = \omega_k\,dx^k$, где $\omega_k = g_{k\alpha}X^\alpha$. Если $x^i = x^i(t)$ — координатное представление кривой γ, то ограничение формы ω на γ имеет вид:

$$\omega|_\gamma = \omega_k\,dx^k|_\gamma = g_{k\alpha}X^\alpha \dot x^k\,dt = \langle X, \dot\gamma\rangle\,dt,$$

где в последнем выражении стоит скалярное произведение поля X на вектор скорости кривой γ в метрике (g_{ij}). Таким образом, выражение для циркуляции не зависит от выбора координат. Теорема Стокса утверждает, что

$$\int_\gamma \omega = \int_U d\omega.$$

Однако, дифференциал от формы ω теперь имеет следующий вид:

$$d\omega = \frac{\partial g_{2\alpha} X^\alpha}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{1\alpha} X^\alpha}{\partial x^2},$$

т.е. окончательно имеем:

$$\int_a^b \langle X, \dot\gamma \rangle \, dt = \int_U \left(\frac{\partial g_{2\alpha} X^\alpha}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{1\alpha} X^\alpha}{\partial x^2} \right) dx^1 dx^2.$$

5.4. Формула Гаусса–Остроградского

Напомним необходимые определения из курса математического анализа.

Пусть x^i — стандартные декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$, X — векторное поле на области $\Omega' \subset \mathbb{R}^3$, содержащей замкнутую область Ω, причем граница $\partial\Omega$ области Ω представляет собой регулярную поверхность, которую мы обозначим через M. Пусть X^i — компоненты поля X, тогда функция

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial X^i}{\partial x^i}$$

называется *дивергенцией поля* X. Отметим, что дивергенция — это функция на Ω', поэтому ее значения не зависят от координат (в то время как определение дано в евклидовых координатах).

Далее, пусть N — поле внешних единичных нормалей к границе M. В каждой точке $P \in M$ ориентируем касательную плоскость $T_P M$ базисом e_1, e_2 так, чтобы тройка (N, e_1, e_2) была положительно ориентирована (мы предполагаем, что в $\mathbb{R}^3$ фиксирован стандартный базис, задающий положительную ориентацию пространства $\mathbb{R}^3$). В каждой точке $P \in M$ вычислим скалярное произведение векторов $X(P)$ и $N(P)$. Получаем гладкую функцию $\langle X, N \rangle$ на M. На поверхности M определена индуцированная метрика, превращающая M в риманово многообразие. Поэтому определен интеграл от любой гладкой функции на M (напомним, что интеграл от функции по риманову многообразию — это интеграл от дифференциальной формы, полученной умножением формы объема на эту функцию).

Определение. Интеграл от функции $\langle X, N \rangle$ по поверхности M называется *потоком векторного поля X через поверхность M*.

Теорема 5.2 (Формула Гаусса–Остроградского). *Поток векторного поля X через границу $M = \partial\Omega$ области Ω равен интегралу по области Ω от дивергенции поля X, т.е.*

$$\int_M \langle X, N \rangle \, *1 = \int_\Omega \operatorname{div} X \, *1.$$

Замечание. В формуле Гаусса–Остроградского слева и справа стоят интегралы от функций по римановым многообразиям. Формы $*1$ — это формы объема на этих (разных) многообразиях.

Покажем, что теорема Остроградского–Гаусса является частным случаем общей формулы Стокса. Для этого достаточно построить такую дифференциальную 2-форму ω на Ω', что ее ограничение на M совпадает с формой $\langle X, N\rangle *1$, а ее дифференциал $d\omega$ имеет вид $\operatorname{div} X *1$. Рассмотрим 1-форму T на $\mathbb{R}^3$, полученную из поля X опусканием индексов. Тогда в качестве формы ω можно взять $*T$. Проверим, что ω — искомая 2-форма.

Проделаем это в координатах. В евклидовых координатах (x^1, x^2, x^3) имеем: $\operatorname{div} X *1 = \operatorname{div} X\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$. С другой стороны, если X^i — координаты поля X, то $T_i = X^i$ (так как метрика у нас евклидова, и координаты — тоже евклидовы), и

$$\omega = \sum_{i<j} \omega_{ij}\, dx^i \wedge dx^j = X^1\, dx^2 \wedge dx^3 + X^2\, dx^3 \wedge dx^1 + X^3\, dx^1 \wedge dx^2, \quad (*)$$

поэтому

$$d\omega = \left(\sum_i \frac{\partial X^i}{\partial x^i}\right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \operatorname{div} X\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \operatorname{div} X *1.$$

Нам осталось доказать следующее утверждение.

Утверждение 5.1. *Пусть T — это 1-форма на Ω, получающаяся из поля X опусканием индексов, а $\omega = *T$. Тогда ограничение $\omega|_M$ формы ω на поверхность M задается так:*

$$\omega|_M = \langle X, N\rangle *1.$$

Доказательство. Пусть (u^1, u^2) — локальные координаты на M, в которых M задается в виде параметрической регулярной поверхности $r(u^1, u^2)$, причем

$$N = \frac{r_{u^1} \times r_{u^2}}{\|r_{u^1} \times r_{u^2}\|},$$

(g_{ij}) — матрица индуцированной метрики, и $g = \det(g_{ij})$.

Воспользуемся только что полученной формулой $(*)$ для формы ω и вычислим $\omega|_M$. Так как

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^k}\, du^k,$$

то

$$dx^i \wedge dx^j = \frac{\partial x^i}{\partial u^k}\frac{\partial x^j}{\partial u^l}\, du^k \wedge du^l = \Big(\frac{\partial x^i}{\partial u^1}\frac{\partial x^j}{\partial u^2} - \frac{\partial x^i}{\partial u^2}\frac{\partial x^j}{\partial u^1}\Big)\, du^1 \wedge du^2.$$

Положим

$$A^{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial u^1}\frac{\partial x^j}{\partial u^2} - \frac{\partial x^i}{\partial u^2}\frac{\partial x^j}{\partial u^1}.$$

Таким образом,

$$\omega|_M = (X^1 A^{23} + X^2 A^{31} + X^3 A^{12})\, du^1 \wedge du^2.$$

Далее,

$$r_{u^1} \times r_{u^2} = \begin{vmatrix} \partial_{x^1} & \partial_{x^2} & \partial_{x^3} \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^3}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^2} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} & \frac{\partial x^3}{\partial u^2} \end{vmatrix} = (A^{23}, A^{31}, A^{12}).$$

Напомним, что (g_{ij}) — это матрица Грамма системы векторов r_{u^1}, r_{u^2}.

Лемма 5.1. *Пусть a и b — два вектора в $\mathbb{R}^n$, G — их матрица Грамма, и $g = \det G$. Тогда площадь S параллелограмма Π, натянутого на векторы a и b, равна $\sqrt{g}$.*

Доказательство. Действительно, пусть φ — угол между a и b. Тогда

$$\det G = \|a\|^2 \|b\|^2 - \langle a, b\rangle^2 = \|a\|^2\|b\|^2 - \|a\|^2\|b\|^2 \cos^2\varphi = \\ = \|a\|^2\|b\|^2 \sin^2\varphi = S^2,$$

что и требовалось.

Из леммы 5.1 вытекает, что

$$\|r_{u^1} \times r_{u^2}\| = \sqrt{g},$$

поэтому $r_{u^1} \times r_{u^2} = \sqrt{g}\, N$. В итоге получаем

$$\omega|_M = \langle X, r_{u^1} \times r_{u^2}\rangle\, du^1 \wedge du^2 = \langle X, N\rangle \sqrt{g}\, du^1 \wedge du^2 = \langle X, N\rangle *1,$$

что и требовалось.

5.5. Формула Стокса для поверхностей

Пусть $\Omega' \subset \mathbb{R}^2$ — некоторая область, и $\Omega \subset \Omega'$ — замкнутая компактная область с гладкой границей $\partial\Omega$, состоящей из конечного числа регулярных кривых. Пусть (u^1, u^2) — декартовы координаты в $\mathbb{R}^2 \supset \Omega' \supset \Omega$, и $r\colon \Omega' \to \mathbb{R}^3$ — регулярная поверхность. Ограничение отображения r на Ω называется *регулярной поверхностью с краем* $r\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}^3$, а область Ω — *параметрической областью этой поверхности.* Если r является вложением, то можно отождествить такую поверхность с ее образом и рассматривать поверхность как подмногообразие с краем, лежащее в $\mathbb{R}^3$. В дальнейшем, для простоты, мы будем предполагать, что r — вложение.

Итак, пусть M — регулярная поверхность в $\mathbb{R}^3$ с краем ∂M, заданная параметрически в виде

$$r(u^1, u^2) = \big(x^1(u^1, u^2), x^2(u^1, u^2), x^3(u^1, u^2)\big),$$

где (x^1, x^2, x^3) — стандартные декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$, а (u^1, u^2) — координаты на поверхности M.

Обозначим через N *каноническое поле единичных нормалей к поверхности* M, полученное так:

$$N = \frac{r_{u^1} \times r_{u^2}}{\|r_{u^1} \times r_{u^2}\|},$$

Пусть $g_{ij} = \langle r_{u^i}, r_{u^j}\rangle$ — компоненты индуцированной на M метрики, а g — определитель матрицы (g_{ij}).

Рассмотрим произвольное векторное поле X в $\mathbb{R}^3$. Напомним, что *ротором* $\operatorname{rot} X$ *поля* X называется векторное поле на $\mathbb{R}^3$, имеющее в декартовых координатах (x^1, x^2, x^3) следующий вид

$$\operatorname{rot} X = \left\| \begin{array}{ccc} \partial_{x^1} & \partial_{x^2} & \partial_{x^3} \\ \partial/\partial x^1 & \partial/\partial x^2 & \partial/\partial x^3 \\ X^1 & X^2 & X^3 \end{array} \right\| =$$

$$= \left(\frac{\partial X^3}{\partial x^2} - \frac{\partial X^2}{\partial x^3}, \frac{\partial X^1}{\partial x^3} - \frac{\partial X^3}{\partial x^1}, \frac{\partial X^2}{\partial x^1} - \frac{\partial X^1}{\partial x^2} \right).$$

Так же, как и выше, *поток векторного поля* $\operatorname{rot} X$ *через поверхность* M равен интегралу от функции $\langle \operatorname{rot} X, N\rangle$ по M:

$$\int_M \langle \operatorname{rot} X, N\rangle *1 = \int_M \langle \operatorname{rot} X, N\rangle \sqrt{g}\, du^1 \wedge du^2.$$

Далее, обозначим через γ_i регулярные замкнутые кривые в $\mathbb{R}^3$ (одномерные подмногообразия), являющиеся связными компонентами края ∂M. В касательной плоскости $T_P M$ в каждой точке $P \in \gamma_i$ выберем единичный вектор n, перпендикулярный γ_i и направленный наружу поверхности M. Выберем на γ_i параметр $t \in [a_i, b_i]$ (и, тем самым, ориентируем γ_i) так, чтобы пара $(n, \dot\gamma_i)$ была положительно ориентирована относительно ориентации, заданной координатами (u^1, u^2). Отметим, что именно такая ориентация края ∂M является канонической.

Поле X и выбранная параметризация $\gamma_i(t)$ каждой кривой γ_i порождают на параметризующем кривую γ_i отрезке $[a_i, b_i]$ функцию $\langle X, \dot\gamma_i\rangle$. Легко видеть, что интеграл

$$\int_{a_i}^{b_i} \langle X, \dot\gamma_i\rangle\, dt$$

не меняется при монотонно возрастающих заменах параметра t. Этот интеграл называется *циркуляцией векторного поля X вдоль кривой γ_i*. Отметим, что если в качестве параметра t выбрать натуральный параметр s, то длины всех векторов $\dot\gamma_i$ будут равны 1, и, фактически, вектор $e = \dot\gamma_i$ в точке $P = \gamma_i(s)$ будет тем из двух единичных векторов касательной прямой $T_P\partial M$, для которого репер (n, e) положительно ориентирован. Более того, рассматривая ∂M как риманово многообразие с индуцированной метрикой, мы получаем, что ds — это форма одномерного объема (т.е. длины), соответствующая выбранной (канонической) ориентации края ∂M. Таким образом, циркуляция векторного поля X вдоль γ_i — это интеграл по канонически ориентированной компоненте γ_i края ∂M от функции $\langle X, e\rangle$. Сумму циркуляций поля X по всем компонентам γ_i края ∂M назовем *циркуляцией поля X вдоль края ∂M поверхности M* и обозначим через

$$\int_{\partial M} \langle X, e\rangle \ *1 = \sum_i \int_{\gamma_i} \langle X, \dot\gamma_i\rangle\, dt.$$

Теорема 5.3 (Формула Стокса для поверхностей). *Поток ротора $\operatorname{rot} X$ векторного поля X через компактную регулярную поверхность M в $\mathbb{R}^3$ с гладким краем ∂M равен циркуляции поля X вдоль края ∂M:*

$$\int_M \langle \operatorname{rot} X, N\rangle \ *1 = \int_{\partial M} \langle X, e\rangle \ *1.$$

В координатах:

$$\int_\Omega \langle \operatorname{rot} X, N\rangle\, du^1 \wedge du^2 = \int_{\partial M} \langle X, \partial \dot M\rangle\, dt = \sum_i \int_{a_i}^{b^i} \langle X, \dot\gamma_i\rangle\, dt.$$

Покажем, что формула Стокса для поверхностей является частным случаем общей формулы Стокса. Для этого достаточно построить такую дифференциальную 1-форму ω на M, что ее ограничение на ∂M совпадает с $\langle X, e\rangle\, ds$, а ее дифференциал $d\omega$ имеет вид

$$\langle \operatorname{rot} X, N\rangle \sqrt{g}\, du^1 \wedge du^2.$$

Пусть T — это 1-форма в $\mathbb{R}^3$, полученная из X опусканием индекса. В качестве формы ω возьмем ограничение формы T на поверхность M. Проверим, что такая форма удовлетворяет требуемым условиям.

Пусть s — натуральный параметр на кривой γ_i, выбранный так, как описано выше, и $\dot\gamma_i = (\dot\gamma_i^1, \dot\gamma_i^2, \dot\gamma_i^3)$. Тогда

$$\omega|_{\gamma_i} = T|_{\gamma_i} = \sum_k X^k \dot\gamma_i^k\, ds = \langle X, \dot\gamma_i\rangle\, ds = \langle X, e\rangle\, ds.$$

Определим 2-форму μ, положив $\mu = dT$; 1-форму η, положив $\eta = *\mu$; и пусть Y — векторное поле, полученное из 1-формы η поднятием индекса.

Утверждение 5.2. *Поле Y является ротором векторного поля X.*

Доказательство. Действительно, форма $\mu = dT$ имеет вид

$$\left(\frac{\partial X^3}{\partial x^2}-\frac{\partial X^2}{\partial x^3}\right)dx^2\wedge dx^3+\left(\frac{\partial X^1}{\partial x^3}-\frac{\partial X^3}{\partial x^1}\right)dx^3\wedge dx^1+\left(\frac{\partial X^2}{\partial x^1}-\frac{\partial X^1}{\partial x^2}\right)dx^1\wedge dx^2,$$

и

$$\eta = *\mu = \left(\frac{\partial X^3}{\partial x^2}-\frac{\partial X^2}{\partial x^3}\right)dx^1+\left(\frac{\partial X^1}{\partial x^3}-\frac{\partial X^3}{\partial x^1}\right)dx^2+\left(\frac{\partial X^2}{\partial x^1}-\frac{\partial X^1}{\partial x^2}\right)dx^3,$$

откуда немедленно заключаем, что $Y = \operatorname{rot} X$, что и требовалось.

Заметим теперь, что $*\eta = *^2\mu = \mu = dT$, поэтому, по утверждению 5.1,

$$(dT)|_M = \mu|_M = *\eta|_M = \langle Y, N\rangle \sqrt{g}\, du^1 \wedge du^2.$$

Окончательно, $(dT)|_M = d(T|_M) = d\omega$ в силу перестановочности дифференциала и операции перенесения форм, поэтому

$$d\omega = \langle Y, N\rangle \sqrt{g}\, du^1 \wedge du^2,$$

и, таким образом, форма ω удовлетворяет всем требуемым свойствам.

Задачи

Задача 5.1. Проверить, что определение потока векторного поля через поверхность не зависит от выбора координат.

Задача 5.2. Показать, что в криволинейных координатах (x^1, x^2, x^3) дивергенция векторного поля X выглядит так:

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}X^k\right).$$

Задача 5.3. Записать выражение для ротора векторного поля в криволинейных координатах.

Задача 5.4. Пусть замкнутая поверхность $M \subset \mathbb{R}^3$ ограничивает замкнутую область $W \subset \mathbb{R}^3$, и n — поле нормалей к поверхности. Пусть φ и ψ — гладкие функции на области $U \supset W$. Проверить, что

$$\int_W \left(\varphi\,\Delta\psi + \langle \operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\psi\rangle\right) *1 = \int_M \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} *1,$$

где Δ — лапласиан, а $\partial/\partial n$ — производная по нормали.

Дополнительный материал

5.1. Теорема о вычетах и ряды Лорана. Пусть $f(x,y) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ — комплекснозначная функция комплексного переменного $z = x + i\,y$, определенная в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$. Напомним, что $\bar z = x - i\,y$. Будем рассматривать z и $\bar z$ как независимые переменные. Выразим x и y через z и $\bar z$,

$$x = \frac{z+\bar z}{2}, \qquad y = \frac{z-\bar z}{2i},$$

и подставим в выражения для u и v. Получим

$$f(z,\bar z) = u\left(\frac{z+\bar z}{2}, \frac{z-\bar z}{2i}\right) + i\,v\left(\frac{z+\bar z}{2}, \frac{z-\bar z}{2i}\right).$$

Определение. Функция $f(z,\bar z)$ называется *комплексно-аналитической* или *голоморфной*, если она не зависит от $\bar z$. Иными словами,

$$\frac{\partial f(z,\bar z)}{\partial \bar z} = 0.$$

Продифференцируем функцию $f(z,\bar z)$ по $\bar z$ по правилу из теоремы о дифференцировании сложной функции. Получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(z,\bar z)}{\partial \bar z} &= \frac{\partial}{\partial \bar z} u\left(\frac{z+\bar z}{2}, \frac{z-\bar z}{2i}\right) + i\,\frac{\partial}{\partial \bar z} v\left(\frac{z+\bar z}{2}, \frac{z-\bar z}{2i}\right) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{1}{2} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{1}{2i} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{1}{2} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{1}{2i}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u + i\,v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

и условие голоморфности функции f равносильно выполнению следующей системы уравнений в частных производных, которая называется *условиями Коши–Римана*:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

Пусть теперь

$$\begin{aligned} f(z)\,dz &= \big(u(x,y) + i\,v(x,y)\big)\,(dx + i\,dy) = \\ &= u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy + i\,\big(u(x,y)\,dy + v(x,y)\,dx\big) = \omega_1 + i\,\omega_2 \end{aligned}$$

— комплекснозначная 1-форма, где

$$\omega_1 = u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy, \quad \omega_2 = u(x,y)\,dy + v(x,y)\,dx$$

— вещественнозначные 1-формы.

Утверждение 5.3. *Функция f — голоморфна, если и только если дифференциал 1-форм ω_1 и ω_2 равен нулю.*

Доказательство. Действительно,

$$d\omega_1 = -\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx \wedge dy,$$
$$d\omega_2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx \wedge dy,$$

откуда непосредственно видно, что равенство нулю дифференциалов форм ω_i равносильно выполнению условий Коши–Римана. Доказательство закончено.

Определим интеграл от формы $f(z)\,dz$ вдоль гладкой кривой $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ с координатным представлением $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, положив

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \Big[u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy\Big] + i\int_\gamma \Big[u(x,y)\,dy + v(x,y)\,dx\Big] =$$
$$= \int_\gamma \Big[u\big(x(t),y(t)\big)\,\dot x(t) - v\big(x(t),y(t)\big)\,\dot y(t)\Big]\,dt +$$
$$+ i\int_\gamma \Big[u\big(x(t),y(t)\big)\,\dot y(t) + v\big(x(t),y(t)\big)\,\dot x(t)\Big]\,dt.$$

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — произвольная компактная (вообще говоря, многосвязная, т.е., возможно, с дырками) область с гладкой границей, состоящей из конечного числа регулярных замкнутых кривых γ_i. Выберем на каждой кривой γ_i направление обхода, при котором ограниченная γ_i область плоскости (это, как правило, не Ω) обходится против часовой стрелки. Для краткости, будем говорить, что такая кривая γ_i *ориентирована против часовой стрелки.* Кривую γ_i с противоположной ориентацией обозначим через $-\gamma_i$.

Ясно, что Ω — двумерное многообразие с краем. Введем на крае $\partial\Omega = \cup_i\gamma_i$ каноническую ориентацию. Пусть γ_1 — та из кривых γ_i, которая ограничивает область, содержащую все остальные γ_i. Легко видеть, что при канонической ориентации $\partial\Omega$ каждая кривая γ_i проходится в таком направлении, что область Ω все время остается слева. Последнее означает, что (в терминах введенных выше ориентаций кривых γ_i) канонически ориентированный край $\partial\Omega$ записывается так: $\partial\Omega = \gamma_1 \cup (-\gamma_2) \cup \ldots$.

Воспользуемся общей формулой Стокса (в действительности, естественным обобщением формулы Грина на многосвязные области). Имеем

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = -\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx \wedge dy + i\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx \wedge dy,$$

поэтому, если функция $f(z)$ голоморфна, то

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \sum_{i\ge 2}\int_{-\gamma_i} f(z)\,dz = 0,$$

т.е.

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \sum_{i\ge 2}\int_{\gamma_i} f(z)\,dz.$$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Утверждение 5.4. *Пусть $f(z)$ — голоморфная функция в компактной области Ω с гладким краем $\partial\Omega$, состоящим из конечного числа замкнутых регулярных кривых γ_i. Пусть γ_1 — та из кривых γ_i, которая ограничивает область, содержащую* *все остальные γ_i. Ориентируем каждую кривую γ_i, $i = 1, 2, \ldots$, против часовой стрелки. Тогда*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \sum_{i\geq 2} \int_{\gamma_i} f(z)\,dz.$$

В частности, если область Ω односвязна, т.е. $\partial\Omega$ состоит из одной кривой γ_1, то

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = 0.$$

Рассмотрим функцию $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Если $n \geq 0$, то эта функция определена и голоморфна на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, поэтому, в силу утверждения 5.4, для вложенной регулярной замкнутой кривой γ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ (такие кривые будем для краткости называть *контурами*) интеграл $\int_\gamma z^n\,dz$ равен нулю. Если $n < 0$, то для любого контура γ, не охватывающего 0 (ограниченная контуром γ область не содержит 0), также выполняется $\int_\gamma z^n\,dz = 0$. Если же контур γ охватывает 0, то для $n < 0$ интеграл $\int_\gamma z^n\,dz$ не зависит от выбора контура, если только фиксировано направление обхода, скажем, против часовой стрелки. Действительно, для любых двух так ориентированных контуров γ_1 и γ_2, охватывающих 0, выберем третий контур γ, также охватывающий 0 и не пересекающийся с γ_i. Ориентируем γ так же, как и контуры γ_i. Тогда при каждом $i = 1, 2$ контуры γ_i и γ ограничивают двусвязную компактную область Ω_i, в которой функция $f(z)$ голоморфна. Из утверждения 5.4 вытекает, что

$$\int_{\gamma_i} z^n\,dz = \int_\gamma z^n\,dz,$$

откуда и получаем требуемое.

Пусть S^1 — стандартная единичная окружность с центром в 0, а γ — произвольный контур, охватывающий 0. Ориентируем γ и S^1 против часовой стрелки. Тогда

$$\int_\gamma z^n\,dz = \int_{S^1} z^n\,dz,$$

Явные вычисления дают

$$\begin{aligned}\int_{S^1} z^n\,dz &= \int_0^{2\pi} e^{in\varphi}\,de^{i\varphi} = \int_0^{2\pi} e^{in\varphi}\,d(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \\ &= \int_0^{2\pi} e^{in\varphi}(-\sin\varphi + i\cos\varphi)\,d\varphi = \int_0^{2\pi} e^{in\varphi} i e^{i\varphi}\,d\varphi = \int_0^{2\pi} i\,e^{i(1+n)\varphi}\,d\varphi = \\ &\qquad = i\int_0^{2\pi} \cos(1+n)\varphi\,d\varphi - \int_0^{2\pi} \sin(1+n)\varphi\,d\varphi,\end{aligned}$$

поэтому

$$\int_\gamma z^n\,dz = \begin{cases} 2\pi\,i, & \text{при } n = -1, \text{ и} \\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Делая замену координат $z \mapsto z - a$, $a \in \mathbb{C}$, для контура γ, охватывающего точку a, получаем

$$\int_\gamma (z-a)^n\,dz = \begin{cases} 2\pi\,i, & \text{при } n = -1, \text{ и} \\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Имеет место следующая теорема, которая доказывается в курсе теории функций комплексного переменного.

Теорема 5.4 (О разложении функции в ряд Лорана). *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — некоторая область, a — внутренняя точка области Ω, и $f(z)$ — голоморфная функция в $\Omega \backslash \{a\}$. Тогда существуют такие $0 < r < R$, что в кольце $K = \{z \mid r \leq |z-a| \leq R\}$ функция $f(z)$ может быть представлена в виде равномерно сходящегося ряда*:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n,$$

который называется **рядом Лорана**. *В силу равномерной сходимости, ряд Лорана можно почленно интегрировать и дифференцировать.*

Определение. Коэффициент c_{-1} ряда Лорана называется *вычетом функции* f *в точке* a и обозначается через $\mathrm{res}_a\, f$.

Из приведенных выше результатов вытекает следующий результат.

Следствие 5.1. *В предположениях теоремы 5.4, для любого контура γ, лежащего в K, охватывающего a и ориентированного против часовой стрелки, имеем*:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_\gamma c_n (z-a)^n = 2\pi i\ \mathrm{res}_a\, f(z).$$

Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — некоторая компактная односвязная область с гладкой границей, состоящей из одного контура $\partial\Omega = \gamma$. Пусть $a_1, \dots, a_m$ — некоторые внутренние (не лежащие на γ) точки из Ω, и $f(z)$ — голоморфная функция на $\Omega \setminus \{a_1, \dots, a_m\}$. Как всегда, ориентируем γ против часовой стрелки. Следующая теорема сводит вычисление интеграла от формы $f(z)\, dz$ по контуру γ к вычислению вычетов функции f в точках a_k.

Теорема 5.5 (О вычетах). *В сделанных выше предположениях,*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{m} \mathrm{res}_{a_k} f.$$

Доказательство. Окружим особые точки a_k малыми окружностями S_k, лежащими внутри Ω, и пусть D_k — открытый диск, ограниченный S_k. Обозначим через Ω' область, полученную из Ω выкидыванием всех дисков D_k. Тогда Ω' — компактная область с гладкой границей, и $f(z)$ — голоморфная в Ω' функция. Ориентировав все S_k против часовой стрелки и воспользовавшись утверждением 5.4 и следствием 5.1, получаем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{m} \int_{S_k} f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{m} \mathrm{res}_{a_k} f.$$

Теорема доказана.

Лекция 6. Когомологии де Рама

Одна из самых сложных и часто встречающихся топологических задач дифференциальной геометрии состоит в проверке гомеоморфности двух данных многообразий. Теория когомологий де Рама, которая обсуждается в этом разделе, позволяет построить по каждому многообразию M некоторый алгебраический объект — группы когомологий[4], который оказывается топологическим (на самом деле, даже гомотопическим, см. ниже) инвариантом. А именно, группы когомологий гомеоморфных многообразий изоморфны. Поэтому эти группы могут использоваться для доказательства негомеоморфности многообразий: если группы различны, то многообразия не гомеоморфны. С другой стороны, (что не менее важно) группы когомологий отвечают за разрешимость на многообразиях дифференциальных уравнений специального вида. Тем самым, когомологии позволяют понять природу топологических препятствий такой разрешимости.

6.1. Определение групп когомологий де Рама

Пусть M — гладкое многообразие, и ω — внешняя дифференциальная форма на M.

Форма ω называется *замкнутой*, если ее внешний дифференциал $d\omega$ равен нулю. Форма ω называется *точной*, если она является «полным дифференциалом», т.е. если существует форма $\tilde{\omega}$ на M, такая что $\omega = d\tilde{\omega}$. Ясно, что множество $Z^k(M)$ всех замкнутых форм степени k на M и множество $B^k(M)$ всех точных форм степени k на M образуют (бесконечномерные) линейные подпространства в (бесконечномерном) линейном пространстве $\Omega^k(M)$ всех внешних форм степени k на M. Напомним, см. утверждение 4.1, что $d(d\omega) = 0$ для любой формы ω, поэтому каждая точная форма является замкнутой: $B^k(M) \subset Z^k(M)$. Отсюда вытекает, что корректно определено фактор-пространство $Z^k(M)/B^k(M)$ пространства всех замкнутых форм степени k по пространству всех точных форм степени k. Неожиданно оказывается, что это пространство конечномерно.

Определение. Пространство $Z^k(M)/B^k(M)$ называется *k-ой группой когомологий де Рама многообразия M* и обозначается через $H^k(M)$.

Замечание. Краткое напоминание понятия фактор-группы и фактор-пространства содержится в дополнительных материалах к этой лекции.

Нам будет удобно записать это определение в других обозначениях. Линейный оператор внешнего дифференцирования d действует, как мы

[4]Отметим, что сопоставление топологическому объекту алгебраического — это центральная идея алгебраической топологии.

знаем, из пространства $\Omega^k(M)$ внешних форм степени k в пространство $\Omega^{k+1}(M)$ внешних форм степени $k+1$. Для удобства, будем обозначать оператор d через d_k, указывая тем самым явно то пространство, на котором этот оператор в данный момент рассматривается. Тогда мы имеем следующую цепочку «сквозного действия» линейного оператора внешнего дифференцирования:

$$\cdots \xrightarrow{d_{k-2}} \Omega^{k-1}(M) \xrightarrow{d_{k-1}} \Omega^k(M) \xrightarrow{d_k} \Omega^{k+1}(M) \xrightarrow{d_{k+1}} \cdots .$$

В этих обозначениях, k-ая группа когомологий может быть определена следующим образом: $H^k(M) = \mathrm{Ker}(d_k)/\mathrm{Im}(d_{k-1})$, поскольку, по определению, $\mathrm{Ker}(d_k) = Z^k(M)$, а $\mathrm{Im}(d_{k-1}) = B^k(M)$.

Замечание. Так как $\Omega^k(M) = 0$ при $k > n$, где n — размерность многообразия, можно считать, что описанная выше цепочка на самом деле конечна, а именно, она заканчивается так:

$$\cdots \xrightarrow{d_{n-2}} \Omega^{n-1}(M) \xrightarrow{d_{n-1}} \Omega^n(M) \xrightarrow{d_n} 0.$$

Поэтому $\mathrm{Ker}(d_n) = \Omega^n(M)$ и $H^n(M) = \Omega^n(M)/\mathrm{Im}(d_{n-1})$.

Замечание. Мы определили группы когомологий $H^k(M)$ для $k \geq 1$. Удобно определить так же 0-ую группу $H^0(M)$, продлив цепочку «сквозного действия» операторов внешнего дифференцирования влево так:

$$0 \xrightarrow{d_{-1}} \Omega^0(M) \xrightarrow{d_0} \Omega^1(M) \xrightarrow{d_1} \cdots .$$

Тогда группа $H^0(M)$ по определению полагается равной $\mathrm{Ker}(d_0)/\mathrm{Im}(d_{-1})$, т.е. $H^0(M) = \mathrm{Ker}(d_0)$.

Замечание. На этой последней конструкции основан алгебраический подход к определению когомологий. А именно, если Ω^k — произвольные абелевы группы, и $d_k\colon \Omega^k \to \Omega^{k+1}$ — гомоморфизм, такой что $d_k \circ d_{k-1} = 0$, то можно определить так называемые *когомологии цепного комплекса* $\left\{\Omega^k, d_k\right\}_{k=0}^{\infty}$, положив $H^k = \mathrm{Ker}(d_k)/\mathrm{Im}(d_{k-1})$. Однако, эта общая конструкция лежит за пределами нашего курса.

Элемент $\omega + B^k(M)$ группы $H^k(M)$ будем обозначать через $[\omega]$ и называть *k-мерным классом когомологий.* Две замкнутых внешних формы ω_1 и ω_2, принадлежащие одному и тому же классу $[\omega]$, называются *когомологичными.* Ясно, что замкнутые формы ω_1 и ω_2 когомологичны если и только если их разность $\omega_1 - \omega_2$ точна.

Пример. Пусть M — связное многообразие. Вычислим группу $H^0(M)$. Для этого, по определению, нужно найти ядро $\mathrm{Ker}(d_0)$ оператора внешнего дифференцирования d_0 на пространстве $\Omega^0(M)$ всех внешних форм степени 0 на многообразии M, т.е. на пространстве гладких функций на M. Очевидно, $\mathrm{Ker}(d_0)$ — это пространство всех постоянных функций на M, поэтому $H^0(M) = \mathbb{R}^1$.

Пример. Пусть M — это вещественная прямая $\mathbb{R}^1$. Вычислим группы когомологий многообразия $\mathbb{R}^1$. Мы уже знаем, что $H^0(\mathbb{R}^1) = \mathbb{R}^1$, так как прямая связна. Далее, так как $\dim \mathbb{R}^1 = 1$, то $H^k(\mathbb{R}^1) = 0$ при $k \geq 2$.

Вычислим теперь $H^1(\mathbb{R}^1) = \operatorname{Ker}(d_1)/\operatorname{Im}(d_0)$. Так как $d_1 \colon \Omega^1(\mathbb{R}^1) \to 0$, то ядро $\operatorname{Ker}(d_1)$ оператора d_1 совпадает со всем пространством $\Omega^1(\mathbb{R}^1)$ внешних форм степени 1 на $\mathbb{R}^1$. С другой стороны, образ $\operatorname{Im}(d_0)$ оператора d_0 так же совпадает с пространством $\Omega^1(\mathbb{R}^1)$. Действительно, произвольная форма из $\Omega^1(\mathbb{R}^1)$ может быть записана в виде $f(x)\,dx$, где $f(x)$ — гладкая функция, и x — стандартная координата на прямой. Рассмотрим гладкую функцию $g \in \Omega^0(\mathbb{R}^1)$, определенную так:

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Так как $g'(x) = f(x)$, то $d_0(g) = dg = f dx$, что и требовалось. Таким образом, $H^1(\mathbb{R}^1) = \Omega^1(\mathbb{R}^1)/\Omega^1(\mathbb{R}^1) = 0$. Итак, нами доказано следующее утверждение.

Утверждение 6.1. *Группы когомологий вещественной прямой $\mathbb{R}^1$ выглядят так:*

$$H^k(\mathbb{R}^1) = \begin{cases} \mathbb{R}^1 & \text{при } k = 0, \\ 0 & \text{при } k \geq 1. \end{cases}$$

Записав задачу о вычислении первых когомологий многообразия M в локальных координатах, мы получаем задачу о разрешимости следующей системы дифференциальных уравнений в частных производных: $f_\alpha\,dx^\alpha = dg$, т.е. $\partial g/\partial x^\alpha = f_\alpha$, где f_α известные функции, а g — неизвестная. Поскольку вторая производная $\partial^2 g/\partial x^\alpha \partial x^\beta$ симметрична по α и β, для разрешимости этой системы необходимо, чтобы $\partial f_\alpha/\partial x^\beta = \partial f_\beta/\partial x^\alpha$. Отметим, что это — в точности условие замкнутости формы $\omega = f_\alpha\,dx^a$. Действительно,

$$dw = \frac{\partial f_\alpha}{\partial x^\beta} dx^\beta \wedge dx^\alpha = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial f_\alpha}{\partial x^\beta} = \frac{\partial f_\beta}{\partial x^\alpha}.$$

Когомологии $H^1(M)$ равны нулю тогда и только тогда, когда это необходимое условие разрешимости является также и достаточным.

В общем случае, если задана дифференциальная форма Ω, то можно ставить вопрос о разрешимости следующего дифференциального уравнения: $d\omega = \Omega$. Необходимым условием разрешимости этого уравнения является замкнутость формы Ω, а достаточным условием — точность формы Ω, т.е. равенство нулю класса когомологий $[\Omega]$. Любые два решения ω_1 и ω_2 отличаются, очевидно, на замкнутую форму $\omega_1 - \omega_2$. Множество всех решений — это смежный класс частного решения ω по подпространству замкнутых форм, т.е. имеет вид $\omega + Z^k(M)$.

Пример. Пусть M — это окружность S^1. Вычислим группы когомологий окружности. Точно так же, как и в случае прямой $\mathbb{R}^1$, очевидно $H^0(S^1) = \mathbb{R}^1$, и $H^k(S^1) = 0$ при $k \geq 2$.

Вычислим теперь группу $H^1(S^1)$. Так как $\dim(S^1) = 1$, снова заключаем, что $\mathrm{Ker}(d_1) = \Omega^1(S^1)$. Осталось выяснить, как устроен образ $\mathrm{Im}(d_0)$ оператора d_0. Пусть $\omega \in \Omega^1(S^1)$ — внешняя 1-форма на S^1, принадлежащая образу $\mathrm{Im}(d_0)$. Это означает, что существует гладкая функция $g \in \Omega^0(S^1)$, такая что $dg = \omega$. Но тогда, так как окружность — замкнутое многообразие, по теореме Стокса имеем:

$$\int_{S^1} \omega = \int_{S^1} dg = \int_{\partial S^1} g = 0.$$

То есть имеет место следующее включение

$$\mathrm{Im}(d_0) \subset \Big\{\omega \in \Omega^1(S^1) \,\Big|\, \int_{S^1} \omega = 0\Big\}.$$

Оказывается, верно и обратное. Действительно, пусть $\omega \in \Omega^1(S^1)$ — такая внешняя 1-форма, что $\int_{S^1} \omega = 0$. Пусть окружность S^1 параметризована стандартным угловым параметром $\varphi \in [0, 2\pi)$. Тогда каждая 1-форма на окружности может быть записана в виде $f(\varphi)\, d\varphi$, где f — гладкая функция на окружности. Последнее означает, что f порождает гладкую периодическую с периодом 2π функцию на прямой, которую мы будем обозначать той же буквой f. В частности, $f(\varphi + 2\pi) = f(\varphi)$ для любого $\varphi \in \mathbb{R}^1$.

Запишем нашу форму ω в виде $\omega = f(\varphi)\, d\varphi$. Рассмотрим функцию $g(\varphi)$ на $\mathbb{R}^1$, определенную так:

$$g(\varphi) = \int_0^{\varphi} f(t)\, dt, \qquad \varphi \in \mathbb{R}^1.$$

Функция g — гладкая периодическая функция на прямой с периодом 2π, и, поэтому, задает функцию на окружности. Действительно,

$$g(\varphi + 2\pi) = \int_0^{\varphi+2\pi} f(t)\, dt = \int_0^{\varphi} f(t)\, dt + \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} f(t)\, dt = g(\varphi),$$

так как последний интеграл совпадает с интегралом от формы ω по окружности S^1, который, напомним, равен нулю в силу выбора формы ω. Остается заметить, что $dg = \omega$. Итак, доказана следующая лемма.

Лемма 6.1. *Форма $\omega \in \Omega^1(S^1)$ является точной если и только если интеграл от нее по S^1 равен нулю.*

Рассмотрим теперь отображение $i\colon \Omega^1(S^1) \to \mathbb{R}^1$, переводящее форму ω из $\Omega^1(S^1)$ в число $\int_{S^1} \omega$. Отображение i является гомоморфизмом линейных пространств, причем, в силу леммы 6.1, ядро $\mathrm{Ker}\, i$ этого гомоморфизма совпадает с $\mathrm{Im}(d_0)$. Кроме того, легко видеть, что образ гомоморфизма i совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^1$ (проверьте это!). Осталось воспользоваться теоремой о гомоморфизме:

$$\mathbb{R}^1 = \mathrm{Im}\, i = \Omega^1(S^1) / \mathrm{Ker}\, i = \mathrm{Ker}(d_1) / \mathrm{Im}(d_0) = H^1(S^1).$$

Итак, нами доказано следующее утверждение.

Утверждение 6.2. *Группы когомологий окружности S^1 выглядят так:*

$$H^k(S^1) = \begin{cases} \mathbb{R}^1 & \text{при } k = 0 \text{ и } k = 1, \\ 0 & \text{при } k \geq 2. \end{cases}$$

6.2. Когомологии и отображения

Пусть M и N — гладкие многообразия, и $f\colon M \to N$ — гладкое отображение. Как мы уже знаем, отображение f порождает линейное отображение f^* на пространствах внешних форм: $f^*\colon \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$. Более того, так как отображение f^* перестановочно с операцией внешнего дифференцирования, см. утверждение 4.1, оно, очевидно, переводит замкнутые формы в замкнутые, а точные — в точные. Поэтому отображение f^* корректно определено на группах когомологий. А именно, если $[\omega] \in H^k(N)$ — произвольный класс когомологий многообразия N, и ω — некоторый его представитель, т.е. (замкнутая) форма из $[\omega]$, то определим $f^*\big([\omega]\big)$ равным $\big[f^*(\omega)\big]$. Ясно, что $d\big(f^*(\omega)\big) = f^*\big(d\omega\big) = f^*(0) = 0$, поэтому $f^*(\omega)$ — замкнутая форма, и $\big[f^*(\omega)\big]$ определен. Кроме того, если ω_i, $i = 1, 2,$ — два разных представителя класса $[\omega]$, то, по определению, $\omega_1 - \omega_2 = d\varphi$ для некоторой формы φ на N. Поэтому

$$f^*(\omega_1) - f^*(\omega_2) = f^*(\omega_1 - \omega_2) = f^*(d\varphi) = d\big(f^*(\varphi)\big),$$

т.е. формы $f^*(\omega_1)$ и $f^*(\omega_2)$ когомологичны или, другими словами, $\big[f^*(\omega_1)\big] = [f^*(\omega_2)]$. Итак, доказано следующее утверждение.

Утверждение 6.3. *Пусть $f\colon M \to N$ — гладкое отображение гладких многообразий. Отображение $f^*\colon \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ индуцирует гомоморфизм групп когомологий $f^*\colon H^k(N) \to H^k(M)$. Этот гомоморфизм определяется так: $f^*\big([\omega]\big) = \big[f^*(\omega)\big]$, где ω — произвольная замкнутая форма степени k на N.*

Упражнение 6.1. Показать, что если $1_M : M \to M$ — тождественное отображение, то 1_M^* — тождественное отображение когомологий.

Упражнение 6.2. Показать, что если $f\colon M_1 \to M_2$, и $g\colon M_2 \to M_3$ — гладкие отображения гладких многообразий, то $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Из двух предыдущих упражнений вытекает следующий результат.

Утверждение 6.4. *Если многообразия M и N диффеоморфны, то их группы когомологий $H^k(M)$ и $H^k(N)$ совпадают.*

Замечание. Ниже мы увидим, что группы когомологий сохраняются не только при диффеоморфизмах, но и при существенно более общих преобразованиях — *гомотопических эквивалентностях.*

6.3. Гомотопии и когомологии

Пусть X и Y — топологические пространства, и $f_i\colon X \to Y$, $i = 0, 1$, — непрерывные отображения пространства X в пространство Y. Отображения f_0 и f_1 называются *гомотопными*, если существует такое непрерывное отображение $F\colon X \times [0,1] \to Y$, что $F(x,0) = f_0(x)$, и $F(x,1) = f_1(x)$ для каждого $x \in X$. Отображение F в этом случае называется *гомотопией отображения* f_0 *в отображение* f_1. Если X и Y — гладкие многообразия, f_i — гладкие отображения, то мы будем говорить, что отображения f_0 и f_1 *гладко гомотопны* или, для краткости, *гомотопны*, если существует гомотопия F отображения f_0 в f_1, являющаяся гладким отображением из $X \times [0,1]$ в Y.

Говорят, что топологические пространства X и Y *гомотопически эквивалентны*, если существуют непрерывные отображения $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$, такие что отображение $f \circ g$ гомотопно 1_Y, а отображение $g \circ f$ гомотопно 1_X, где, напомним, через 1_X обозначается тождественное отображение пространства X на себя. Два многообразия называются *гомотопически эквивалентными*, если существуют гладкие отображения $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$, такие что $f \circ g$ гладко гомотопно 1_Y, а $g \circ f$ гладко гомотопно 1_X.

Упражнение 6.3. Проверьте, что гомотопическая эквивалентность — отношение эквивалентности на множестве гладких многообразий.

Пример. Пусть X — одноточечное пространство, а Y — пространство $\mathbb{R}^n$. Возьмем в качестве f отображение, переводящее X в начало координат пространства $\mathbb{R}^n$, а в качестве g — отображение всего $\mathbb{R}^n$ в точку X. Тогда, очевидно, $g \circ f = 1_X$, а $f \circ g$ — отображение всего $\mathbb{R}^n$ в начало координат. Покажем, что $f \circ g$ гомотопно $1_{\mathbb{R}^n}$. Для этого достаточно рассмотреть отображение $F\colon \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$, устроенное так: $F\colon (y,t) \mapsto ty$. Очевидно, $F(y,0) = 0 \in \mathbb{R}^n$ для любого y, и $F(y,1) = y$ для любого y, т.е. $F(y,0) = f \circ g$, а $F(y,1) = 1_{\mathbb{R}^n}$. Более того, гомотопия F гладкая. Итак, нульмерное многообразие $X = \{*\}$ и n-мерное многообразие $Y = \mathbb{R}^n$ гомотопически эквивалентны. Поэтому R^n и R^k гомотопически эквивалентны для любых n и k.

Теорема 6.1. *Гомотопные отображения f_0 и f_1, $f_i\colon X \to Y$, $i = 0, 1$, гладких многообразий X и Y индуцируют один и тот же гомоморфизм групп когомологий, т.е. $f_0^* = f_1^*\colon H^k(Y) \to H^k(X)$.*

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно построить такое линейное отображение $K\colon \Omega^k(Y) \to \Omega^{k-1}(X)$, что имеет место тождество

$$(f_0^* - f_1^*)(\omega) = \pm(dK - Kd)(\omega), \qquad \omega \in \Omega^k(Y). \tag{$*$}$$

Действительно, если отображение K построено, и ω произвольная замкнутая форма, представляющая класс $[\omega] \in H^k(Y)$, то замкнутые формы

$f_0^*(\omega)$ и $f_1^*(\omega)$ отличаются на точную форму

$$(f_0^* - f_1^*)(\omega) = \pm(dK - Kd)(\omega) = \pm d\bigl(K(\omega)\bigr) \mp K(d\omega) = \pm d\bigl(K(\omega)\bigr),$$

где последнее равенство имеет место в силу замкнутости формы ω. Поэтому классы когомологий $\bigl[f_0^*(\omega)\bigr]$ и $\bigl[f_1^*(\omega)\bigr]$ совпадают, что и требовалось.

Перейдем к построению отображения K (его часто называют *цепной гомотопией*). Гомотопность отображений f_0 и f_1 означает, что существует такое гладкое отображение $F\colon X \times [0,1] \to Y$, что $F(x,0) = f_0(x)$ и $F(x,1) = f_1(x)$. Отображение F порождает гомоморфизм пространств всех внешних форм $F^*\colon \Omega^k(Y) \to \Omega^k\bigl(X \times [0,1]\bigr)$.

Будем говорить, что форма $\Omega \in \Omega^k\bigl(X \times [0,1]\bigr)$ *не зависит от* dt, если она равна нулю на любом наборе векторов $(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, \partial/\partial t)$, где ξ_i — векторы, касательные к X. В локальной системе координат $(x^1, \dots, x^n, t)$ на прямом произведении $X \times [0,1]$ последнее означает, что в разложении

$$\Omega(x,t) = \sum_{1 \le i_1 \cdots i_k \le n} \Omega_{i_1 \cdots i_k}(x^1, \dots, x^n, t)\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

отсутствую мономы, содержащие сомножитель dt. Такую форму Ω можно рассматривать как однопараметрическое семейство форм $\Omega_t(x) = \Omega(x,t)$ на многообразии X. Формально, если $\varphi_t\colon X \to X \times [0,1]$ вложение вида $\varphi_t\colon x \mapsto (x,t)$, то $\Omega_t = \varphi_t^*\bigl(\Omega(x,t)\bigr)$, т.е. ограничение формы $\Omega(x,t)$ на многообразие X, вложенное в прямое произведение $X \times [0,1]$ как $X \times \{t\}$.

Следующая лемма легко проверяется в локальных координатах.

Лемма 6.2. *Каждая внешняя форма $\Omega \in \Omega^k\bigl(X \times [0,1]\bigr)$ однозначным образом представима в виде $\Omega = \Omega' + \Omega'' \wedge dt$, где формы Ω' и Ω'' не зависят от dt.*

Отметим, что если форма $\Omega \in \Omega^k\bigl(X \times [0,1]\bigr)$ не зависит от dt, т.е. $\Omega = \Omega_t$ — однопараметрическое семейство форм на X, то внешний дифференциал $d\Omega$ имеет вид

$$d\Omega = d_x \Omega_t \pm \frac{\partial}{\partial t}(\Omega_t) \wedge dt,$$

где d_x — внешнее дифференцирование на X, а знак перед вторым слагаемым зависит от четности степени формы Ω_t. В частности, последняя формула дает разложение из леммы 6.2 для дифференциала формы $d\Omega$.

Определим теперь отображение $K\colon \Omega^k(Y) \to \Omega^{k-1}(X)$ так. Для каждой формы $\omega \in \Omega^k(Y)$ построим форму $\Omega = F^*(\omega)$, разложим ее по формуле из леммы 6.2, получив $\Omega = \Omega' + \Omega'' \wedge dt = \Omega'_t + \Omega''_t \wedge dt$, и положим

$$K(\omega) = \int_0^1 \Omega''_t\, dt.$$

Проверим теперь справедливость формулы $(*)$. Для этого вычислим последовательно $Kd(\omega)$ и $dK(\omega)$. Имеем:

$$F^*(d\omega) = dF^*(\omega) = d(\Omega'_t + \Omega''_t \wedge dt) = d_x\Omega'_t \pm \frac{\partial}{\partial t}(\Omega'_t) \wedge dt + d_x\Omega''_t \wedge dt =$$
$$= d_x\Omega'_t + \Big(\pm\frac{\partial}{\partial t}\Omega'_t + d_x\Omega''_t\Big) \wedge dt,$$

поэтому

$$Kd(\omega) = \int_0^1 \Big(\pm\frac{\partial}{\partial t}\Omega'_t + d_x\Omega''_t\Big)dt = \pm(\Omega'_1 - \Omega'_0) + d_x \int_0^1 \Omega''_t\, dt.$$

Здесь через Ω'_0 и Ω'_1 обозначены значения семейства форм Ω'_t при $t = 0$ и $t = 1$ соответственно. Далее,

$$dK(\omega) = d_x\Big(\int_0^1 \Omega''_t\, dt\Big),$$

откуда

$$(dK - Kd)(\omega) = \mp(\Omega'_1 - \Omega'_0) = \pm(\Omega'_0 - \Omega'_1).$$

С другой стороны, если ограничить форму $\Omega = F^*(\omega) = \Omega' + \Omega'' \wedge dt$ на $X \times \{t\}$, то получится форма Ω'_t на X, так как форма dt равна нулю на $X \times \{t\}$. Рассмотрим отображение $F_t = F(\cdot, t)\colon X \times \{t\} \to Y$. Тогда $F_t^*(\omega) = \Omega|_{X\times\{t\}} = \Omega'_t$, поэтому $f_i^*(\omega) = F_i^*(\omega) = \Omega'_i$, $i = 0, 1$. Теорема доказана.

Следствие 6.1. *Гомотопически эквивалентные многообразия имеют изоморфные группы когомологий.*

Доказательство. Если гладкие многообразия X и Y гомотопически эквивалентны, то существуют гладкие отображения $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$, такие что отображение $f \circ g$ гладко гомотопно 1_Y, а отображение $g \circ f$ гладко гомотопно 1_X. По теореме 6.1,

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^* = 1_Y^*, \qquad (g \circ f)^* = f^* \circ g^* = 1_X^*.$$

Так как гомоморфизмы 1_X^* и 1_Y^* тождественны, гомоморфизмы f^* и g^* взаимно обратны, и, поэтому, являются изоморфизмами. Доказательство закончено.

Так как когомологии прямой $\mathbb{R}^1$ нам уже известны, а все пространства $\mathbb{R}^n$ гомотопически эквивалентны друг другу, немедленно получаем следующее важное утверждение, означающее, что необходимое условие разрешимости дифференциальных уравнений вида $d\omega = \Omega$ в $\mathbb{R}^n$ (а также на любом гомотопически эквивалентном многообразии) является и достаточным.

Следствие 6.2 (Лемма Пуанкаре). *Всякая замкнутая форма на $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, точна. Другими словами, группы когомологий пространства $\mathbb{R}^n$ имеют вид*:

$$H^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R}^1 & \text{при } k = 0, \\ 0 & \text{при } k \geq 1. \end{cases}$$

6.4. Когомологии и общая формула Стокса

Общая формула Стокса во многих случаях помогает вычислять когомологии многообразий.

Утверждение 6.5. *Если M — гладкое n-мерное замкнутое ориентируемое многообразие, то $H^n(M) \neq 0$.*

Доказательство. Действительно, зададим на M некоторую риманову метрику (например, вложив M в $\mathbb{R}^N$ и рассмотрев индуцированную метрику). Так как M — ориентируемо, на нем корректно определена форма объема $\omega = *1$. Интеграл от ω по M равен объему многообразия M, и поэтому не равен нулю. Следовательно, ω не является точной формой. Действительно, если $\omega = d\eta$, то по теореме Стокса имеем

$$\int_M \omega = \int_M d\eta = \int_{\partial M} \eta = 0,$$

так как $\partial M = \emptyset$, противоречие. С другой стороны, форма ω, будучи формой максимальной степени, является замкнутой. Итак, на M существует замкнутая не точная n-форма. Доказательство закончено.

Замечание. Построение групп когомологий многообразия с помощью дифференциальных форм — это далеко не единственный подход. Более общие топологические конструкции (так называемые симплициальные и сингулярные гомологии и когомологии) можно найти, например, в замечательной книге *А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс, "Курс гомотопической топологии"*, а общий алгебраический подход изложен, например, в классической книге *Н. Стинрод, С. Эйленберг, "Основания алгебраической топологии"*.

Задачи

Задача 6.1. Пусть M — многообразие, состоящее из k компонент связности. Вычислить $H^0(M)$.

Задача 6.2. Показать, что если два топологических пространства гомеоморфны, то они гомотопически эквивалентны.

Задача 6.3. Чему гомотопически эквивалентно $\mathbb{R}^3$ с выброшенной прямой (с двумя выброшенными точками, с выброшенной окружностью)?

Задача 6.4. Показать, что $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ гомотопически эквивалентно S^{n-1}. Чему гомотопически эквивалентно $\mathbb{R}^n$ с выброшенным R^k, с выброшенной сферой S^k, $k < n$?

Задача 6.5. Вычислить когомологии двумерной сферы S^2 и тора T^2.

Дополнительный материал

6.1. Фактор-группы и фактор-пространства. Подгруппа H группы G называется *нормальной*, если для каждого элемента $g \in G$ имеет место равенство левых и правых смежных классов $gH = Hg$ подгруппы H. В этом случае, на множестве, скажем, левых смежных классов можно корректно определить групповую операцию так:

$$gH \cdot g'H = (g_1 g_2)H, \qquad \text{где } g_1 \in gH \text{ и } g_2 \in g'H.$$

Таким образом, левые смежные классы нормальной подгруппы образуют группу, которая называется *фактор-группой* и обозначается через G/H.

Пример. Если группа — коммутативна, то любая ее подгруппа — нормальна, поэтому для любой такой подгруппы определена фактор-группа. В частности, любое подпространство произвольного линейного пространства является в нем нормальной подгруппой (относительно операции сложения векторов). Соответствующая фактор-группа называется *фактор-пространством.*

Пример. Если $\varphi\colon A \to B$ — гомоморфизм групп, то его ядро

$$\operatorname{Ker}\varphi = \big\{a \in A \mid \varphi(a) = e_B\big\}$$

является нормальной подгруппой в A. Имеет место так называемая *теорема о гомоморфизме*: группа $\varphi(A)$ изоморфна фактор-группе $A/\operatorname{Ker}\varphi$. Для случая линейных пространств это означает, что размерность образа линейного оператора равен разности размерностей пространства-прообраза и ядра этого оператора.

Более подробную информацию можно найти в любом учебнике по алгебре, например, в замечательных книжках А. И. Кострикина «Введение в алгебру» и Э. Б. Винберга «Курс высшей алгебры».

6.2. Когомологии и векторные поля на плоскости. Когомологии плоскости $\mathbb{R}^2$ можно вычислить непосредственно. Как мы уже знаем, $H^0(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}$, и $H^k(\mathbb{R}^2) = 0$ при $k \ge 3$. Вычислим сначала $H^1(\mathbb{R}^2)$. Для этого заметим, что если (x, y) — декартовы координаты на плоскости, то

$$\operatorname{Ker} d_1 = \Big\{\omega = P\,dx + Q\,dy \mid \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\Big\}, \qquad \operatorname{Im} d_0 = \big\{dF \mid F \in \Omega^0(\mathbb{R}^2)\big\}.$$

Покажем, что $\operatorname{Ker} d_1 = \operatorname{Im} d_0$. Для этого по форме $\omega \in \operatorname{Ker} d_1$ построим функцию

$$F(x, y) = \int_\gamma \omega,$$

где γ — произвольная кусочно-регулярная кривая, соединяющая начало координат и точку (x, y). В силу формулы Грина, условие замкнутости формы ω равносильно независимости значения интеграла в правой части от выбора кривой γ (проверьте). Покажем, что $dF = \omega$. Для того, чтобы вычислить частные производные функции F, удобно в качестве γ рассмотреть двухзвенные ломаные, ребра которых параллельны координатным осям. Отметим, что на отрезке, параллельном оси OX, форма $Q\,dy$ равна нулю, а на отрезке, параллельном оси OY, равна нулю форма $P\,dx$. Имеем:

$$F(x, y) = \int_0^x P(t, 0)\,dt + \int_0^y Q(x, t)\,dt = \int_0^y Q(0, t)\,dt + \int_0^x P(t, y)\,dt,$$

откуда

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y), \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y),$$

что и требовалось. Таким образом, $H^1(\mathbb{R}^2) = 0$.

На физическом языке этот результат формулируется так. Снова, пусть (x, y) — декартовы координаты на плоскости. Векторное поле X называется *потенциальным*, если существует такая функция F, что $X = \operatorname{grad} F = \big(\partial F/\partial x, \partial F/\partial y\big)$. Поле $X = (P, Q)$ называется *безвихревым*, если

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Ясно, что каждое потенциальное поле является безвихревым. Действительно, если $P = \partial F/\partial x$, а $Q = \partial F/\partial y$, то

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Равенство нулю первых когомологий плоскости означает в точности, что верно и обратное: каждое безвихревое поле на плоскости является потенциальным. Отметим, что если рассмотреть плоскость с выколотыми точками, то это уже не так.

Далее, докажем, что $H^2(\mathbb{R}^2) = 0$. Ясно, что $Z^2(\mathbb{R}^2) = \Omega^2(\mathbb{R}^2)$, поэтому достаточно показать, что для любой 2-формы $\Omega = F(x, y)\, dx \wedge dy$ существует такая форма $\omega = P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$, что $\Omega = d\omega$. Иными словами, мы должны для каждой гладкой функции F найти такие функции P и Q, что

$$F = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Легко видеть, что этому равенству удовлетворяют функции

$$Q(x, y) = \frac{1}{2}\int_0^x F(t, y)\, dt, \qquad \text{и} \qquad P(x, y) = -\frac{1}{2}\int_0^y F(x, t)\, dt.$$

Итак, мы доказали следующее утверждение.

Утверждение 6.6. *Когомологии стандартной плоскости* $\mathbb{R}^2$ *выглядят так*:

$$H^0(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}, \qquad H^1(\mathbb{R}^2) = H^2(\mathbb{R}^2) = 0.$$

6.3. Когомологии и векторные поля в пространстве. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^3$. Векторное поле X называется *потенциальным*, если оно является градиентом некоторой функции F, т.е. $X = \operatorname{grad} F$. Поле X называется называется *безвихревым*, если $\operatorname{rot} X = 0$. Поле X, являющееся ротором другого поля Y, т.е. $X = \operatorname{rot} Y$, называется *соленоидальным*. Поле X называется *бездивергентным* или *полем без источников*, если $\operatorname{div} X = 0$.

Пусть (x, y, z) — декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$. Отождествим теперь векторные поля $X = (P, Q, R)$ с 1-формами $\omega = P\, dx + Q\, dy + R\, dz$. Эту операцию отождествления (операцию опускания индексов с помощью евклидовой метрики δ_{ij}) обозначим через I. Таким образом, $I(X) = \omega$. Пусть F — гладкая функция. Напомним некоторые полезные нам тождества:

$$I(\operatorname{grad} F) = dF, \quad I(\operatorname{rot} X) = *(d\omega), \quad \text{и} \quad \operatorname{div} X = *d(*\omega).$$

Таким образом,

1) поле X потенциально, если и только если форма $\omega = I(X)$ точна;

2) поле X безвихревое, т.е. $\operatorname{rot} X = 0$, если и только если форма $\omega = I(X)$ замкнута;

3) поле X бездивергентно, т.е. $\operatorname{div} X = 0$, если и только если 2-форма $*\omega$ замкнута.

Лемма Пуанкаре, в применении к случаю $\mathbb{R}^3$, дает следующий результат:

Утверждение 6.7. *Поле в $\mathbb{R}^3$ потенциально, если и только если оно безвихревое (это эквивалентно $H^1(\mathbb{R}^3) = 0$). Поле X бездивергентно, если и только если оно соленоидально (это эквивалентно $H^2(\mathbb{R}^3) = 0$).*

Доказательство. Потенциальность поля X равносильна условию $\omega = dF$ для некоторой функции F (потенциала поля X), но последнее условие равносильно (по лемме Пуанкаре) условию $d\omega = 0$, что равносильно условию $\operatorname{rot} X = 0$ (операции I и $*$ устанавливают изоморфизмы соответствующих векторных пространств).

Далее, бездивергентность поля X равносильна условию $d(*\omega) = 0$, т.е. условию замкнутости формы $*\omega$. Последнее условие равносильно (в силу леммы Пуанкаре) точности этой формы, т.е. условию $*\omega = d\eta$ для некоторой 1-формы η. Применяя операцию $*$ к обеим частям последнего равенства, получаем $I(X) = \omega = *d\eta = I(\operatorname{rot} Y)$, где Y — векторное поле, соответствующее 1-форме η. Поэтому $X = \operatorname{rot} Y$, а это и есть условие соленоидальности поля X. Доказательство закончено.

6.4. Симплектические многообразия. Симплектические многообразия играют важную роль в приложениях, особенно в механике и вариационном исчислении.

Определение. Многообразие M называется *симплектическим*, если на нем задана дифференциальная 2-форма ω, обладающая следующими двумя свойствами.

1) Форма ω замкнута, т.е. $d\omega = 0$.
2) В каждой точке P из M внешняя форма $\omega(P)$ невырождена, т.е. определитель матрицы (ω_{ij}) компонент формы ω в локальных координатах в окрестности точки P отличен от нуля. Другими словами, для каждого вектора $v \in T_P M$ существует вектор $w \in T_P M$, такой что $\omega(v, w) \neq 0$.

Такая форма ω называется *симплектической структурой* на многообразии M.

Пример. Пространство $\mathbb{R}^{2n}$ с координатами $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$ и внешней формой $\omega = dx^1 \wedge dy^1 + \dots + dx^n \wedge dy^n$ является симплектическим многообразием (докажите).

Пример. Пусть M — гладкое многообразие, и T^*M — кокасательное расслоение к многообразию M. Обозначим через $\pi\colon T^*M \to M$ естественную проекцию, сопоставляющую каждому ковектору $\xi \in T_P^*M$ точку $P \in M$. Определим на T^*M следующую 1-форму α. Пусть $W = (P, \xi) \in T_P^*M$ — произвольная точка из T^*M (напомним, что W — это ковектор ξ, заданный в точке $P \in M$), и $v \in T_W(T^*M)$ — касательный вектор. Тогда $\pi_*(v) \in T_P M$. Положим $\alpha(v) = \xi\bigl(\pi_*(v)\bigr)$. Ясно, что α задает в каждой точке $W \in T^*M$ линейную функцию на $T_W(T^*M)$, т.е. α — это 1-форма на кокасательном расслоении. Определим замкнутую 2-форму ω так: $\omega = d\alpha$. Эта форма оказывается невырожденной. Чтобы убедиться в этом, достаточно записать эту форму в локальных координатах. Пусть $(x^1, \dots, x^n)$ — некоторая карта на M, и $(x^1 \dots, x^n, p_1, \dots, p_n)$ — соответствующая карта на T^*M. Тогда легко видеть, что в этих координатах форма α имеет вид $\alpha = p_i dx^i$, поэтому $\omega = d\alpha = dp_i \wedge dx^i$ — невырожденная замкнутая форма.

Имеет место следующее простое утверждение.

Утверждение 6.8. *Размерность произвольного симплектического многообразия — четное число.*

Доказательство. Действительно, если $(x^1, \dots, x^n)$ — произвольные координаты в окрестности произвольной точки P симплектического n-мерного многообразия M, и ω_{ij} — компоненты симплектической структуры ω в этих координатах, то, по определению, $\Omega = (\omega_{ij})$ — кососимметрическая невырожденная матрица, откуда

$$0 \neq \det \Omega = \det \Omega^T = \det(-\Omega) = (-1)^n \det \Omega,$$

поэтому $(-1)^n = 1$, т.е. n четно, что и требовалось.

Симплектическая структура ω устанавливает изоморфизм между ковекторами и векторами (как и любое другое невырожденное тензорное поле типа $(0,2)$ с помощью опускания–поднятия индекса). Если V — касательный вектор, то ему соответствует ковектор ξ, такой что для любого другого вектора W имеет место равенство $\xi(W) = \omega(V, W)$. Обозначим через $I\colon T_P^*M \to T_PM$ соответствующий изоморфизм (проверьте, что этот изоморфизм — поднятие индекса ковектора с помощью невырожденного тензора ω типа $(0,2)$).

Если H — гладкая функция на M, то векторное поле $I(dH)$ называется ее *косым градиентом* и обозначается через $\operatorname{sgrad} H$. Другими словами, для любого вектора W выполнено: $W(H) = dH(W) = \omega(\operatorname{sgrad} H, W)$. Если $M = \mathbb{R}^{2n}$ со стандартной симплектической структурой $\omega = \sum dx^i \wedge dy^i$ в координатах $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$, то

$$\operatorname{sgrad} H = \left(\frac{\partial H}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial y^n}, -\frac{\partial H}{\partial x^1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial x^n}\right).$$

Действительно, если $\operatorname{sgrad}(H) = A = (A^1, \dots, A^{2n})$, и $W = (W^1, \dots, W^{2n})$, то

$$dH(W) = \frac{\partial H}{\partial x^i} W^i + \frac{\partial H}{\partial y^i} W^{i+n},$$

и

$$\omega(A, W) = A^1 W^{n+1} - A^{n+1} W^1 + A^2 W^{n+2} - A^{n+2} W^2 + \dots + A^n W^{2n} - A^{2n} W^n,$$

откуда, приравнивая коэффициенты при одинаковых W^j, и получаем требуемое.

Известная из механики система уравнений Гамильтона на этом языке записывается так: $(\dot{x}, \dot{y}) = I(dH(x)) = \operatorname{sgrad} H$.

Существования симплектической структуры на многообразии M накладывает ряд жестких ограничений на устройство M. Мы уже видели, что размерность M в этом случае обязана быть четной. Приведем еще один результат такого типа.

Утверждение 6.9. *Пусть M — замкнутое (т.е. компактное без края) симплектическое многообразие размерности $2n$. Тогда $H^2(M) \neq 0$.*

Доказательство. Пусть ω — симплектическая структура на M. Покажем, что форма ω не точна (это и будет означать, что $H^2(M) \neq 0$). Действительно, если $\omega = d\alpha$, то форма

$$\Omega_k = \underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_{k \text{ раз}}$$

также будет точной, так как $\Omega_k = d(\alpha \wedge \omega \wedge \dots \wedge \omega)$. Но тогда, по теореме Стокса, интеграл от формы Ω_n по замкнутому многообразию M будет равен нулю, что невозможно, так как существенная компонента формы Ω_n нигде не обращается в нуль. Доказательство закончено.

Упражнение 6.4. Покажите, что каждое симплектическое многообразие ориентируемо.

Упражнение 6.5. При каких n на сфере S^{2n} можно задать симплектическую структуру?

Отметим в заключение, что симплектические многообразия обладают следующим важным свойством, позволяющим распространять любые рассуждения “из одной точки” на целую окрестность.

Теорема 6.2 (Дарбу). *В достаточно малой окрестности каждой точки симплектического многообразия можно выбрать такие локальные координаты (x, y), что симплектическая структура в них принимает вид $\sum dx^i \wedge dy^i$.*

Лекция 7. Ковариантное дифференцирование

В предыдущем разделе мы построили теорию внешнего дифференцирования для дифференциальных форм — кососимметричных тензорных полей. Цель настоящего раздела — построить общую теорию дифференцирования для произвольных тензорных полей.

Прежде всего отметим, что обычная операция взятия частных производных от компонент тензорного поля не является тензорной. А именно, пусть T — произвольный тензорное поле типа (p,q) на гладком многообразии M. Рассмотрим соответствие, сопоставляющее локальным координатам $(x^1,\dots,x^n)$ набор величин $\dfrac{\partial T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}}{\partial x^k}$. Пусть $(x^{1'},\dots,x^{n'})$ — другая система локальных координат на M. Ей, по определению, это соответствие сопоставляет набор величин $\dfrac{\partial T^{i'_1\dots i'_p}_{j'_1\dots j'_q}}{\partial x^{k'}}$. Воспользовавшись тензорным законом для компонент тензора T, получим:

$$\frac{\partial T^{i'_1\dots i'_p}_{j'_1\dots j'_q}}{\partial x^{k'}} = \frac{\partial}{\partial x^{k'}}\Big(T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}}\cdots\frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}}\Big) =$$
$$= \frac{\partial T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}}\cdots\frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}} +$$
$$+ T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\frac{\partial}{\partial x^{k'}}\Big(\frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}}\cdots\frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}}\Big).$$

Первое слагаемое — это в точности тензорный закон для рассматриваемого соответствия, а второе слагаемое, вообще говоря, не равно нулю.

Замечание. Отметим, что если замена координат линейная, то второе слагаемое — нуль.

Однако, оказывается, операцию частного дифференцирования можно слегка подправить так, что она станет тензорной.

7.1. Евклидова связность

Мы начнем со случая евклидового пространства $\mathbb{R}^n$. Зафиксируем в нем глобальные евклидовы координаты $(z^1,\dots,z^n)$. Отметим, что возможность фиксировать глобальные координаты в $\mathbb{R}^n$ лежит в основе нашей конструкции. При построении операции дифференцирования тензорных полей на $\mathbb{R}^n$, которую мы обозначим через ∇, будем исходить из следующих соображений.

- Операция ∇ должна быть тензорной. Другими словами, если T — тензорное поле типа (p,q), то результат дифференцирования ∇T должен быть тензорным полем типа $(p,q+1)$.

- В евклидовых координатах $(z^1, \dots, z^n)$ компоненты $(\nabla T)^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_{q+1}}$ тензорного поля ∇T должны совпадать с частными производными $\dfrac{\partial T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}}{\partial z^{j_{q+1}}}$ компонент тензорного поля T.

Результат применения операции ∇, т.е. тензорное поле ∇T, будем называть *ковариантной производной тензорного поля T (в евклидовой связности)*.

По определению, чтобы найти компоненты тензорного поля ∇T в произвольных координатах $(x^1, \dots, x^n)$, следует перейти в евклидовы координаты $(z^1, \dots, z^n)$, там выполнить обычное частное дифференцирование, а затем вернуться обратно. Проделаем это. Пусть $T^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q}$ — компоненты тензорного поля T в (криволинейных) координатах $(x^1, \dots, x^n)$. Тогда его компоненты $\tilde{T}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q}$ в евклидовых координатах имеют вид

$$\tilde{T}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} = \frac{\partial z^{\alpha_1}}{\partial x^{a_1}} \cdots \frac{\partial z^{\alpha_p}}{\partial x^{a_p}} \frac{\partial x^{b_1}}{\partial z^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial x^{b_q}}{\partial z^{\beta_q}} T^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q}.$$

Компоненты тензорного поля ∇T в евклидовых координатах по определению равны обычным частным производным:

$$(\widetilde{\nabla T})^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q \gamma} = \frac{\partial}{\partial z^\gamma}\Big(\frac{\partial z^{\alpha_1}}{\partial x^{a_1}} \cdots \frac{\partial z^{\alpha_p}}{\partial x^{a_p}} \frac{\partial x^{b_1}}{\partial z^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial x^{b_q}}{\partial z^{\beta_q}} T^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q}\Big).$$

Последнее выражение удобно переписать в виде

$$\begin{aligned}(\widetilde{\nabla T})^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q \gamma} &= \Big(\frac{\partial T^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q}}{\partial x^c} \frac{\partial x^c}{\partial z^\gamma}\Big) \frac{\partial z^{\alpha_1}}{\partial x^{a_1}} \cdots \frac{\partial z^{\alpha_p}}{\partial x^{a_p}} \frac{\partial x^{b_1}}{\partial z^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial x^{b_q}}{\partial z^{\beta_q}} + \\ &+ T^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q} \Big(\frac{\partial^2 z^{\alpha_1}}{\partial x^{a_1} \partial x^c} \frac{\partial x^c}{\partial z^\gamma}\Big) \frac{\partial z^{\alpha_2}}{\partial x^{a_2}} \cdots \frac{\partial z^{\alpha_p}}{\partial x^{a_p}} \frac{\partial x^{b_1}}{\partial z^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial x^{b_q}}{\partial z^{\beta_q}} + \dots + \\ &+ T^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q} \Big(\frac{\partial^2 x^{b_1}}{\partial z^{\beta_1} \partial z^\gamma}\Big) \frac{\partial z^{\alpha_1}}{\partial x^{a_1}} \cdots \frac{\partial z^{\alpha_p}}{\partial x^{a_p}} \frac{\partial x^{b_2}}{\partial z^{\beta_2}} \cdots \frac{\partial x^{b_q}}{\partial z^{\beta_q}} + \dots,\end{aligned}$$

где многоточия обозначают слагаемые, отвечающие дифференцированию других сомножителей вида $\dfrac{\partial z^\alpha}{\partial x^a}$ и $\dfrac{\partial x^b}{\partial z^\beta}$ по правилу Лейбница.

Чтобы найти компоненты тензорного поля ∇T в координатах $(x^1, \dots, x^n)$, вновь воспользуемся тензорным законом. Получим:

$$\begin{aligned}(\nabla T)^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q k} &= \frac{\partial x^{i_1}}{\partial z^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial z^{\alpha_p}} \frac{\partial z^{\beta_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial z^{\beta_q}}{\partial x^{j_q}} \frac{\partial z^\gamma}{\partial x^k} (\widetilde{\nabla T})^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q \gamma} = \\ &= \frac{\partial T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}}{\partial x^k} + T^{a_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \underbrace{\frac{\partial^2 z^{\alpha_1}}{\partial x^{a_1} \partial x^k} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial z^{\alpha_1}}} + \dots + T^{i_1 \dots i_p}_{b_1 j_2 \dots j_q} \underbrace{\frac{\partial^2 x^{b_1}}{\partial z^{\beta_1} \partial z^\gamma} \frac{\partial z^{\beta_1}}{\partial x^{j_1}} \frac{\partial z^\gamma}{\partial x^k}} + \dots .\end{aligned}$$

Отметим, что в последнее выражение входят функции двух типов, выделенные снизу фигурными скобками. Оказывается, впрочем, что на самом деле это одна и та же функция.

Лемма 7.1. *Имеет место равенство*

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial z^\alpha \partial z^\beta}\frac{\partial z^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial z^\beta}{\partial x^k} = -\frac{\partial^2 z^\alpha}{\partial x^j \partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial z^\alpha}.$$

Доказательство. Действительно, продифференцировав очевидное равенство $\dfrac{\partial x^i}{\partial z^\alpha}\dfrac{\partial z^\alpha}{\partial x^j} = \delta^i_j$ по x^k получим:

$$0 = \frac{\partial^2 x^i}{\partial z^\alpha \partial z^\beta}\frac{\partial z^\beta}{\partial x^k}\frac{\partial z^\alpha}{\partial x^j} + \frac{\partial x^i}{\partial z^\alpha}\frac{\partial^2 z^\alpha}{\partial x^j \partial x^k},$$

что и требовалось.

Положим

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{\partial^2 z^\alpha}{\partial x^j \partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial z^\alpha}. \qquad (*)$$

Тогда компоненты тензорного поля ∇T в координатах $(x^1, \dots, x^n)$ перепишутся в более компактном виде так:

$$\begin{aligned}(\nabla T)^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q k} \quad = \quad & \frac{\partial T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}}{\partial x^k} + T^{a_1 i_2 \dots i_p}_{j_1\dots j_q}\Gamma^{i_1}_{a_1 k} + \dots + T^{i_1\dots i_{p-1} a_p}_{j_1\dots j_q}\Gamma^{i_p}_{a_p k} - \\ & - T^{i_1\dots i_p}_{b_1 j_2 \dots j_q}\Gamma^{b_1}_{j_1 k} - \dots - T^{i_1 \dots i_p}_{j_1\dots j_{q-1} b_q}\Gamma^{b_q}_{j_q k}.\end{aligned}$$

Отметим, что величины Γ^i_{jk}, определенные соотношением $(*)$, не являются компонентами тензорного поля.

Лемма 7.2. *Пусть* $(x^1, \dots, x^n)$ *и* $(x^{1'}, \dots, x^{n'})$ *— две криволинейных системы координат в* $\mathbb{R}^n$*. Пусть*

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{\partial^2 z^\alpha}{\partial x^j \partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial z^\alpha}, \quad \text{и} \quad \Gamma^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial^2 z^\alpha}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial z^\alpha},$$

где $(z^1, \dots, z^n)$ *— евклидовы координаты в* $\mathbb{R}^n$*. Тогда*

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \Gamma^i_{jk}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\beta}.$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned}\Gamma^{i'}_{j'k'} \quad &= \quad \frac{\partial}{\partial x^{k'}}\Big(\frac{\partial z^\alpha}{\partial x^{j'}}\Big)\frac{\partial x^{i'}}{\partial z^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^{k'}}\Big(\frac{\partial z^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\Big)\frac{\partial x^{i'}}{\partial z^\alpha} = \\ &= \quad \Big(\frac{\partial^2 z^\alpha}{\partial x^j \partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} + \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}\Big)\frac{\partial x^{i'}}{\partial z^\alpha} = \\ &= \quad \Big(\frac{\partial^2 z^\alpha}{\partial x^j \partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial z^\alpha}\Big)\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial z^\alpha} = \\ &= \quad \Gamma^i_{jk}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j},\end{aligned}$$

что и требовалось.

Итак, нами получен следующий важный результат.

Теорема 7.1. *На тензорных полях на* $\mathbb{R}^n$ *существует тензорная операция* ∇, *ставящая в соответствие каждому тензорному полю* T *типа* (p,q) *тензорное поле* ∇T *типа* $(p,q{+}1)$ *и обладающая следующими свойствами.*

- *В евклидовых координатах* $(z^1,\dots,z^n)$ *операция* ∇ *совпадает с обычным частным дифференцированием, т.е. если* $\tilde{T}^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ *— компоненты поля* T *в евклидовых координатах, то в евклидовых координатах компоненты* $\widetilde{\nabla T}^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_{q+1}}$ *тензора* ∇T *имеют вид*
$$\widetilde{\nabla T}^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q k} = \frac{\partial}{\partial z^k}\bigl(\tilde{T}^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\bigr);$$
- *В произвольных криволинейных координатах* $(x^1,\dots,x^n)$ *компоненты тензоров* T *и* ∇T *связаны так*:
$$\begin{aligned}(\nabla T)^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q k} \quad = \quad & \frac{\partial T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}}{\partial x^k} + T^{a_1 i_2\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\Gamma^{i_1}_{a_1 k} + \dots + T^{i_1\dots i_{p-1}a_p}_{j_1\dots j_q}\Gamma^{i_p}_{a_p k} - \\ & - T^{i_1\dots i_p}_{b_1 j_2\dots j_q}\Gamma^{b_1}_{j_1 k} - \dots - T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_{q-1}b_q}\Gamma^{b_q}_{j_q k},\end{aligned}$$
где Γ^i_{jk} *— гладкие функции на* $\mathbb{R}^n$, *соответствующие системе локальных координат* $(x^1,\dots,x^n)$, *и определенные соотношениями*
$$\Gamma^i_{jk} = \frac{\partial^2 z^\alpha}{\partial x^j\partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial z^\alpha};$$
- *Соответствие*
$$\Gamma\colon (x^1,\dots,x^n)\mapsto \{\Gamma^i_{jk}\},$$
сопоставляющее координатам $(x^1,\dots,x^n)$ *набор функций* Γ^i_{jk} *не является тензорным полем. Функции* Γ^i_{jk} *при замене координат преобразуются по правилу*
$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \Gamma^i_{jk}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j},$$
где $\Gamma^{i'}_{j'k'}$ *— набор функций, соответствующих криволинейным координатам* $(x^{1'},\dots,x^{n'})$.

Итак, нами доказана теорема существования тензорной операции дифференцирования в $\mathbb{R}^n$. Отметим, что мы существенно использовали наличие в $\mathbb{R}^n$ выделенной — евклидовой системы координат, в которых операция дифференцирования по нашему определению должна была выглядеть особенно просто.

Прежде чем переходить к общему случаю, условимся о терминологии и обозначениях. Компоненту $(\nabla T)^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q k}$ тензора ∇T принято обозначать или через $\nabla_k T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$, или, особенно в физической литературе, через $T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q\ ;k}$. Функции Γ^i_{jk} называются *символами Кристоффеля евклидовой связности* в координатах $(x^1,\dots,x^n)$, а их закон преобразования, установленный в лемме 7.2, — *законом преобразования символов Кристоффеля.*

7.2. Аффинные связности

Пусть теперь M — произвольное гладкое многообразие.

Определение. Говорят, что на многообразии M задана *аффинная связность* Γ, если задано соответствие, сопоставляющее каждым локальным координатам $(x^1,\dots,x^n)$ в окрестности произвольной точки P из M набор гладких функций $\Gamma^i_{jk}(x^1,\dots,x^n)$. При этом, если $(x^{1'},\dots,x^{n'})$ — другие локальные координаты в окрестности точки P, то соответствующие им функции $\Gamma^{i'}_{j'k'}$ связаны с функциями Γ^i_{jk} по следующему закону

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \Gamma^i_{jk}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}.$$

Функции Γ^i_{jk} называются *символами Кристоффеля аффинной связности* Γ, или ее *компонентами в координатах* $(x^1,\dots,x^n)$.

Если на многообразии M задана аффинная связность Γ, то на тензорных полях на многообразии M определена *операция* ∇ *ковариантного дифференцирования относительно аффинной связности* Γ. А именно, если T — произвольное тензорное поле типа (p,q), то его *ковариантной производной в связности* Γ называется тензорное поле ∇T, компоненты которого в произвольных координатах $(x^1,\dots,x^n)$ вычисляются так:

$$(\nabla T)^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q k} = \frac{\partial T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}}{\partial x^k} + T^{a_1 i_2\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\Gamma^{i_1}_{a_1 k} + \dots + T^{i_1\dots i_{p-1}a_p}_{j_1\dots j_q}\Gamma^{i_p}_{a_p k} - \\ - T^{i_1\dots i_p}_{b_1 j_2\dots j_q}\Gamma^{b_1}_{j_1 k} - \dots - T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_{q-1}b_q}\Gamma^{b_q}_{j_q k}.$$

Замечание. Пока, вообще говоря, не откуда не вытекает, что на произвольном гладком многообразии M можно ввести хотя бы одну аффинную связность.

Пример. Пусть $M = \mathbb{R}^n$. Тогда построенное нами в предыдущем пункте соответствие, сопоставляющее произвольным координатам в $\mathbb{R}^n$ соответствующие символы Кристоффеля евклидовой связности, является, как следует из леммы 7.2, аффинной связностью на многообразии $\mathbb{R}^n$.

Пример. Пусть M — регулярная гиперповерхность в $\mathbb{R}^{n+1}$. В прошлом семестре мы вывели деривационные формулы Гаусса–Вейнгартена и определили ковариантное дифференцирование векторных полей на M. При этом на поверхности M возникли символы Кристоффеля, которые, напомним, в координатах $(u^1, \dots, u^n)$ явно записывались через первую фундаментальную форму (g_{ij}) так:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{i\alpha} \Big(\frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{k\alpha}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^\alpha} \Big).$$

Несложные, хотя и громоздкие, вычисления показывают, что соответствие, сопоставляющее координатам $(u^1, \dots, u^n)$ набор функций Γ^i_{jk}, является аффинной связностью на многообразии M.

Пусть M — произвольное гладкое многообразие с аффинной связностью Γ. Рассмотрим соответствие Ω, сопоставляющее каждой локальной системе координат $(x^1, \dots, x^n)$ набор чисел $\Omega^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}$.

Лемма 7.3. *В сделанных выше обозначениях, соответствие Ω задает на многообразии M тензорное поле типа $(1, 2)$.*

Доказательство. Действительно, это немедленно вытекает из того, что нетензорная добавка в законе преобразований символов Кристоффеля симметрична по нижним индексам. Лемма доказана.

Тензорное поле Ω называется *тензором кручения аффинной связности* Γ. Связность Γ называется *симметричной*, если ее тензор кручения равен нулю.

Пример. Евклидова связность на пространстве $\mathbb{R}^n$ является симметричной, так как ее символы Кристоффеля могут быть записаны в виде

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{\partial^2 z^\alpha}{\partial x^j \partial x^k} \frac{\partial x^i}{\partial z^\alpha},$$

симметричном по нижним индексам j и k. Произвольная связность, отметим, вовсе не обязана быть симметричной.

Упражнение 7.1. Проверить симметричность аффинной связности построенной выше на гиперповерхности $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

7.3. Ковариантная производная по направлению

Пусть T — тензорное поле типа (p, q), и X — векторное поле, т.е. тензорное поле типа $(1, 0)$ на многообразии M.

Определение. *Ковариантной производной* $\nabla_X T$ *поля* T *вдоль векторного поля* X называется следующее тензорное поле типа (p, q):

$$\nabla_X T = C^1_{q+1}\big(X \otimes \nabla T\big).$$

Пусть $(x^1, \dots, x^n)$ — локальные координаты на многообразии M. Тогда, по определению, компоненты тензорного поля $\nabla_X T$ могут быть записаны в виде

$$(\nabla_X T)^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} = X^\alpha \nabla_\alpha T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q},$$

где $(X^1, \dots, X^n)$ — компоненты поля X в координатах $(x^1, \dots, x^n)$. В частности, если поле X совпадает с вектором ∂_{x^k} канонического базиса, то

$$(\nabla_{\partial_{x^k}} T)^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} = \nabla_k T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}.$$

Операция дифференцирования $\nabla_{\partial_{x^k}}$ вдоль векторного поля ∂_{x^k} называется *ковариантным дифференцированием по k-ой координате* и обозначается обычно для краткости просто через ∇_k. В этих обозначениях ковариантное дифференцирование вдоль векторного поля X можно представить в локальных координатах $(x^1, \dots, x^n)$ в виде

$$\nabla_X = X^k \nabla_k.$$

Определение ковариантной производной вдоль векторного поля позволяет дать естественную интерпретацию символов Кристоффеля аффинной связности.

Лемма 7.4. *Пусть $(x^1, \dots, x^n)$ — произвольные локальные координаты на гладком многообразии M с аффинной связностью Γ. Тогда*

$$\nabla_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j} = \Gamma^\alpha_{ji} \partial_{x^\alpha}.$$

Доказательство. Действительно, запишем ковариантную производную векторного поля ∂_{x^j} вдоль поля ∂_{x^i}. По определению получим:

$$(\nabla_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j})^k = (\partial_{x^i})^\alpha \nabla_\alpha (\partial_{x^j})^k = (\partial_{x^i})^\alpha \Big(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\partial_{x^j})^k + \Gamma^k_{\beta\alpha} (\partial_{x^j})^\beta \Big).$$

Поскольку координаты $(\partial_{x^j})^k$ базисного вектора постоянны и равны δ^k_j, получаем

$$(\nabla_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j})^k = \delta^\alpha_i \Gamma^k_{\beta\alpha} \delta^\beta_j = \Gamma^k_{ji},$$

откуда и вытекает требуемое. Лемма доказана.

Пусть γ — произвольная гладкая кривая на многообразии M. Тогда *ковариантной производной $\nabla_{\gamma'} T$ тензорного поля T вдоль γ* называется ковариантная производная поля T вдоль вектора скорости γ' кривой γ. Если $(x^1, \dots, x^n)$ — произвольная локальная система координат, и $x^i = x^i(t)$ — координатное представление кривой γ, то, по определению, компоненты тензорного поля $\nabla_{\gamma'}T$ вычисляются так:

$$
\begin{aligned}
(\nabla_{\gamma'}T)^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} &= \frac{dx^\alpha}{dt}\nabla_\alpha T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} = \\
&= \frac{dx^\alpha}{dt}\Big(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} + \text{слагаемые с символами Кристоффеля}\Big) = \\
&= \frac{d}{dt}T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} + \frac{dx^\alpha}{dt}\Big(\text{слагаемые с символами Кристоффеля}\Big).
\end{aligned}
$$

Из полученной формулы вытекает следующий факт.

Лемма 7.5. *Ковариантная производная тензорного поля T вдоль кривой γ зависит только от значения поля T на кривой γ.*

Замечание. Чтобы вычислить обычную ковариантную производную в некоторой точке следует знать значение тензорного поля в некоторой открытой окрестности этой точки. Поэтому, с формальной точки зрения, если тензорное поле T задано только в точках кривой γ, то производная $\nabla_{\gamma'}T$ не определена, так как не определена производная ∇T, входящая в определение производной по направлению. Чтобы выйти из этого затруднительного положения, поступают следующим образом. Пусть $P = \gamma(t_0)$ — произвольная точка на кривой γ. Продолжим поле T, заданное вдоль кривой, на малую окрестность U точки P в многообразии, т.е. построим поле $\tilde T$, определенное в окрестности U и совпадающее с T в точках кривой. Ясно, что такое продолжение существует (докажите!). Определим *ковариантную производную* $\nabla_{\gamma'}T(P)$ *поля* T *вдоль* γ, положив

$$\nabla_{\gamma'}T = \nabla_{\gamma'}\tilde T.$$

Стоящее справа выражение корректно определено, а из леммы 7.5 вытекает, что оно не зависит от продолжения $\tilde T$ поля T за пределы кривой γ. В дальнейшем мы будем ковариантно дифференцировать вдоль кривых тензорные поля определенные только вдоль этих кривых без специальных оговорок.

Замечание. Значение ковариантной производной тензорного поля вдоль кривой γ, вообще говоря, зависит от параметризации кривой. Действительно, пусть $\gamma\colon [a,b] \to M$ — гладкая кривая на многообразии M, и $\tau\colon [c,d] \to [a,b]$ — замена параметризации (т.е. некоторый диффеоморфизм отрезков). Обозначим через $t \in [a,b]$ параметр кривой γ, через $\tilde\gamma = \gamma\circ\tau$ — кривую полученную из γ заменой параметра, и через $s \in [c,d]$ — параметр кривой $\tilde\gamma$. Пусть $(x^1, \dots, x^n)$ — локальные координаты, и $x^i(t)$ — координатное представление кривой γ. Тогда координатное представление $\tilde x^i(s)$ имеет вид $\tilde x^i(s) = x^i\big(\tau(s)\big)$. Поэтому для произвольного тензорного поля T имеем:

$$\nabla_{d\tilde\gamma/ds}T = \frac{d\tilde x^\alpha}{ds}\nabla_\alpha T = \frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dt}{ds}\nabla_\alpha T = \frac{dt}{ds}\nabla_{d\gamma/dt}T.$$

Итак, доказана следующая лемма.

Лемма 7.6. *При замене параметра $t = \tau(s)$ кривой $\gamma(t)$, ковариантная производная вдоль кривой умножается на производную $d\tau/ds$.*

7.4. Евклидовы координаты для связности

При определении евклидовой связности мы пользовались наличием на пространстве $\mathbb{R}^n$ «хороших» координат.

Определение. Пусть M — гладкое многообразие с аффинной связностью Γ. Локальные координаты $(x^1, \ldots, x^n)$ на M называются *евклидовыми для связности* Γ, если символы Кристоффеля связности Γ в координатах $(x^1, \ldots, x^n)$ тождественно равны нулю в области определения этих координат.

Например, если $M = \mathbb{R}^n$, и Γ — евклидова связность, то стандартные евклидовы координаты $(z^1, \ldots, z^n)$ в $\mathbb{R}^n$ являются, по определению евклидовой связности, евклидовыми для связности Γ. Отметим, что евклидовы координаты для связности Γ могут и не существовать.

Замечание. Пусть M — гладкое многообразие и Γ — несимметричная связность на M. Тогда для связности Γ не существует евклидовых координат. Действительно, если $(x^1, \ldots, x^n)$ — евклидовы координаты связности Γ, то в этих координатах тензор кручения связности Γ тождественно равен нулю. Но тогда тензор кручения равен нулю в любых координатах, что означает симметричность связности Γ. Противоречие. Таким образом, необходимым условием существования евклидовых координат для аффинной связности является ее симметричность.

Задачи

Задача 7.1. Чему равны символы Кристоффеля евклидовой связности в евклидовой системе координат?

Задача 7.2. Выписать формулы для компонент тензора ∇T в случае, когда T является вектором, ковектором, линейным оператором, билинейной формой.

Задача 7.3. Пусть M — гладкое многообразие с аффинной связностью Γ, и δ — тензорное поле типа $(1,1)$, компоненты которого в координатах $(x^1, \ldots, x^n)$ имеют вид δ^i_j (символы Кронекера). Вычислить $\nabla_k \delta^i_j$.

Задача 7.4. Пусть $M = \mathbb{R}^n$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ произвольные криволинейные координаты $(x^1, \ldots, x^n)$ и сопоставим им набор гладких функций $\{\Gamma^i_{jk}\}$. Каждой другой системе координат $(x^{1'}, \ldots, x^{n'})$ на $\mathbb{R}^n$ сопоставим набор функций $\{\Gamma^{i'}_{j'k'}\}$, вычисленных в соответствии с законом изменения символов Кристоффеля при замене координат:

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \Gamma^i_{jk} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}.$$

Проверить, что построенное соответствие задает аффинную связность на $\mathbb{R}^n$, т.е. если $\{\Gamma^{i''}_{j''k''}\}$ — набор функций, сопоставленный системе координат $(x^{1''}, \ldots, x^{n''})$, то справедливо равенство

$$\Gamma^{i''}_{j''k''} = \Gamma^{i'}_{j'k'} \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{j''}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}} + \frac{\partial^2 x^{j'}}{\partial x^{j''} \partial x^{k''}} \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{j'}}?$$

Другими словами, закон преобразования символов Кристоффеля при замене координат является транзитивным?

Задача 7.5. Пусть M — гладкое многообразие с аффинной связностью Γ, и T — произвольное тензорное поле на M типа $(1,2)$. Сопоставим каждой системе координат $(x^1,\ldots,x^n)$ набор функций $\{\Gamma^i_{jk}+T^i_{jk}\}$. Проверить, что в результате получится некоторая аффинная связность на M.

Задача 7.6. Привести пример несимметричной связности на $\mathbb{R}^n$.

Задача 7.7. Пусть $\omega\in\Omega^k(M)$ — внешняя форма степени k на многообразии M, а Γ — симметричная аффинная связность на M. Как связаны тензорные поля $A(\nabla\omega)$ и $d\omega$?

Дополнительный материал

7.1. Транзитивность закона преобразования символов Кристоффеля. Рассмотрим в $M=\mathbb{R}^n$ произвольные криволинейные координаты $(x^1,\ldots,x^n)$ и сопоставим им набор гладких функций $\{\Gamma^i_{jk}\}$. Каждой другой системе координат $(x^{1'},\ldots,x^{n'})$ на $\mathbb{R}^n$ сопоставим набор функций $\{\Gamma^{i'}_{j'k'}\}$, вычисленных в соответствии с законом изменения символов Кристоффеля при замене координат:

$$\Gamma^{i'}_{j'k'}=\Gamma^i_{jk}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}+\frac{\partial^2x^j}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}.$$

Проверим, что построенное нами соответствие задает аффинную связность на $\mathbb{R}^n$, т.е. если $\{\Gamma^{i''}_{j''k''}\}$ — набор функций, сопоставленный системе координат $(x^{1''},\ldots,x^{n''})$, а именно,

$$\Gamma^{i''}_{j''k''}=\Gamma^i_{jk}\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j''}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k''}}+\frac{\partial^2x^j}{\partial x^{j''}\partial x^{k''}}\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^j},$$

то справедливо ли равенство

$$\Gamma^{i''}_{j''k''}=\Gamma^{i'}_{j'k'}\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{j''}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}+\frac{\partial^2x^{j'}}{\partial x^{j''}\partial x^{k''}}\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{j'}}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned}\Gamma^{i''}_{j''k''}&=\Gamma^i_{jk}\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j''}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k''}}+\frac{\partial^2x^j}{\partial x^{j''}\partial x^{k''}}\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^j}=\Gamma^i_{jk}\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{j''}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}+\\&+\frac{\partial}{\partial x^{k''}}\left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{j''}}\right)\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}=\left(\Gamma^i_{jk}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\right)\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{j''}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}+\\&+\left(\frac{\partial^2x^j}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{j''}}+\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial^2x^{j'}}{\partial x^{j''}\partial x^{k''}}\right)\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}=\\&=\left(\Gamma^i_{jk}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}+\frac{\partial^2x^j}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\right)\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{j''}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}+\\&+\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial^2x^{j'}}{\partial x^{j''}\partial x^{k''}}\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}=\Gamma^{i'}_{j'k'}\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{j''}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}+\frac{\partial^2x^{j'}}{\partial x^{j''}\partial x^{k''}}\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{j'}}.\end{aligned}$$

Пример. Пусть на многообразии M имеются глобальные координаты $(z^1,\ldots,z^n)$. Сопоставим им набор символов Кристоффеля Γ^i_{jk} тождественно равный нулю. Для построенной связности выделенные координаты $(z^1,\ldots,z^n)$ будут евклидовыми. Сравните описанную конструкцию со случаем евклидового пространства.

Упражнение 7.2. Какие еще бывают транзитивные законы преобразования, кроме тензорного и закона символов Кристоффеля?

Лекция 8. Свойства ковариантного дифференцирования

В данной лекции мы продолжим изучение ковариантного дифференцирования, а также построим важный пример аффинной связности — риманову связность.

8.1. Алгебраические свойства ковариантного дифференцирования

Перечислим простейшие свойства операции ковариантного дифференцирования.

Утверждение 8.1. *Пусть M — гладкое многообразие, Γ — аффинная связность на нем, $P \in M$ — некоторая его точка, и X — произвольное векторное поле, заданное в окрестности точки P. Тогда операция ковариантного дифференцирования в аффинной связности Γ обладает следующими свойствами.*

1) *Результат ∇T применения операции ковариантного дифференцирования к тензорному полю T типа (p,q) является тензорным полем типа $(p,q+1)$. Результат $\nabla_X T$ применения операции ковариантного дифференцирования по направлению векторного поля X к тензорному полю T типа (p,q) является тензорным полем того же типа (p,q).*

2) *Операция ∇ линейна: для любых постоянных α и β и тензорных полей T и S типа (p,q) имеют место равенства $\nabla(\alpha T+\beta S) = \alpha\nabla T+\beta\nabla S$, и $\nabla_X(\alpha T+\beta S)=\alpha\nabla_X T+\beta\nabla_X S$.*

3) *Результат применения операции ∇ к функции f совпадает с дифференциалом этой функции: $\nabla f = df$; в локальных координатах $(x^1,\dots,x^n)$ имеем: $\nabla f = \dfrac{\partial f}{\partial x^k}dx^k$. Результат применения операции ∇_X к функции f совпадает с производной этой функции по направлению поля X: $\nabla_X f = X(f) = df(X)$.*

4) *Операция ∇_X удовлетворяет правилу Лейбница, а именно, для любых тензорных полей T типа (p,q) и S типа (r,s) имеет место равенство:*

$$\nabla_X(T\otimes S) = (\nabla_X T)\otimes S + T\otimes(\nabla_X S),$$

в частности, в локальных координатах:

$$\nabla_k(T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}S^{\alpha_1\dots\alpha_r}_{\beta_1\dots\beta_s}) = (\nabla_k T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q})S^{\alpha_1\dots\alpha_r}_{\beta_1\dots\beta_s} + T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\nabla_k S^{\alpha_1\dots\alpha_r}_{\beta_1\dots\beta_s}.$$

5) Операция ∇ перестановочна с операцией свертки: если T — тензорное поле типа (p,q), то для любых a и b таких, что $1 \le a \le p$ и $1 \le b \le q$, выполнено

$$\nabla C_b^a(T) = C_b^a(\nabla T) \qquad \text{и} \qquad \nabla_X C_b^a(T) = C_b^a(\nabla_X T).$$

Доказательство. Свойство (1) следует из закона преобразования символов Кристоффеля, который специально был подобран нами так, чтобы ковариантное дифференцирование было тензорной операцией. Провести соответствующую выкладку оставляется в качестве обязательного упражнения (эта выкладка, фактически, была проделана в предыдущей лекции при построении евклидовой связности). Свойства (2) и (3) немедленно вытекают из определения ковариантного дифференцирования.

Доказательство свойства (4) мы проведем для случая тензоров типа $(1,1)$, оставляя более громоздкий общий случай в качестве упражнения. Итак, пусть $T_{j_1}^{i_1}$ и $S_{j_2}^{i_2}$ — компоненты тензорных полей T и S типа $(1,1)$ в локальных координатах $(x^1,\dots,x^n)$, и $P_{j_1j_2}^{i_1i_2} = T_{j_1}^{i_1} S_{j_2}^{i_2}$ — компоненты их тензорного произведения. Тогда, по определению операции ковариантного дифференцирования, в координатах $(x^1,\dots,x^n)$ имеем:

$$\nabla_k P_{j_1j_2}^{i_1i_2} = \frac{\partial P_{j_1j_2}^{i_1i_2}}{\partial x^k} + P_{j_1j_2}^{\alpha i_2}\Gamma_{\alpha k}^{i_1} + P_{j_1j_2}^{i_1\alpha}\Gamma_{\alpha k}^{i_2} - P_{\alpha j_2}^{i_1i_2}\Gamma_{j_1k}^{\alpha} - P_{j_1\alpha}^{i_1i_2}\Gamma_{j_2k}^{\alpha} =$$
$$= \frac{\partial T_{j_1}^{i_1}}{\partial x^k} S_{j_2}^{i_2} + \frac{\partial S_{j_2}^{i_2}}{\partial x^k} T_{j_1}^{i_1} + + T_{j_1}^{\alpha} S_{j_2}^{i_2}\Gamma_{\alpha k}^{i_1} + T_{j_1}^{i_1} S_{j_2}^{\alpha}\Gamma_{\alpha k}^{i_2} - T_{\alpha}^{i_1} S_{j_2}^{i_2}\Gamma_{j_1k}^{\alpha} - T_{j_1}^{i_1} S_{\alpha}^{i_2}\Gamma_{j_2k}^{\alpha} =$$
$$= S_{j_2}^{i_2}\Big(\frac{\partial T_{j_1}^{i_1}}{\partial x^k} + T_{j_1}^{\alpha}\Gamma_{\alpha k}^{i_1} - T_{\alpha}^{i_1}\Gamma_{j_1k}^{\alpha}\Big) + T_{j_1}^{i_1}\Big(\frac{\partial S_{j_2}^{i_2}}{\partial x^k} + S_{j_2}^{\alpha}\Gamma_{\alpha k}^{i_2} - S_{\alpha}^{i_2}\Gamma_{j_2k}^{\alpha}\Big) =$$
$$= S_{j_2}^{i_2}\nabla_k T_{j_1}^{i_1} + T_{j_1}^{i_1}\nabla_k S_{j_2}^{i_2},$$

что и требовалось.

Докажем теперь свойство (5). Для простоты, приведем соответствующую выкладку для случая тензорного поля T типа $(2,2)$ и свертки C_2^1. Пусть $(x^1,\dots,x^n)$ — некоторые локальные координаты, и $T_{j_1j_2}^{i_1i_2}$ — компоненты тензорного поля T в этих координатах. Сначала возьмем тензорное поле $C_2^1(T)$, компоненты которого имеют вид $T_{j_1\beta}^{\beta i_2}$ и ковариантно продифференцируем. Компоненты получающегося в результате тензорного поля типа $(1,2)$ имеют вид:

$$\nabla_k (C_2^1(T))_{j_1}^{i_2} = \frac{\partial T_{j_1\beta}^{\beta i_2}}{\partial x^k} + T_{j_1\beta}^{\beta\alpha}\Gamma_{\alpha k}^{i_2} - T_{\alpha\beta}^{\beta i_2}\Gamma_{j_1k}^{\alpha}.$$

С другой стороны, если мы сначала ковариантно продифференцируем тензорное поле T, а затем возьмем свертку, то компоненты полученного тензора будут иметь вид:

$$C_2^1(\nabla T)_{j_1k}^{i_2} = \nabla_k T_{j_1\beta}^{\beta i_2} == \frac{\partial T_{j_1\beta}^{\beta i_2}}{\partial x^k} + T_{j_1\beta}^{\alpha i_2}\Gamma_{\alpha k}^{\beta} + T_{j_1\beta}^{\beta\alpha}\Gamma_{\alpha k}^{i_2} - T_{\alpha\beta}^{\beta i_2}\Gamma_{j_1k}^{\alpha} - T_{j_1\alpha}^{\beta i_2}\Gamma_{\beta k}^{\alpha}.$$

Легко видеть, что последнее выражение совпадает с предыдущим. В общем случае выкладка аналогична: слагаемые, соответствующие сворачиваем индексам, сокращаются. Доказательство утверждения закончено.

Замечание. Иногда полезно записать правило Лейбница для ковариантного дифференцирования, не прибегая ни к координатам, ни к производной по направлению. Отметим, однако, что соотношение $\nabla(T \otimes S) = (\nabla T) \otimes S + T \otimes \nabla S$ места не имеет, так как нижний индекс, появляющийся при дифференцировании, расположен у первого и второго слагаемых в разных положениях. Верное равенство выглядит так:

$$\nabla(T \otimes S) = {}_{\pi}\big((\nabla T) \otimes S\big) + T \otimes \nabla S,$$

где π — перестановка, ставящая $(q+1)$-ый индекс на последнее место (здесь T — тензор типа (p, q)).

8.2. «Единственность» операции тензорного дифференцирования

Оказывается, свойства (1)–(5) из утверждения 8.1 в однозначно определяют «тензорное» дифференцирование тензорных полей любого типа на многообразии как ковариантное дифференцирование в некоторой аффинной связности. А именно, имеет место следующий результат.

Теорема 8.1. *Пусть M — гладкое многообразие. Пусть на тензорных полях на M определена операция ∇, удовлетворяющая свойствам (1)–(5) из утверждения 8.1*:

1) *Результат ∇T применения операции ∇ к тензорному полю ∇T типа (p, q) является тензорным полем типа $(p, q+1)$.*

2) *Операция ∇ линейна.*

3) *Результат применения операции ∇ к скалярной функции f совпадает с дифференциалом этой функции.*

4) *Операция ∇ удовлетворяет правилу Лейбница*:
$$\nabla(T \otimes S) = {}_{\pi}\big(\nabla T \otimes S\big) + T \otimes \nabla S,$$
где π — перестановка, ставящая $(q+1)$-ый индекс на последнее место (здесь T — тензор типа (p, q)).

5) *Операция ∇ перестановочна с операцией свертки.*

Тогда на M существует такая аффинная связность, что операция ∇ совпадает с операцией ковариантного дифференцирования относительно этой связности.

Доказательство. Нам нужно построить на многообразии M аффинную связность. Для этого мы рассмотрим произвольную систему $(x^1, \dots, x^n)$ локальных координат на M, заданную в окрестности U, возьмем вектор ∂_{x^i} из канонического базиса и продифференцируем с помощью имеющейся у нас операции ∇ векторное поле ∂_{x^i}, определенное в U. В результате у нас, по определению, получится тензорное поле типа $(1,1)$, которое в каждой точке окрестности U можно разложить по элементам $\partial_{x^\alpha} \otimes dx^\beta$ канонического базиса пространства тензоров $\mathbb{T}^1_1$. В итоге получим:

$$\nabla \partial_{x^i} = \Gamma^\alpha_{i\beta}\, \partial_{x^\alpha} \otimes dx^\beta,$$

где через $\Gamma^\alpha_{i\beta}$ обозначены гладко зависящие от $(x^1, \dots, x^n)$ коэффициенты этого разложения, определенные в окрестности U.

Пусть теперь в окрестности U имеются другие локальные координаты, которые мы обозначим через $(x^{1'}, \dots, x^{n'})$. Тогда в U соотношения

$$\nabla \partial_{x^{i'}} = \Gamma^{\alpha'}_{i'\beta'} \partial_{x^{\alpha'}} \otimes dx^{\beta'}$$

определяют другую систему гладких функций $\Gamma^{\alpha'}_{i'\beta'}$. Найдем связь между $\Gamma^{\alpha'}_{i'\beta'}$ и $\Gamma^\alpha_{i\beta}$. В силу свойств (3) и (4) операции ∇, получим:

$$\nabla \partial_{x^{i'}} = \nabla\Big(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \partial_{x^i}\Big) = \nabla\Big(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\Big) \otimes \partial_{x^i} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \nabla \partial_{x^i} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x^k}\big(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\big) dx^k \otimes \partial_{x^i} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \Gamma^\alpha_{i\beta} \partial_{x^\alpha} \otimes dx^\beta = \Big(\frac{\partial}{\partial x^\beta}\big(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}}\big) + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \Gamma^\alpha_{i\beta}\Big) \partial_{x^\alpha} \otimes dx^\beta$$

(здесь мы воспользовались, во-первых, тем, что если второй сомножитель в тензорном произведении $T \otimes S$ не имеет нижних индексов, то перестановка π из правила Лейбница (4) — тривиальна, и, во-вторых, коммутативностью тензорного произведения вектора и ковектора: $V \otimes \xi = \xi \otimes V$ для любых $V \in \mathbb{T}^1_0$ и $\xi \in \mathbb{T}^0_1$).

С другой стороны,

$$\nabla \partial_{x^{i'}} = \Gamma^{\alpha'}_{i'\beta'} \partial_{x^{\alpha'}} \otimes dx^{\beta'} = \Gamma^{\alpha'}_{i'\beta'} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta} \partial_{x^\alpha} \otimes dx^\beta,$$

поэтому можно приравнять коэффициенты при одинаковых базисных элементах:

$$\Gamma^{\alpha'}_{i'\beta'} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial}{\partial x^\beta}\Big(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}}\Big) + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \Gamma^\alpha_{i\beta}.$$

Перенося матрицы Якоби в одну сторону, получим:

$$\Gamma^{\alpha'}_{i'\beta'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial}{\partial x^\beta}\Big(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}}\Big) + \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \Gamma^\alpha_{i\beta}.$$

Поэтому, окончательно,

$$\Gamma^{\alpha'}_{i'\beta'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{i'} \partial x^{\beta'}} + \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{j}}{\partial x^{j'}} \Gamma^{\alpha}_{ji}.$$

Но последнее выражение — это в точности закон преобразования символов Кристоффеля аффинной связности. Итак, доказана следующая лемма.

Лемма 8.1. *В сделанных предположениях, соответствие, сопоставляющее каждым локальным координатам* $(x^1, \dots, x^n)$ *набор функций* $\Gamma^{\alpha}_{i\beta}$, *определенных из соотношений*

$$\nabla \partial_{x^i} = \Gamma^{\alpha}_{i\beta}\, \partial_{x^\alpha} \otimes dx^{\beta},$$

задает на многообразии M *некоторую аффинную связность.*

Теперь, после того как мы построили по операции ∇ аффинную связность на M, доказательство утверждения сводится к проверке того, что результат применения операции ∇ к произвольному тензорному полю совпадает с результатом ковариантного дифференцирования этого тензорного поля относительно построенной аффинной связности. Это можно сделать в три этапа.

1. Случай векторного поля. Пусть T — произвольное векторное поле на M. Тогда в локальных координатах $(x^1, \dots, x^n)$ поле T представимо в виде $T^i \partial_{x^i}$. Тогда

$$\begin{aligned} \nabla T &= \nabla\big(T^i \partial_{x^i}\big) = \nabla T^i \otimes \partial_{x^i} + T^i \nabla \partial_{x^i} = \\ &= \frac{\partial T^i}{\partial x^{\beta}} \partial_{x^i} \otimes dx^{\beta} + T^i \Gamma^{\alpha}_{i\beta} \partial_{x^\alpha} \otimes dx^{\beta} = \Big(\frac{\partial T^i}{\partial x^{\beta}} + T^k \Gamma^{i}_{k\beta}\Big) \partial_{x^i} \otimes dx^{\beta}. \end{aligned}$$

Но это в точности означает, что тензорное поле ∇T совпадает с тензорным полем, полученным ковариантным дифференцированием поля T в построенной нами аффинной связности Γ.

2. Случай ковекторного поля. Пусть теперь ξ — произвольное ковекторное поле. Рассмотрим на многообразии M локальные координаты $(x^1, \dots, x^n)$, и построим скалярную функцию, свернув ковектор ξ с координатным векторным полем ∂_{x^i}. Эта скалярная функция, очевидно, равна i-ой компоненте ξ_i ковектора ξ в координатах $(x^1, \dots, x^n)$. Тогда, в силу свойства (3) операции ∇ имеем:

$$\nabla\big(C^1_1(\xi \otimes \partial_{x^i})\big) = \nabla \xi_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial x^k} dx^k.$$

С другой стороны, в силу свойств (4) и (5) выражение слева можно переписать так:

$$\begin{aligned} \nabla\big(C^1_1(\xi \otimes \partial_{x^i})\big) &= C^1_1\big(\nabla(\xi \otimes \partial_{x^i})\big) = C^1_1\big(\nabla \xi \otimes \partial_{x^i}\big) + C^1_1\big(\xi \otimes \nabla \partial_{x^i}\big) = \\ &= C^1_1\big((\nabla \xi)_{\alpha\beta} dx^{\alpha} \otimes dx^{\beta} \otimes \partial_{x^i}\big) + C^1_1\big(\xi_k dx^k \otimes \Gamma^{\alpha}_{i\beta} \partial_{x^\alpha} \otimes dx^{\beta}\big). \end{aligned}$$

Выполнив операцию свертки, получим:

$$\nabla\big(C_1^1(\xi\otimes\partial_{x^i})\big) = (\nabla\xi)_{i\beta}dx^\beta + \Gamma^\alpha_{i\beta}\xi_\alpha dx^\beta.$$

Итак,

$$\frac{\partial\xi_i}{\partial x^\beta}dx^\beta = (\nabla\xi)_{i\beta}dx^\beta + \Gamma^\alpha_{i\beta}\xi_\alpha dx^\beta,$$

откуда

$$(\nabla\xi)_{i\beta} = \frac{\partial\xi_i}{\partial x^\beta} - \Gamma^\alpha_{i\beta}\xi_\alpha.$$

Таким образом, тензорное поле $\nabla\xi$ совпадает с результатом ковариантного дифференцирования ковекторного поля ξ относительно построенной аффинной связности. В частности, если $\xi = dx^i$ — базисный ковектор, то

$$\nabla dx^i = -\Gamma^i_{\alpha\beta}dx^\alpha\otimes dx^\beta.$$

3. Общий случай. Для завершения доказательства утверждения осталось убедиться в том, что результат применения операции ∇ к произвольному тензорному полю типа (p,q) совпадает с результатом ковариантного дифференцирования этого поля относительно построенной аффинной связности. Для этого достаточно представить тензорное поле T в карте с координатами $(x^1,\dots,x^n)$ в виде

$$T = T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\partial_{x^{i_1}}\otimes\dots\otimes\partial_{x^{i_p}}\otimes dx^{j_1}\otimes\dots\otimes dx^{j_q},$$

и воспользоваться правилом Лейбница и уже известным нам видом операции ∇ на векторах и ковекторах. Мы оставляем соответствующую выкладку в качестве обязательного упражнения. Теорема доказана.

Замечание. Теорему 8.1 можно рассматривать как некую теорему единственности тензорного дифференцирования. Фактически, она означает, что сложные и громоздкие свойства аффинной связности на самом деле вытекают из простых естественных предположений о свойствах (1)–(5) операций тензорного дифференцирования. Попросту говоря, если хотим эти простые свойства, значит, волей-неволей получаем некоторую аффинную связность, символы Кристоффеля и т.д. Подчеркнем однако, что аффинных связностей на каждом гладком многообразии много. Поэтому в заголовке данного пункта слово «единственность» стоит в кавычках.

8.3. Риманова связность

Аффинная связность на гладком многообразии — это некоторая дополнительная структура, которая, вообще говоря, никак не связана с другими структурами, возможно имеющимися на этом многообразии, такими например, как риманова метрика. Тем не менее, оказывается, что наличие метрики позволяет среди широкого класса аффинных связностей на многообразии выделить одну, которая, в некотором смысле, лучше всего ведет себя по отношению к метрике.

Определение. Пусть M — риманово многообразие с римановой метрикой g. Аффинная связность Γ на M называется *согласованной с метрикой* g, если ковариантная производная тензорного поля g относительно этой связности равна нулю: $\nabla g = 0$. Симметричная согласованная с метрикой аффинная связность называется *римановой.*

Теорема 8.2. *Пусть M — риманово многообразие с метрикой g. Тогда на M существует единственная риманова связность. Если на M фиксированы произвольные локальные координаты $(x^1, \dots, x^n)$, то символы Кристоффеля римановой связности могут быть вычислены так*:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{i\alpha} \Big(\frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{k\alpha}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\alpha} \Big).$$

Доказательство. Докажем сначала единственность римановой связности. Для этого предположим, что Γ — риманова связность, и вычислим ее символы Кристоффеля в локальных координатах $(x^1, \dots, x^n)$, исходя из равенства $\nabla g = 0$ и симметричности связности Γ. Последнее условие в локальных координатах переписывается в виде

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{\alpha j} \Gamma^\alpha_{ik} + g_{i\alpha} \Gamma^\alpha_{jk}.$$

Фиксировав произвольную тройку индексов (i, j, k), запишем систему уравнений, получающуюся из предыдущего равенства циклической перестановкой индексов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} &= g_{\alpha j} \Gamma^\alpha_{ik} + g_{i\alpha} \Gamma^\alpha_{jk} \\ \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} &= g_{\alpha k} \Gamma^\alpha_{ji} + g_{j\alpha} \Gamma^\alpha_{ki} \\ \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} &= g_{\alpha i} \Gamma^\alpha_{kj} + g_{k\alpha} \Gamma^\alpha_{ij}. \end{aligned}$$

Сложим первое и третье уравнения и вычтем из них второе. Тогда, так как $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$ в силу симметрии римановой связности, получим в итоге равенство

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} = 2 g_{i\alpha} \Gamma^\alpha_{jk},$$

справедливое для любых индексов (i, j, k). Таким образом, для каждой пары фиксированных индексов (j, k) и каждого индекса i, $1 \le i \le n$, мы имеем линейное уравнение на неизвестный вектор $(\Gamma^1_{jk}, \dots, \Gamma^n_{jk})$. Эти уравнения объединяются в систему линейных уравнений, причем матрица этой линейной системы — это невырожденная матрица $(g_{i\alpha})$ римановой метрики. Решая эту систему, т.е. умножая на матрицу $(g^{\alpha\beta})$ обратную к $(g_{i\alpha})$, получаем требуемое равенство. Итак, мы доказали, что если риманова связность существует, то ее компоненты однозначно вычисляются в локальных координатах через компоненты метрики, поэтому риманова связность единственна.

Докажем теперь существование римановой связности. Для этого сопоставим каждой локальной системе координат $(x^1, \dots, x^n)$ на M набор величин Γ^i_{jk}, имеющих вид

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{i\alpha} \Big(\frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{k\alpha}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\alpha} \Big).$$

Эти величины, очевидно, симметричны по нижним индексам. Поэтому, в силу транзитивности закона преобразования символов Кристоффеля, в каждой карте мы, тем самым, задали некоторую симметричную связность. Более того, каждая построенная связность является римановой, так как $\nabla g = 0$ в силу выбора символов Кристоффеля. Осталось проверить, что связности из разных карт согласованы, т.е. связаны по закону преобразования символов Кристоффеля.

Пусть $(x^{1'}, \dots, x^{n'})$ и $(x^1, \dots, x^n)$ — системы локальных координат двух пересекающихся карт U' и U соответственно. Рассмотрим в пересечении $U \cap U'$ две системы функций от координат $(x^1, \dots, x^n)$: компоненты $\{\Gamma^i_{jk}\}$ римановой связности, построенной нами в карте U, и функции

$$\Delta^i_{jk} = \Gamma^{i'}_{j'k'} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 x^{j'}}{\partial x^j \partial x^k} \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}},$$

пересчитанные из компонент $\{\Gamma^{i'}_{j'k'}\}$ римановой связности, построенной нами в карте U', по правилам преобразования символов Кристоффеля. Но так как соотношение $\nabla g = 0$ является тензорным, оно справедливо в области $U \cap U'$ как в координатах $(x^1, \dots, x^n)$, так и в координатах $(x^{1'}, \dots, x^{n'})$, откуда вытекает, что функции Δ^i_{jk} являются компонентами римановой связности в координатах $(x^1, \dots, x^n)$, и, в силу уже доказанной единственности, совпадают с Γ^i_{jk}, что и требовалось. Утверждение доказано.

Замечание. В дальнейшем, говоря о ковариантном дифференцировании на римановом многообразии мы всегда, если не оговорено противное, будем иметь ввиду ковариантное дифференцирование относительно римановой связности.

Пример. Пусть $M = \mathbb{R}^n$ и $(z^1, \dots, z^n)$ — евклидовы координаты. Компоненты евклидовой метрики в них постоянны и равны δ_{ij}. Поэтому компоненты символов Кристоффеля соответствующей римановой связности в координатах $(z^1, \dots, z^n)$ равны нулю. Из формул преобразования компонент символов Кристоффеля вытекает, что построенная связность совпадает с уже известной нам евклидовой связностью в $\mathbb{R}^n$.

Пример. Пусть $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — регулярная гиперповерхность в $\mathbb{R}^{n+1}$. Для касательных векторных полей на M определим операцию ковариантного дифференцирования по i-ой координате на поверхности так:

$$\nabla_i X = \left(\frac{\partial X}{\partial u^i}\right)^T,$$

где X — касательное векторное поле, и через $(\cdot)^T$ обозначена операция ортогонального проецирования на касательную плоскость к поверхности. Из материала прошлого семестра (деривационные формулы) вытекает, что эта операция является ковариантным дифференцированием относительно римановой связности, порожденной на поверхности M индуцированной метрикой (т.е. первой квадратичной формой).

В дальнейшем нам также будет полезно следующее утверждение.

Лемма 8.2. *Пусть X, Y и Z — произвольные векторные поля на римановом многообразии M, и ∇ — ковариантное дифференцирование относительно римановой связности на M. Тогда*

$$\nabla_X \langle Y, Z\rangle = \big\langle \nabla_X Y, Z\big\rangle + \big\langle Y, \nabla_X Z\big\rangle.$$

Доказательство. Действительно, если $(x^1, \dots, x^n)$ — произвольные локальные координаты, то

$$\nabla_X \langle Y, Z\rangle = X^k \nabla_k (g_{ij} Y^i Z^j).$$

Воспользовавшись формулой Лейбница, получим

$$\nabla_X \langle Y, Z\rangle = X^k \big(\nabla_k (g_{ij}) Y^i Z^j + g_{ij} \nabla_k (Y^i) Z^j + g_{ij} Y^i \nabla_k (Z^j)\big).$$

Первое слагаемое в этой сумме равно нулю в силу согласованности связности Γ с метрикой, поэтому окончательно:

$$\nabla_X \langle Y, Z\rangle = g_{ij}\big(X^k \nabla_k Y^i\big) Z^j + g_{ij} Y^i \big(X^k \nabla_k Z^j\big) = \big\langle \nabla_X Y, Z\big\rangle + \big\langle Y, \nabla_X Z\big\rangle.$$

Лемма доказана.

Из теоремы 8.2 и теоремы Уитни вытекает следующий важный результат.

Теорема 8.3. *Пусть M — произвольное (компактное) гладкое многообразие. Тогда на M существует аффинная связность.*

Доказательство. Действительно, с помощью теоремы Уитни многообразие M можно вложить в $\mathbb{R}^N$ для подходящего N. Тогда многообразие M можно превратить в риманово, введя на нем индуцированную из $\mathbb{R}^N$ метрику. Но теперь, воспользовавшись теоремой 8.2, можно ввести на M риманову связность, которая, конечно, является аффинной связностью. Теорема доказана.

8.4. Евклидовы координаты для метрики

В предыдущей лекции мы определили евклидовы координаты на многообразии в терминах аффинной связности. На римановом многообразии это можно сделать с помощью римановой метрики.

Определение. Пусть M — риманово многообразие с метрикой g. Локальные координаты $(x^1, \dots, x^n)$ на M называются *евклидовыми относительно метрики* g, если в этих координатах компоненты метрики g постоянны.

Ясно, что если $(x^1, \dots, x^n)$ — евклидовы координаты на M, то от них линейной заменой можно перейти к координатам, в которых компоненты метрического тензора равны δ_{ij}.

Утверждение 8.2. *Система координат $(x^1, \dots, x^n)$ на римановом многообразии M с метрикой g является евклидовой относительно метрики g, если и только если она является евклидовой относительно римановой связности Γ на многообразии M.*

Доказательство. Действительно, из явного вида символов Кристоффеля римановой связности вытекает, что если координаты $(x^1, \dots, x^n)$ евклидовы для метрики, то символы Кристоффеля в этих координатах тождественно равны нулю, так как компоненты метрического тензора в координатах $(x^1, \dots, x^n)$ постоянны. Обратно, если $\Gamma^i_{jk}(x^1, \dots, x^n) = 0$, то условие римановости связности Γ записывается в виде

$$(\nabla g)_{ijk} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 0,$$

что означает постоянность компонент метрического тензора в координатах $(x^1, \dots, x^n)$. Утверждение доказано.

Задачи

Задача 8.1. Показать, что функции

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{i\alpha} \left(\frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{k\alpha}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\alpha} \right).$$

при замене координат преобразуются как символы Кристоффеля, пользуясь только тензорным законом.

Задача 8.2. Пусть M — риманово многообразие, и T — произвольное векторное поле на M. Определим скалярную функцию, называемую *дивергенцией* $\operatorname{div} T$ поля T, положив

$$\operatorname{div} T = C^1_1 \nabla T.$$

Показать, что в произвольных локальных координатах $(x^1, \dots, x^n)$ имеет место равенство

$$\operatorname{div} T = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} T^i}{\partial x^i} = \frac{\partial T^i}{\partial x^i} + T^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\ln \sqrt{g} \right),$$

где через g обозначен определитель матрицы римановой метрики. Сравнить это определение с определением, данным выше для векторных полей в $\mathbb{R}^3$.

Дополнительный материал

8.1. Риманова связность индуцированной метрики. Пусть W — произвольное риманово многообразие, и $\bar{\nabla}$ — операция ковариантного дифференцирования относительно римановой связности на W. Далее, пусть M — подмногообразие в W, на котором рассматривается индуцированная из W риманова метрика, и ∇ — ковариантное дифференцирование относительно римановой связности на M.

Утверждение 8.3. *В сделанных обозначениях, для произвольных касательных векторных полей X и Y на M имеет место равенство*

$$\nabla_X Y = \left(\bar{\nabla}_X Y\right)^T,$$

где через $(\cdot)^T$ обозначена операция ортогонального проецирования пространства $T_P W$ на подпространство $T_P M$ (в метрике многообразия W).

Доказательство. Рассмотрим на многообразии M операцию тензорного дифференцирования, обладающую свойствами (1)–(5) из теоремы 8.1, которая на векторных полях определяется формулой

$$\nabla_X Y = \left(\bar{\nabla}_X Y\right)^T.$$

По теореме 8.1, в результате получится операция ковариантного дифференцирования в некоторой аффинной связности. Покажем, что это — риманова связность на M.

Лемма 8.3. *Предположим, что на римановом многообразии M задана такая аффинная связность Γ, что для произвольных векторных полей X, Y и Z на M выполнено*

$$\nabla_X\langle Y,Z\rangle = \langle\nabla_X Y,Z\rangle + \langle Y,\nabla_X Z\rangle.$$

Тогда связность Γ согласована с метрикой, т.е. $\nabla g = 0$.

Доказательство. Действительно, по условию, для произвольных векторных полей X, Y и Z, имеем

$$X^k\nabla_k(g_{ij})Y^iZ^j = \nabla_X\langle Y,Z\rangle - -g_{ij}\nabla_k(Y^i)Z^j - g_{ij}Y^i\nabla_k(Z^j) = 0,$$

откуда $\nabla g = 0$, что и требовалось.

Рассмотрим произвольные поля X, Y и Z на $M\subset W$, и продолжим их в малую окрестность $U\subset W$ произвольным образом. Тогда в этой окрестности

$$\bar{\nabla}_X\langle Y,Z\rangle = \langle\bar{\nabla}_X Y,Z\rangle + \langle Y,\bar{\nabla}_X Z\rangle.$$

Но $\bar{\nabla}_X\langle Y,Z\rangle = \nabla_X\langle Y,Z\rangle = X\big(\langle Y,Z\rangle\big)$. Далее, каждый вектор $A\in T_PW$ можно однозначно разложить в сумму его ортогональной проекции $(A)^T$ на подпространство T_PM и нормальной составляющей, поэтому для произвольных векторов $A\in T_PW$ и $B\in T_PM$ выполнено равенство $\langle A,B\rangle = \big\langle (A)^T,B\big\rangle$. Итак,

$$\nabla_X\langle Y,Z\rangle = \Big\langle\left(\bar{\nabla}_X Y\right)^T,Z\Big\rangle + \Big\langle Y,\left(\bar{\nabla}_X Z\right)^T\Big\rangle = \langle\nabla_X Y,Z\rangle + \langle Y,\nabla_X Z\rangle,$$

поэтому, по лемме 8.3, построенная связность согласована с метрикой. Симметричность построенной связности также вытекает из симметричности римановой связности на W. Доказательство закончено.

Лекция 9. Параллельный перенос и геодезические

В данной лекции мы рассмотрим два важных приложения аффинной связности: параллельный перенос, позволяющий сравнивать значение тензорного поля в *разных* точках многообразия, и геодезические — аналог геодезических на поверхностях.

9.1. Параллельный перенос

Во многих конкретных задачах возникает необходимость сравнивать тензоры, определенные в разных точках гладкого многообразия. Даже такое естественное выражение как «скорость движения материальной точки по кривой постоянна» означает, что мы каким-то образом сравниваем касательные векторы в разных точках кривой, т.е. элементы разных касательных пространств к многообразию. В случае евклидового пространства $\mathbb{R}^n$ мы на интуитивном уровне отождествляем все касательные пространства с самим пространством $\mathbb{R}^n$. Другими словами, мы совмещаем начала координат всех этих линейных пространств, выполняя «параллельный перенос в $\mathbb{R}^n$», т.е. сдвиг пространства на фиксированный вектор. Возникает естественное желание обобщить понятие параллельного переноса на случай произвольного гладкого многообразия. Для этого рассмотрим сначала постоянное векторное поле T на $\mathbb{R}^n$. Его значения в разных точках пространства $\mathbb{R}^n$ одинаковы и получаются друг из друга параллельным переносом в $\mathbb{R}^n$. Ясно, что поле на R^n постоянно, если и только если его компоненты не зависят от координат, т.е. $\dfrac{\partial T^i}{\partial x^j} = 0$, где $(x^1, \dots, x^n)$ — стандартные координаты в $\mathbb{R}^n$, а T^i — компоненты поля T в этих координатах. Оказывается, это свойство можно естественно обобщить на случай многообразий с аффинной связностью, используя ковариантное дифференцирование.

Пусть M — связное гладкое многообразие с аффинной связностью Γ. Пусть γ — гладкая кривая на M. Говорят, что тензорное поле T на *M параллельно вдоль кривой γ относительно аффинной связности* Γ, если $\nabla_{\gamma'} T = 0$. Ниже, для сокращения формул, мы рассматриваем случай векторного поля, хотя все приведенные ниже результаты остаются справедливыми и в общем случае, после надлежащей переформулировки.

Пусть $(x^1, \dots, x^n)$ — локальные координаты на M, и $x^i(t)$, $i = 1, \dots, n$ — координатное представление кривой γ в этих координатах. Тогда условие параллельности векторного поля T вдоль γ записывается в этих координатах так:

$$0 = (\nabla_{\gamma'} T)^i = \frac{dx^\alpha}{dt} \nabla_\alpha T^i = \frac{dx^\alpha}{dt} \Big(\frac{\partial T^i}{\partial x^\alpha} + T^\beta \Gamma^i_{\beta\alpha} \Big) = \frac{dT^i}{dt} + T^\beta \Gamma^i_{\beta\alpha} \frac{dx^\alpha}{dt}.$$

Итак, доказана следующая лемма.

Лемма 9.1. *Векторное поле T параллельно вдоль кривой γ на многообразии M с аффинной связностью Γ если и только если в любой локальной системе координат компоненты поля T, ограниченные на кривую γ, удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений*:

$$\frac{dT^i}{dt} + T^\beta \Gamma^i_{\beta\alpha} \frac{dx^\alpha}{dt} = 0, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Система уравнений из леммы 9.1 называется *уравнениями параллельного переноса.* Отметим, что это — система линейных дифференциальных уравнений первого порядка на неизвестные функции $T^i(t)$.

Определим теперь операцию параллельного переноса вектора вдоль кривой. Пусть P и Q — произвольные точки связного гладкого многообразия M с аффинной связностью Γ. Рассмотрим на M произвольную гладкую кривую $\gamma\colon [0,1] \to M$, такую что $\gamma(0) = P$, и $\gamma(1) = Q$, и пусть $a \in T_PM$ — произвольный касательный вектор в точке P к многообразию M. Запишем систему уравнений параллельного переноса вдоль γ (мы для простоты предполагаем, что вся кривая γ лежит в одной карте с локальными координатами $(x^1, \dots, x^n)$)

$$\frac{dT^i}{dt} + T^\beta \Gamma^i_{\beta\alpha} \frac{dx^\alpha}{dt} = 0, \qquad i = 1, \dots, n,$$

и рассмотрим для этой системы уравнений задачу Коши с начальными условиями $T^i(0) = a^i$. Как известно из теории обыкновенных дифференциальных уравнений, на отрезке $[0,1]$ существует единственное решение $T(t)$ этой задачи Коши. В частности, определен вектор $b = T(1) \in T_QM$.

Определение. В сделанных обозначениях, вектор b называется *результатом параллельного переноса вектора a из точки P в точку Q вдоль кривой γ относительно аффинной связности* Γ.

Замечание. Мы определили операцию параллельного переноса по гладкой кривой, лежащей в одной карте. Однако, эта операция легко обобщается на случай кусочно гладкой кривой, лежащей в нескольких картах (всегда можно предполагать, что таких карт конечное число). А именно, нужно последовательно переносить вектор по лежащим в одной карте гладким участкам, беря в качестве следующего начального условия результат предыдущего перенесения.

Упражнение 9.1. Как зависит операция параллельного переноса от замены параметризации кривой?

Из линейности системы уравнений параллельного переноса, единственности решения задачи Коши для нее и леммы 7.6 и предыдущего упражнения вытекает следующий результат.

Утверждение 9.1. *Каждая кривая γ, соединяющая точки P и Q гладкого многообразия M с аффинной связностью, определяет отображение $\mathcal{A}_\gamma$ касательного пространства $T_P M$ в касательное пространство $T_Q M$, переводящее вектор a из $T_P M$ в вектор $b \in T_Q M$, являющийся результатом параллельного переноса вдоль кривой γ. Отображение $\mathcal{A}_\gamma$ линейно, невырождено и не зависит от параметризации кривой γ.*

Замечание. Операция параллельного перенесения существенно зависит от кривой, вдоль которой эта операция выполняется. Это естественно для случая многообразий. Действительно, если бы например на сфере S^2 существовала бы некая естественная операция параллельного перенесения векторов, не зависящая от кривой, то можно было бы легко построить на S^2 гладкое касательное векторное поле не обращающееся в нуль ни в одной точке сферы («причесать ежика без пробора»). Последнее невозможно (см. теорему 13.3).

Упражнение 9.2. Запишите уравнения параллельного переноса для случая произвольного тензорного поля, сформулируйте и докажите аналог утверждения 9.1.

9.2. Параллельный перенос в римановой связности

Параллельный перенос в римановой связности обладает рядом интересных дополнительных свойств.

Утверждение 9.2. *Пусть M — риманово многообразие с соответствующей римановой связностью, и $\gamma(t)$ — некоторая гладкая кривая, соединяющая пару точек из M. Тогда операция параллельного переноса вдоль γ сохраняет скалярное произведение векторов: если $a(t)$ и $b(t)$ — параллельные вдоль γ векторные поля на M, то $\big\langle a(t), b(t)\big\rangle = \mathrm{const}$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(t) = \langle a(t), b(t)\rangle$, определенную на кривой γ. Тогда, в силу леммы 8.2 и параллельности полей a и b имеем:

$$\frac{df}{dt} = \nabla_{\gamma'}\langle a, b\rangle = \big\langle \nabla_{\gamma'} a, b\big\rangle + \big\langle a, \nabla_{\gamma'} b\big\rangle = 0,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 9.1. *Пусть γ — гладкая кривая, соединяющая пару точки P и Q на римановом многообразии M. Тогда линейное отображение $\mathcal{A}_\gamma\colon T_P M \to T_Q M$, задаваемое операцией параллельного переноса вдоль γ относительно римановой связности, является ортогональным, т.е. сохраняет скалярное произведение, заданное в касательных пространствах римановой метрикой.*

Для осуществления параллельного переноса часто полезным оказывается следующее очевидное утверждение.

Утверждение 9.3. *Изометрии переводят параллельные векторные поля в параллельные. А именно, пусть $F\colon M \to N$ — изометрия римановых многообразий, γ — кривая на M, соединяющая точки P и Q, и $\tilde{\gamma} = F \circ \gamma$ — образ кривой γ на многообразии N. Если T — параллельное вдоль γ векторное поле на M, то $dF(T)$ — параллельное вдоль $\tilde{\gamma}$ векторное поле на N.*

Доказательство. Это очевидно, так как изометрия не меняет метрический тензор, и, следовательно, не меняет уравнения параллельного переноса.

9.3. Определение и простейшие свойства геодезических

Прямые в евклидовом пространстве и геодезических на поверхностях, рассмотренные нами в прошлом семестре, обладают следующим общим свойством: (ковариантная) производная вектора скорости такой кривой вдоль нее самой равна нулю. Это свойство легко переносится на случай многообразий с аффинной связностью.

Определение. Пусть M — гладкое многообразие с аффинной связностью Γ, и ∇ — соответствующее ковариантное дифференцирование. Гладкая кривая γ называется *геодезической на M в связности* Γ, если во всех точках кривой γ выполнено следующее равенство: $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$, т.е. поле скорости γ' кривой γ параллельно вдоль самой кривой γ относительно связности Γ.

Пусть $(x^1, \dots, x^n)$ — локальные координаты на многообразии M, и $x^i(t)$, $i = 1, \dots, n$, — координатное представление кривой γ. Тогда, условие $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$ можно записать так:

$$(\nabla_{\gamma'}\gamma')^i = \frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dx^\beta}{dt} = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

(сравните с уравнениями параллельного переноса). Полученная система уравнений называется *уравнениями геодезических в связности* Γ. Отметим, что точно такая же система уравнений уже выписывалась нами в случае поверхностей. В частности, мы уже знаем следующее свойство решений этой системы.

Утверждение 9.4. *Пусть $\gamma(t)$ — геодезическая, и $t = t(s)$ — замена параметра кривой γ. Кривая $\tilde{\gamma}(s) = \gamma\big(t(s)\big)$ снова будет геодезической, если и только если эта замена линейна, т.е. $t(s) = a\,s + b$, где a, $b \in \mathbb{R}$.*

Далее, как и в случае поверхностей, уравнения геодезических представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Поэтому для них справедлива стандартная теорема существования и единственности решения задачи Коши. Из этой теоремы немедленно вытекает теорема существования и единственности геодезической на многообразии.

Следствие 9.2. *Пусть M — гладкое многообразие с аффинной связностью, P — произвольная точка из M, и $V \in T_PM$ — произвольный касательный вектор к M в точке P. Тогда на M существует геодезическая γ, выходящая из P и такая, что ее вектор скорости в точке P равен V. Более того, такая геодезическая γ единственна в том смысле, что любые две такие геодезических совпадают в пересечении областей определения.*

Пусть теперь M — риманово многообразие с метрикой g, и Γ — риманова связность на M. Геодезические в римановой связности обладают рядом интересных свойств, аналогичных свойствам геодезических на поверхностях. Когда говорят о геодезических на римановом многообразии, то, обычно, имеют ввиду геодезические относительно римановой связности.

Следующие свойства геодезических на римановых многообразиях доказывается точно также, как соответствующие свойства геодезических на поверхностях.

Утверждение 9.5. *Пусть γ — геодезическая на римановом многообразии M. Тогда модуль ее вектора скорости γ' не зависит от t. Если $F\colon M \to N$ — изометрия римановых многообразий, то F переводит геодезические в геодезические.*

Следующий результат позволяет иногда находить геодезические не решая дифференциальных уравнений.

Следствие 9.3. *Пусть существует такая изометрия $\nu\colon M \to M$ риманова многообразия M, что множество ее неподвижных точек представляет собой регулярную кривую γ. Тогда γ — геодезическая (после подходящей перепараметризации).*

Доказательство. Действительно, пусть $P = \gamma(t_0)$ — произвольная точка из γ, и $\xi = \dot\gamma(t_0) \neq 0$ — вектор скорости кривой γ в точке P. Рассмотрим геодезическую $\gamma_1(s)$, такую что $\gamma_1(s_0) = P$ и $\dot\gamma_1(s_0) = \xi$. Так как γ — множество неподвижных точек изометрии ν, то изометрия сохраняет точку P и вектор ξ. Поэтому образ $\gamma_2 = \nu(\gamma_1)$ геодезической γ_1 — это геодезическая, проходящая через ту же точку P с тем же вектором скорости ξ. Теорема существования и единственности дает $\gamma_2 = \gamma_1$ (в некоторой окрестности параметра t_0), откуда образ γ_1 принадлежит образу γ. Поэтому в окрестности каждой точки кривая γ, после соответствующей перепараметризации, является геодезической. Доказательство закончено.

Пример. Проверим с помощью следствия 9.3, что на плоскости Лобачевского геодезическими являются прямые Лобачевского и только они. Рассмотрим модель Пуанкаре. Напомним, что для каждой прямой ℓ на плоскости Лобачевского существует изометрия φ_ℓ, переводящая ее в прямую $y=0$. Преобразование $\nu\colon z=x+iy\mapsto\bar z=x-iy$ является изометрией, и прямая $y=0$ — это множество всех неподвижных точек изометрии ν. Композиция $\varphi_\ell^{-1}\circ\nu\circ\varphi_\ell$ — это изометрия, множество неподвижных точек которой совпадает с прямая ℓ, что и требовалось.

Аналогично проверяется, что геодезические на сфере S^n — это большие круги *(*сечения двумерными плоскостями, проходящими через центр*)* и только они (укажите соответствующие изометрии).

Параллельный перенос вдоль геодезической на римановом многообразии обладает следующим свойством, особенно полезным в двумерном случае.

Утверждение 9.6. *Если a — параллельное векторное поле вдоль γ, то угол между векторами $a(t)$ и $\gamma'(t)$ не зависит от t.*

Доказательство. Покажем, что функция $f(t)=\big\langle a(t),\gamma'(t)\big\rangle$, определенная вдоль кривой γ, постоянна. Действительно,

$$\frac{df}{dt}=\nabla_{\gamma'}\big\langle a(t),\gamma'(t)\big\rangle=\big\langle\nabla_{\gamma'}a(t),\gamma'(t)\big\rangle+\big\langle a(t),\nabla_{\gamma'}\gamma'(t)\big\rangle=0,$$

где первое слагаемое равно нулю по определению параллельного векторного поля, а второе — по определению геодезической. Кроме того, модули векторных полей $a(t)$ и $\gamma'(t)$ постоянны, откуда и вытекает требуемое. Доказательство закончено.

Следствие 9.4. *Пусть M^2 — ориентируемое риманово двумерное многообразие, и γ — геодезическая на M, соединяющая точки P и Q. Тогда вектор $b\in T_QM$ является результатом параллельного переноса вектора $a\in T_PM$ вдоль γ, если и только если $||a||=||b||$, угол между a и $\gamma'(P)$ равен углу между b и $\gamma'(Q)$, и ориентации базисов $\big(\gamma'(P),a\big)$ и $\big(\gamma'(Q),b\big)$ согласованы.*

9.4. Нормальные координаты

На произвольном многообразии M с аффинной связностью с помощью геодезических можно определить так называемые *нормальные координаты*, которые оказываются удобными для многих вычислений. Пусть P — произвольная точка многообразия M, и V — произвольный вектор из касательного пространства T_PM к M в точке P. Тогда, в силу следствия 9.2, существует и единственна геодезическая $\gamma_V(s)$, удовлетворяющая начальным условиям $\gamma_V(0)=P$ и $\gamma'_V(0)=V$ (здесь штрихом обозначено дифференцирование по s).

Определим *экспоненциальное отображение* $\exp_P$ некоторой окрестности нулевого вектора касательного пространстве T_PM в многообразие M так:

$$\exp_P \colon V \mapsto \gamma_V(1).$$

Ясно, что отображение $\exp_P$ — гладкое в области определения (в силу теоремы о гладкой зависимости решения задачи Коши от начальных условий). Оказывается, отображение $\exp_P$ является также регулярным в некоторой окрестности нуля.

Утверждение 9.7. *Пусть P — произвольная точка многообразия M с аффинной связностью. Тогда отображение $\exp_P$ задает локальные координаты в некоторой окрестности точки P. Другими словами, отображение $\exp_P$ гладко и взаимно однозначно отображает некоторую окрестность нуля из T_PM на окрестность точки P в M, причем матрица Якоби этого отображения невырождена.*

Доказательство. Для доказательства утверждения достаточно проверить, что матрица Якоби отображения $\exp_P$ невырождена в точке 0 из T_PM. Действительно, если это так, то матрица Якоби невырождена и в некоторой окрестности нуля, и тогда утверждение вытекает из теоремы о неявной функции.

Итак, по определению, $\exp_P(V) = \gamma_V(1)$. Фиксируем в окрестности точки P какие-нибудь координаты $(x^1, \dots, x^n)$, и пусть $x^i(s, V)$ — координатное представление геодезической $\gamma_V(s)$. Если мы фиксируем какой-нибудь базис в T_PM, и в этом базисе $V = (v^1, \dots, v^n)$, то координатное представление отображения $\exp_P$ в координатах $(v^1, \dots, v^n)$ на T_PM и $(x^1, \dots, x^n)$ на M имеет, очевидно, вид

$$x^i = x^i(1, V) = x^i(1, v^1, \dots, v^n).$$

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 9.2. *Пусть t — произвольное достаточно малое вещественное число. Тогда*

$$\gamma_{tV}(s) = \gamma_V(t\,s)$$

в общей области определения.

Доказательство. При фиксированном t, вектор скорости геодезической $\gamma_V(t\,s)$ в точке $P = \gamma_V(0)$ имеет вид

$$\left.\frac{d\gamma_V(t\,s)}{ds}\right|_{s=0} = \dot\gamma_V(0)t = t\,V,$$

поэтому геодезическая $\gamma_V(t\,s)$ удовлетворяет тем же начальным условиям, что и геодезическая $\gamma_{tV}(s)$. Теперь утверждение леммы вытекает из следствия 9.2.

Вернемся к доказательству утверждения. Поскольку, в силу леммы 9.2, $\gamma_{tV}(s) = \gamma_V(t\,s)$, в координатах имеем

$$x^i(s, tV) = x^i(s\,t, V), \tag{$*$}$$

Продифференцируем соотношение $(*)$ по t и положим $t = 0$. Дифференцируя левую часть, получим:

$$\left.\frac{\partial x^i(s,tV)}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial x^i(s,tV)}{\partial v^j}\right|_{t=0} v^j = \frac{\partial x^i(s,0)}{\partial v^j} v^j.$$

С другой стороны, дифференцируя правую часть соотношения $(*)$, имеем:

$$\left.\frac{\partial x^i(s\,t,V)}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial x^i(s\,t,V)}{\partial s}\right|_{t=0} s = \frac{\partial x^i(0,V)}{\partial s} s = s\big(\dot\gamma_V(0)\big)^i = s\,v^i.$$

Приравняв полученные выражения и положив в них $s = 1$, получим окончательно:

$$\frac{\partial x^i(1,0)}{\partial v^j} v^j = v^i$$

для произвольного вектора V. Поэтому матрица Якоби $\left(\dfrac{\partial x^i(1,0)}{\partial v^j}\right)$ отображения $\exp_P$ в точке $V = 0$ равна единичной матрице и, в частности, невырождена. Утверждение доказано.

Определение. Пусть в касательном пространстве T_PM к многообразию M с аффинной связностью Γ фиксирован произвольный базис (e_i), и $(v^1, \dots, v^n)$ — линейные координаты в T_PM, соответствующие этому базису. Локальные координаты в окрестности точки P на M, порожденные отображением

$$V = (v^1, \dots, v^n) \mapsto \exp_P(V),$$

называются *нормальными координатами с центром в точке P, порожденными базисом* (e_i). Сама окрестность точки P, в которой заданы нормальные координаты, а также соответствующая окрестность точки 0 в T_PM, называется *нормальной окрестностью.* Геодезические γ_V называют *радиальными.* Если многообразие M и связность Γ римановы, то базис (e_i), обычно, выбирают ортонормированным.

Из взаимной однозначности отображения $\exp_P$ в некоторой окрестности точки P вытекает следующий результат.

Следствие 9.5. *Любые две достаточно близкие точки многообразия с аффинной связностью можно соединить геодезической.*

Упражнение 9.3. Пусть $\gamma_V(t)$, $t \in [0,1]$, — радиальная геодезическая на римановом многообразии. Рассмотрим отрезок γ этой геодезической, соответствующий значениям параметра $t \in [t_1, t_2] \subset [0,1]$. Вычислите длину кривой γ.

Задачи

Задача 9.1. Показать, что если в некоторой связности Γ, заданной на римановом многообразии M, параллельный перенос вдоль любой кривой сохраняет скалярные произведения векторов, то связность Γ — риманова.

Задача 9.2. Описать геодезические на прямом цилиндре, круговом конусе, стандартной сфере, плоскости Лобачевского.

Задача 9.3. Проверить, что если гиперповерхность $M \subset \mathbb{R}^n$ содержит некоторую прямую $\ell \subset \mathbb{R}^n$, то, после перепараметризации, прямая $\ell \subset M$ является геодезической на M.

Задача 9.4. Построить нормальные координаты на стандартной двумерной сфере. Как устроена максимальная нормальная окрестность точки сферы?

Задача 9.5. Пусть M — риманово многообразие, g — риманова метрика на нем, и P — произвольная его точка. Фиксируем в касательном пространстве T_PM ортонормированный базис, и пусть $(y^1, \dots, y^n)$ — соответствующие нормальные координаты в окрестности точки P на M. Показать, что в этих координатах $g_{ij}(P) = \delta_{ij}$ и $\Gamma^i_{jk}(P) = 0$.

Задача 9.6. Пусть $SL(n) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ — множество вещественных $(n \times n)$ матриц с единичным определителем. Описать геодезические на $SL(n)$, проходящие через точку $E \in SL(n)$, где E — единичная матрица. Тот же вопрос для $SO(n)$.

Дополнительный материал

9.1. Пример параллельного переноса на плоскости Лобачевского. Рассмотрим модель верхней полуплоскости плоскости Лобачевского L^2, на которой в стандартных координатах (x, y) задана метрика Лобачевского $ds^2 = (dx^2+dy^2)/y^2$. Пусть γ — гладкая кривая, заданную параметрически так: $x(t) = t$, $y(t) = y_0 > 0$ (это — горизонтальная прямая). Выпишем уравнения параллельного переноса вдоль кривой γ в римановой связности. Символы Кристоффеля римановой связности в нашем случае, как легко сосчитать, имеют вид:

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{22} = -\Gamma^2_{11} = -\frac{1}{y}, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{22} = 0.$$

Поэтому уравнения параллельного переноса на компоненты (T^1, T^2) поля T имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dT^1}{dt} + T^\alpha \Gamma^1_{\alpha\beta} \dfrac{dx^\beta}{dt} = \dfrac{dT^1}{dt} - \dfrac{1}{y}\left(T^1 \dfrac{dy}{dt} + T^2 \dfrac{dx}{dt}\right) = 0, \\ \dfrac{dT^2}{dt} + T^\alpha \Gamma^2_{\alpha\beta} \dfrac{dx^\beta}{dt} = \dfrac{dT^2}{dt} + \dfrac{1}{y}\left(T^1 \dfrac{dx}{dt} - T^2 \dfrac{dy}{dt}\right) = 0. \end{cases}$$

После подстановки конкретного вида кривой $\gamma(t) = \{t, y_0\}$, получим:

$$\begin{cases} \dfrac{dT^1}{dt} = \dfrac{1}{y_0} T^2, \\ \dfrac{dT^2}{dt} = -\dfrac{1}{y_0} T^1. \end{cases}$$

Эта система линейных дифференциальных уравнений легко решается. Ответ можно записать в следующем виде:

$$T^1(t) = A\cos(t/y_0) + B\sin(t/y_0), \qquad T^2(t) = -A\sin(t/y_0) + B\cos(t/y_0).$$

Таким образом, параллельное вдоль кривой γ векторное поле равномерно вращается, причем тем быстрее, чем меньше y_0, т.е. чем горизонтальная прямая γ расположена «ближе» к абсолюту.

9.2. Еще примеры параллельного переноса. Следующие несколько примеров демонстрируют стандартные методы, часто позволяющие вычислять результат параллельного переноса, не решая дифференциальные уравнения.

Пусть M — поверхность кругового конуса, заданная в $\mathbb{R}^3$ уравнением $x^2+y^2=z^2$, где $z>0$. Обозначим через γ плоское сечение конуса M плоскостью $z=h>0$. Пусть V — касательный вектор к конусу в точке $P\in\gamma$, направленный к его вершине. На какой угол повернется вектор V при параллельном переносе по кривой γ от P до P?

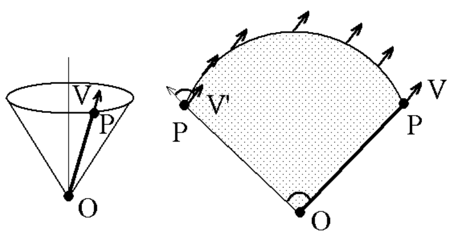

Рис. 3. Развертка конуса на плоскость и параллельный перенос

Чтобы выяснить это, воспользуемся утверждением 9.3. Конус M, после разрезания по лучу OP, см. рис. 3, изометричен углу POP на евклидовой плоскости. На евклидовой плоскости параллельный перенос не меняет компоненты вектора, поэтому вдоль всего пути γ мы получаем вектор, параллельный исходному вектору V в обычном (евклидовом) смысле. В результате, обойдя вокруг конуса по окружности γ мы получим вектор V', который, как видно из рисунка, составляет с вектором V угол, равный по величине углу POP на плоскости.

Имеет место следующее полезное утверждение.

Утверждение 9.8. *Пусть две поверхности M_1 и M_2 в $\mathbb{R}^3$ касаются по кривой γ (т.е., напомним, в точках кривой у них совпадают касательные плоскости). Тогда результат параллельного переноса вектора вдоль кривой γ не зависит от выбора поверхности.*

Доказательство. Так как ковариантная производная $\nabla_{\gamma'(t)}T$ поля T вдоль кривой γ на поверхности M_i, $i=1,\,2$, совпадает с результатом проецирования на касательную плоскость $T_{\gamma(t)}M_i$ вектора $T'(t)$, а касательные плоскости $T_{\gamma(t)}M_1$ и $T_{\gamma(t)}M_2$ совпадают, то совпадают и уравнения параллельного переноса вдоль γ на поверхностях M_1 и M_2, что и требовалось.

Упражнение 9.4. Пусть γ — плоское сечение двумерной сферы, заданной в $\mathbb{R}^3$ уравнением $x^2+y^2+z^2=1$, плоскостью $z=h$, где $0\le h<1$. Пусть a — касательный вектор к сфере в точке $P\in\gamma$, направленный вдоль меридиана к северному полюсу. На какой угол повернется вектор a при параллельном переносе по кривой γ от P до P? Указание: рассмотреть конус, касающийся сферы вдоль параллели γ.

Упражнение 9.5. Пусть M — поверхность вращения графика положительной функции $y=f(x)$ вокруг оси Ox, и пусть γ — сечение поверхности M ортогональной оси вращения плоскостью $x=x_0$. Пусть a — касательный вектор к M в точке $P\in\gamma$, направленный вдоль меридиана. На какой угол повернется вектор a при параллельном переносе по кривой γ от P до P?

9.3. Подмногообразия риманова многообразия. Пусть W — риманово многообразие, и M — подмногообразие в W с индуцированной из W метрикой. Напомним, что риманова связность ∇ на поверхности M, согласованная с индуцированной метрикой, может быть получена из римановой связности $\bar{\nabla}$, согласованной с метрикой объемлющего многообразия W, так:

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_X Y)^T,$$

где $(\cdot)^T$ — ортогональное (в метрике на W) проецирование касательного пространства $T_P W$ на его подпространство $T_P M \subset T_P W$, являющееся касательным пространством к подмногообразию M. Поэтому уравнение геодезической γ на M имеет вид:

$$(\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma})^T = 0.$$

Итак, мы получаем эквивалентное определение геодезической на подмногообразии: кривая γ на подмногообразии M риманова многообразия W является геодезической на M в индуцированной метрике, если и только если ее вектор ковариантного ускорения как кривой в W (т.е. относительно ковариантного дифференцирования в объемлющем многообразии) перпендикулярен подмногообразию M в каждой точке.

Следствие 9.6. *Если γ — геодезическая на римановом многообразии W лежит в подмногообразии $M \subset W$, то γ — геодезическая на M в индуцированной метрике.*

Следствие 9.7. *Если два подмногообразия риманова многообразия касаются вдоль кривой γ, являющейся геодезической на одном из подмногообразий (в индуцированной метрике), то γ также является геодезической и на другом подмногообразии (в его индуцированной метрике).*

9.4. Геодезические на плоском торе. Напомним, что тор можно получить из параллелограмма склейкой противоположных сторон «без переворота». Фиксируем параллелограмм Π, совместим одну из его вершин с началом координат на плоскости, и пусть e_1 и e_2 — векторы, соответствующие сторонам параллелограмма, выходящим из этой вершины. Эти векторы задают действие группы $\mathbb{Z}^2$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ сдвигами на векторы $n_1e_1 + n_2e_2$, $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$. Заметим, что при таком действии параллельные стороны параллелограмма Π переходят друг в друга «без переворота», поэтому факторпространство $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ естественно отождествляется с тором. Обозначим через π естественную проекцию $\pi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = T^2$. Эта проекция, очевидно, является локальным диффеоморфизмом. Если x — произвольная точка тора T^2, и p — произвольная точка из ее прообраза, т.е. $\pi(p) = x$, то весь прообраз $\pi^{-1}(x)$ представляет собой множество

$$\left\{n_1e_1 + n_2e_2 + p \mid (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2\right\}.$$

Более того, прообраз малой окрестности U точки x состоит из попарно непересекающихся окрестностей точек прообраза, причем любые две таких окрестности отличаются на сдвиг на вектор вида $n_1e_1 + n_2e_2$. Поэтому на торе можно ввести риманову метрику, отождествив окрестность U с любой из окрестностей прообраза. Эта метрика в подходящих координатах имеет евклидов вид и называется *плоской метрикой на торе.* Отметим, что разные параллелограммы задают на торе, вообще говоря, разные, т.е. не изометричные, плоские метрики.

Упражнение 9.6. Какие параллелограммы задают изометричные плоские метрики на торе? Описать пространство всевозможных попарно неизометричных плоских метрик на торе.

Ясно, что проекция $\pi\colon \mathbb{R}^2 \to T^2$ является локальной изометрией. Поэтому геодезические на плоском торе T^2 — это в точности те кривые, в которые проецируются прямые на плоскости. Чтобы понять, как выглядит соответствующая кривая на торе, рассмотрим разбиение $\mathcal{P}$ плоскости на параллелограммы, полученные сдвигами исходного параллелограмма Π на всевозможные векторы вида $n_1e_1 + n_2e_2$. Каждый параллелограмм разбиения $\mathcal{P}$ проецируется на тор. Пусть $\ell \subset \mathbb{R}^2$ — прямая на плоскости. Рассмотрим всевозможные параллелограммы из $\mathcal{P}$, через которые проходит прямая ℓ, и совместим их все с исходным параллелограммом П. В результате в параллелограмме П получится набор отрезков, параллельных прямой ℓ. При этом, если направление прямой ℓ может быть задано как целочисленная линейная комбинация векторов e_1 и e_2, то различных отрезков будет конечное число, и мы получим замкнутую геодезическую на торе T^2. В противном случае, все отрезки будут попарно различны, и соответствующая незамкнутая геодезическая на торе будет образовывать его всюду плотное подмножество. В частности, произвольная геодезическая на плоском торе вернется в сколь угодно малую окрестность своей начальной точки (через достаточно большое время).

Упражнение 9.7. Пусть P и Q — произвольные точки плоского тора T^2. Показать, что их соединяет бесконечно много попарно неизометричных геодезических.

9.5. Геодезические на матричных группах. Матричные группы представляют собой важный класс римановых многообразий с симметриями. В качестве базового примера возьмем группу ортогональных матриц размера $(n \times n)$, т.е. множество матриц
$$\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n^2} \mid AA^T = E\},$$
рассматриваемое как подмножество пространства всех матриц $\mathbb{R}^{n^2}$, в котором фиксировано стандартное скалярное произведение. Заметим, что если $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ — произвольные матрицы, заданные своими компонентами, то, рассматривая эти матрицы как векторы из $\mathbb{R}^{n^2}$, их скалярное произведение можно записать в виде
$$\langle A, B\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} = \operatorname{tr} AB^T.$$
Множество $M = \mathrm{O}(n)$ задается регулярной системой из $\dfrac{n(n+1)}{2}$ уравнений и является поэтому $\dfrac{n(n-1)}{2}$-мерным гладким подмногообразием в $\mathbb{R}^{n^2}$, на котором индуцируется метрика из объемлющего евклидова пространства. Отметим, что сопряжение с любой ортогональной матрицей G, т.е. отображение $f_G \colon \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n^2}$, $f_G(A) = GAG^{-1}$, переводит многообразие M в себя (что очевидно) и сохраняет скалярное произведение, т.к.
$$\Big\langle f_G(A), f_G(B)\Big\rangle = \operatorname{tr} f_G(A) f_G(B)^T = \operatorname{tr} GAG^{-1}(GBG^{-1})^T =$$
$$= \operatorname{tr} GAG^{-1}(G^{-1})^T B^T G^T = \operatorname{tr} GAB^T G^{-1} = \operatorname{tr} AB^T = \langle A, B\rangle,$$
где мы воспользовались определением ортогональной матрицы и тензорностью следа. Поэтому f_G порождает изометрию многообразия M.

Напомним, что касательное пространство $T_E M$ совпадает с множеством кососимметрических матриц. Рассмотрим в $\mathbb{R}^{n^2}$ кривую $\gamma_X(t) = \exp(tX)$, где $X \in T_E M$ и $\exp(tX)$ — обычная экспонента от матрицы, и убедимся, что γ_X — геодезическая на M (в подходящей параметризации). Проверим сначала, что $\gamma_X(t) \subset M$. Для этого покажем, что $\gamma_X(t)\gamma_X(t)^T = E$. Положим $A(t) = \gamma_X(t)\gamma_X(t)^T$ и вычислим производную $\dot A(t)$. Имеем:
$$\dot A(t) = \dot\gamma_X(t)\gamma_X(t)^T + \gamma_X(t)\dot\gamma_X(t)^T = X\gamma_X(t)\gamma_X(t)^T + \gamma_X(t)\Big(X\gamma_X(t)\Big)^T = 0$$
в силу косой симметрии матрицы X и перестановочности матриц X и $\exp(tX)$, откуда $A(t) = A(0) = E$. Итак, кривая $\gamma_X(t)$ лежит в M. Осталось заметить, что эта кривая состоит из неподвижных точек изометрии $f_{\exp X}$, у которой нет других неподвижных точек в окрестности E, и воспользоваться следствием 9.3.

Лекция 10. Экстремальные свойства геодезических

Геодезические на римановых многообразиях обладают экстремальными свойствами, а именно, они представляют собой локально кратчайшие кривые: *каждый достаточно малый отрезок геодезической является кратчайшей гладкой кривой, соединяющей свои концевые точки.* Чтобы убедиться в этом, мы начнем с изучения свойств функции длины кривых на римановом многообразии.

10.1. Производная функции длины кривой при ее вариации

Пусть M — риманово многообразие. Рассмотрим на M произвольную регулярную кривую $\gamma\colon [t_1, t_2] \to M$, и обозначим через $P = \gamma(t_1)$ и $Q = \gamma(t_2)$ ее концевые точки. Далее, пусть G — некоторое подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами (τ, t), ограниченное прямыми $\tau = \pm\tau_0$ и двумя кривыми $t = t_1(\tau)$ и $t = t_2(\tau)$, где $t_1(\tau) < t_2(\tau)$ для любого $\tau \in [-\tau_0, \tau_0]$, и $t_1(0) = t_1$, а $t_2(0) = t_2$, см. рис. 4. Гладкое отображение Φ области G в многообразие M называется *вариацией кривой* γ, если $\Phi(0, t) = \gamma(t)$. Отображение Φ задает однопараметрическое семейство кривых $\gamma_\tau(t) = \Phi(\tau, t)$, $t \in \big[t_1(\tau), t_2(\tau)\big]$, где τ — параметр семейства, при этом $\gamma_0(t) = \gamma(t)$. Кривые $p(\tau) = \Phi\big(\tau, t_1(\tau)\big)$ и $q(\tau) = \Phi\big(\tau, t_2(\tau)\big)$, по которым движутся концевые точки кривых γ_τ, называются *концевыми кривыми.* Если $p(\tau) = P$ и $q(\tau) = Q$ для любого τ, то отображение Φ называется *вариацией с закрепленными концами.*

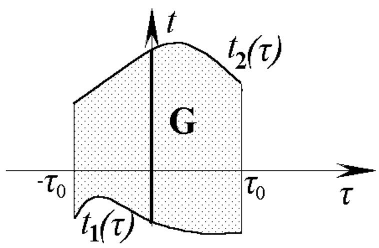

Рис. 4. Область определения вариации Φ

В каждой точке $\gamma(t)$ кривой γ определим вектор

$$E(t) = d\Phi|_{(0,t)}\Big(\frac{\partial}{\partial\tau}\Big).$$

Соответствующее векторное поле, определенное вдоль кривой γ, называется *полем вариации* Φ. Поле вариации состоит из векторов скоростей кривых $\nu_t(\tau)$ при $\tau = 0$, задаваемых отображением Φ так: $\nu_t(\tau) = \Phi(\tau, t)$. Отметим, что в концевых точках поле вариации вовсе не совпадает с векторами скоростей концевых кривых. А именно, имеет место следующая лемма (здесь и ниже точкой обозначается дифференцирование по t, а штрихом — дифференцирование по τ).

Лемма 10.1. *Вектора скоростей концевых кривых в начальный момент $\tau = 0$ удовлетворяют следующим соотношениям*:

$$p'(0) = t_1'(0)\dot\gamma(t_1) + E(t_1), \qquad q'(0) = t_2'(0)\dot\gamma(t_2) + E(t_2).$$

Доказательство. Проверим, например, первое соотношение. По определению имеем:

$$p'(\tau) = \frac{d\Phi(\tau, t_1(\tau))}{d\tau} = \frac{\partial\Phi(\tau, t_1(\tau))}{\partial\tau} + \frac{\partial\Phi(\tau, t_1(\tau))}{\partial t}\frac{dt_1(\tau)}{d\tau}.$$

Подставив значение $\tau = 0$ и вспомнив, что $t_1(0) = t_1$, получим:

$$p'(0) = \frac{\partial\Phi(0, t_1(0))}{\partial\tau} + \frac{\partial\Phi(0, t_1(0))}{\partial t}t_1'(0) = E(t_1) + \dot\gamma(t_1)t_1'(0).$$

Доказательство закончено.

Рассмотрим функцию $\ell(\tau)$, определенную на отрезке $[-\tau_0, \tau_0]$ и равную длине кривой γ_τ. Вычислим производную этой функции в $\tau = 0$. Дополнительно предположим для простоты, что кривая $\gamma(t)$ натурально параметризована. Запишем функцию $\ell(\tau)$ в виде

$$\ell(\tau) = \int_{t_1(\tau)}^{t_2(\tau)} \|\dot\gamma_\tau\|\,dt,$$

и воспользуемся теоремой о дифференцировании интеграла, зависящего от параметра. Получим:

$$\frac{d\ell(\tau)}{d\tau} = t_2'(\tau)\|\dot\gamma_\tau(t_2(\tau))\| - t_1'(\tau)\|\dot\gamma_\tau(t_1(\tau))\| + \int_{t_1(\tau)}^{t_2(\tau)} \|\dot\gamma_\tau(t)\|'\,dt,$$

Вычислим производную $\|\dot\gamma_\tau(t)\|'$. Для этого нам понадобится следующая лемма.

Лемма 10.2. *В сделанных выше обозначениях, имеет место следующее равенство*:

$$\nabla_\tau\dot\gamma_\tau(t) = \nabla_t\nu_t'(\tau).$$

Доказательство. Пусть на многообразии фиксированы локальные координаты $(x^1, \dots, x^n)$. Обозначим через $x^i(\tau, t)$ координатное представление вариации Φ. Тогда k-ая компонента поля $\nabla_\tau \dot\gamma_\tau(t)$ имеет вид:

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tau}\nabla_\alpha \dot x^k = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tau}\Big(\frac{\partial \dot x^k}{\partial x^\alpha} + \Gamma^k_{\beta\alpha}\dot x^\beta\Big) = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\Big(\frac{\partial x^k}{\partial t}\Big)\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tau} + \Gamma^k_{\beta\alpha}\dot x^\beta (x^\alpha)' =$$
$$= \frac{\partial^2 x^k}{\partial t\partial \tau} + \Gamma^k_{\alpha\beta}\dot x^\alpha (x^\beta)' = \frac{\partial x^\alpha}{\partial t}\nabla_\alpha (x^k)',$$

т.е. совпадает с k-ой компонентой поля $\nabla_t \nu'_t(\tau)$ (здесь мы воспользовались симметрией связности Γ). Доказательство закончено.

Теперь, с помощью леммы 10.2, найдем:

$$\|\dot\gamma_\tau(t)\|' = \nabla_\tau\sqrt{\langle\dot\gamma_\tau, \dot\gamma_\tau\rangle} = \frac{1}{2}\frac{\nabla_\tau\langle\dot\gamma_\tau, \dot\gamma_\tau\rangle}{\sqrt{\langle\dot\gamma_\tau, \dot\gamma_\tau\rangle}} = \frac{\langle\nabla_\tau\dot\gamma_\tau, \dot\gamma_\tau\rangle}{\sqrt{\langle\dot\gamma_\tau, \dot\gamma_\tau\rangle}} = \frac{\langle\nabla_t\nu'_t, \dot\gamma_\tau\rangle}{\sqrt{\langle\dot\gamma_\tau, \dot\gamma_\tau\rangle}}.$$

Подставим полученное выражение в формулу для производной функции длины $\ell(\tau)$, положим $\tau = 0$, воспользуемся предположением о том, что кривая $\gamma(t)$ натурально параметризована, и тем, что $E(t) = \nu'_t(0)$ по определению. Получим:

$$\frac{d\ell(0)}{d\tau} = t'_2(0) - t'_1(0) + \int_{t_1}^{t_2}\big\langle\nabla_t E(t), \dot\gamma\big\rangle\,dt.$$

Далее,

$$\nabla_t\big\langle E(t), \dot\gamma\big\rangle = \big\langle\nabla_t E(t), \dot\gamma\big\rangle + \big\langle E(t), \nabla_t\dot\gamma\big\rangle,$$

поэтому выражение для производной переписывается в виде

$$\frac{d\ell(0)}{d\tau} = t'_2(0) - t'_1(0) + \int_{t_1}^{t_2}\Big(\nabla_t\big\langle E(t), \dot\gamma\big\rangle - \big\langle E(t), \nabla_t\dot\gamma\big\rangle\Big)\,dt =$$
$$= t'_2(0) - t'_1(0) + \big\langle E(t_2), \dot\gamma(t_2)\big\rangle - \big\langle E(t_1), \dot\gamma(t_1)\big\rangle - \int_{t_1}^{t_2}\big\langle E(t), \nabla_t\dot\gamma\big\rangle\,dt.$$

Теперь, представив $t'_i(0)$ в виде $t'_i(0)\big\langle\dot\gamma(t_i), \dot\gamma(t_i)\big\rangle$, $i = 1, 2$, заметим, что

$$t'_i(0) + \big\langle E(t_i), \dot\gamma(t_i)\big\rangle = \big\langle t'_i(0)\dot\gamma(t_i) + E(t_i), \dot\gamma(t_i)\big\rangle.$$

Наконец, воспользовавшись леммой 10.1 и определением производной вдоль кривой, перепишем выражение для производной в виде

$$\frac{d\ell(0)}{d\tau} = \big\langle q'(0), \dot\gamma(t_2)\big\rangle - \big\langle p'(0), \dot\gamma(t_1)\big\rangle - \int_{t_1}^{t_2}\big\langle E(t), \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma\big\rangle\,dt.$$

Итак, доказано следующее важное утверждение.

Утверждение 10.1. *Пусть $\Phi(\tau, t)$ — произвольная вариация гладкой кривой $\gamma\colon [t_1, t_2] \to M$, и $p(\tau)$ и $q(\tau)$ — концевые кривые вариации Φ. Тогда первая производная длины $\ell(\tau)$ кривой $\gamma_\tau(t) = \Phi(\tau, t)$ в начальный момент времени $\tau = 0$ существует и имеет вид*

$$\frac{d\ell(0)}{d\tau} = \big\langle q'(0), \dot\gamma(t_2)\big\rangle - \big\langle p'(0), \dot\gamma(t_1)\big\rangle - \int_{t_1}^{t_2} \big\langle E(t), \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma\big\rangle\, dt.$$

Из утверждения 10.1 вытекает несколько важных следствий.

Следствие 10.1 (Вариация с закрепленными концами). *Если вариация $\Phi(\tau, t)$ кривой $\gamma\colon [t_1, t_2] \to M$ имеет закрепленные концы, то производная длины $\ell(\tau)$ кривой γ_τ в начальный момент $\tau = 0$ имеет вид*

$$\frac{d\ell(0)}{d\tau} = -\int_{t_1}^{t_2} \big\langle E(t), \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma\big\rangle\, dt.$$

Следствие 10.2 (Стационарность геодезических). *Любая геодезическая γ на римановом многообразии M является кривой стационарной длины по отношению к произвольной вариации кривой γ с закрепленными концами. Обратно, любая натурально параметризованная кривая, длина которой стационарна по отношению к произвольным вариациям с закрепленными концами, является геодезической.*

Следствие 10.3. *Если кривая γ — геодезическая, то для произвольной ее вариации $\Phi(\tau, t)$ производная функции длины $\ell(\tau)$ в начальный момент времени $\tau = 0$ имеет вид*

$$\frac{d\ell(0)}{d\tau} = \big\langle q'(0), \dot\gamma(t_2)\big\rangle - \big\langle p'(0), \dot\gamma(t_1)\big\rangle,$$

где $p(\tau)$ и $q(\tau)$ — концевые кривые вариации Φ.

10.2. Лемма Гаусса и локальная минимальность геодезических

Пусть в некоторой нормальной окрестности точки P риманова многообразия M фиксированы нормальные координаты. Рассмотрим в касательном пространстве T_PM сферу $S^n(\varepsilon)$ радиуса ε, целиком лежащую в нормальной окрестности точки $0 \in T_PM$. Напомним, что сфера $S^n(\varepsilon)$, по определению, состоит из касательных векторов v нормы ε, где норма вектора вычисляется с помощью римановой метрики. Образ $\exp_P(S^n(\varepsilon))$ сферы $S^n(\varepsilon)$ при экспоненциальном отображении называется *геодезической сферой с центром в точке P и радиуса ε.*

Утверждение 10.2 (Лемма Гаусса). *Пусть Q — произвольная точка геодезической сферы Σ с центром в точке P. Тогда целиком лежащая в нормальной окрестности точки P геодезическая, соединяющая точки P и Q, единственна. Более того, геодезическая γ приходит на геодезическую сферу Σ под прямым углом, т.е. γ перпендикулярна любой регулярной кривой, проходящей через Q и лежащей в Σ.*

Доказательство. Первая часть утверждения непосредственно следует из утверждения 9.7, т.е. из взаимной однозначности отображения $\exp_P$ в нормальной окрестности. Докажем вторую часть утверждения.

Пусть $\gamma(t)$ — геодезическая, соединяющая точки P и Q и лежащая в нормальной окрестности точки P, и пусть $\sigma(\tau)$, $\tau \in [-\tau_0, \tau_0]$, — произвольная регулярная кривая на геодезической сфере Σ, и $\sigma(0) = Q$. Рассмотрим семейство геодезических $\gamma_\tau(t)$, целиком лежащих в нормальной окрестности точки P и соединяющих P с точкой $\sigma(\tau) \in \Sigma$. В силу первой части утверждения, каждая геодезическая $\gamma_\tau(t)$ однозначно определена. Семейство геодезических $\gamma_\tau(t)$ определяет вариацию $\Phi(\tau, t) = \gamma_\tau(t)$ геодезической $\gamma(t) = \gamma_0(t)$, поскольку решение уравнений геодезических гладко зависит от начальных условий. При этом, по определению, одна концевая кривая $p(\tau)$ вариации Φ состоит из одной точки P, а другая — $q(\tau)$, — совпадает с кривой $\sigma(\tau)$. Воспользуемся формулой первой вариации длины, см. следствие 10.3. Поскольку длины всех геодезических $\gamma_\tau(t)$ равны между собой и равны радиусу сферы Σ, имеем:

$$0 = \frac{d\ell(0)}{d\tau} = \big\langle \sigma'(0), \dot\gamma \big\rangle,$$

где вектор скорости $\dot\gamma$ вычисляется в точке Q, т.е. геодезическая γ перпендикулярна кривой σ, лежащей на сфере Σ. Доказательство закончено.

Упражнение 10.1. Пусть γ — лежащая в нормальной окрестности геодезическая, соединяющая точку P с точкой $Q \in \Sigma_\varepsilon$, где Σ_ε — геодезическая сфера с центром в точке P. Найдите длину кривой γ.

Докажем одно важное следствие леммы Гаусса. Рассмотрим две геодезические сферы $\Sigma(\varepsilon)$ и $\Sigma(\varepsilon')$ с центром в точке P. Пусть $Q \in \Sigma(\varepsilon)$ и $Q' \in \Sigma(\varepsilon')$ — две произвольные точки на этих сферах и γ — соединяющая их гладкая кривая, целиком лежащая в нормальной окрестности точки P

Следствие 10.4. *Длина $\ell(\gamma)$ кривой γ не меньше абсолютной величины $|\varepsilon - \varepsilon'|$ разности радиусов геодезических сфер. При этом равенство достигается, если и только если кривая γ совпадает (с точностью до параметризации) с геодезической, проходящей через центр P обеих сфер.*

Доказательство. Пусть s — параметр на кривой γ (не обязательно натуральный), $Q = \gamma(s_0)$, и $Q' = \gamma(s_0')$. Поскольку все происходит внутри некоторой нормальной окрестности точки P, для любого s существует единственное представление точки $\gamma(s)$ в виде

$$\gamma(s) = \exp_P\bigl(V(s)\bigr),$$

где $V \in T_PM$ — некоторый, зависящий от точки $\gamma(s)$, касательный вектор. Представим вектор $V(s)$ в виде $V(s) = \|V(s)\| \dfrac{V(s)}{\|V(s)\|}$, и обозначим функцию $\|V(s)\|$ через $t(s)$, а единичный вектор $V(s)/\|V(s)\|$ — через $\xi(s)$. Тогда кривая $\gamma(s)$ запишется в виде

$$\gamma(s) = \exp_P\bigl(t(s)\xi(s)\bigr).$$

Пусть $\xi(s)$, где $s \in [a,b]$ и $[a,b] \supset [s_0, s_0']$, — произвольная гладкая кривая на единичной сфере $S^n(1) \subset T_PM$. Рассмотрим отображение $\Psi\colon [0,t_0] \times [a,b] \to M$, положив

$$\Psi(t,s) = \exp_P\bigl(t\xi(s)\bigr),$$

где t_0 — не слишком велико. Ясно, что образ $\Psi\bigl(t,[a,b]\bigr)$ отрезка $[a,b]$ при фиксированном t — это кривая на геодезической сфере $\Sigma(t)$, а образ $\Psi\bigl([0,t_0],s\bigr)$ отрезка $[0,t_0]$ при любом фиксированном s — это радиальная геодезическая, которая проходится с единичной скоростью $\xi(s)$. Кривая $\gamma(s)$ в терминах отображения Ψ записывается так: $\gamma(s) = \Psi\bigl(t(s),s\bigr)$.

Для нахождения длины кривой γ, вычислим ее вектор скорости:

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{\partial\Psi}{\partial t}\frac{dt}{ds} + \frac{\partial\Psi}{\partial s}.$$

Вектор $\dfrac{\partial\Psi}{\partial t}$ — касательный вектор к радиальной геодезической, а вектор $\dfrac{\partial\Psi}{\partial s}$ — касательный вектор к геодезической сфере. По лемме Гаусса эти векторы перпендикулярны, поэтому, по теореме Пифагора, длина вектора кривой γ скорости вычисляется так:

$$\Bigl\|\frac{d\gamma}{ds}\Bigr\|^2 = \Bigl\|\frac{\partial\Psi}{\partial t}\Bigr\|^2 \cdot \Bigl|\frac{dt}{ds}\Bigr|^2 + \Bigl\|\frac{\partial\Psi}{\partial s}\Bigr\|^2 \geq \Bigl\|\frac{\partial\Psi}{\partial t}\Bigr\|^2 \cdot \Bigl|\frac{dt}{ds}\Bigr|^2 = \Bigl|\frac{dt}{ds}\Bigr|^2,$$

так как норма вектора $\dfrac{\partial\Psi}{\partial t}$ равна единице. Поэтому

$$\ell(\gamma) = \int_{s_0'}^{s_0} \Bigl\|\frac{d\gamma}{ds}\Bigr\|\, ds \geq \int_{s_0'}^{s_0} \Bigl|\frac{dt}{ds}\Bigr|\, ds \geq \Bigl|\int_{s_0'}^{s_0} \frac{dt}{ds}\, ds\Bigr| = |t(s_0) - t(s_0')| = |\varepsilon - \varepsilon'|.$$

При этом равенство достигается, если и только если $\dfrac{\partial\Psi}{\partial s} = 0$, т.е. если $\xi(s) = \xi_0 = \mathrm{const}$. Последнее означает, что $\gamma(s) = \exp_P\bigl(t(s)\xi_0\bigr)$, т.е. кривая γ совпадает с радиальной геодезической, с точностью до параметризации. Следствие доказано.

Следствие 10.5. *Пусть точка Q лежит в геодезическом шаре с центром в точке P достаточно малого радиуса ε (настолько малого, что отображение $\exp_P$ является на этом шаре диффеоморфизмом). Положим $Q = \exp_P \xi$. Тогда геодезическая $\gamma(t) = \exp_P(t\xi)$, является единственной кривой наименьшей длины, соединяющей точки P и Q.*

Доказательство. Для доказательства достаточно в следствии 10.4 перейти к пределу при $\varepsilon' \to 0$, и заметить, что любая кривая, выходящая из точки P и не лежащая целиком в нормальной окрестности этой точки, длиннее радиуса любой геодезической сферы, лежащей в этой окрестности.

Кривая γ на римановом многообразии, соединяющая точки P и Q, называется *кратчайшей*, если длина любой другой кривой, соединяющей те же точки, не меньше чем длина кривой γ. Мы уже видели, что для любых достаточно близких точек риманова многообразия существует единственная кратчайшая их соединяющая. Эта кратчайшая является геодезической. Оказывается, имеет место также и следующее утверждение.

Следствие 10.6. *Пусть γ — некоторая кратчайшая, соединяющая произвольные точки P и Q риманова многообразия M. Тогда γ — геодезическая на M (в подходящей параметризации).*

Доказательство. Это немедленно вытекает из следствия 10.5. Действительно, раз γ — кратчайшая, то она является таковой и для любых двух своих достаточно близких точек. Поэтому каждый маленький кусочек кривой γ является геодезической, следовательно и вся кривая γ — тоже. Следствие доказано.

Упражнение 10.2. Любые ли две точки на римановом многообразии M можно соединить кратчайшей кривой?

Задачи

Задача 10.1. Привести пример риманова многообразия и двух точек на нем, которые не соединяет ни одна кратчайшая и ни одна геодезическая.

Задача 10.2. Показать, что если M — замкнутое риманово многообразие, то любые его две точки можно соединить кратчайшей геодезической.

Задача 10.3. Пусть M — риманово многообразие с не пустым краем ∂M. Пусть P и Q — точки из M, и γ — кратчайшая кривая, соединяющая P и Q. Верно ли, что γ — геодезическая?

Задача 10.4. Описать геодезические сферы и радиальные геодезические на евклидовой плоскости, плоскости Лобачевского, сфере, прямом цилиндре. Сколько существует геодезических, проходящих через фиксированную пару точек этих многообразий? А кратчайших геодезических?

Задача 10.5. Вывести формулы для функции $\ell(t)$ длины прямолинейного отрезка $\big[a(t), b(t)\big]$ в пространстве $\mathbb{R}^n$, если его концы движутся по гладким кривым $a(t)$ и $b(t)$, $t \in [0,1]$. Найти производную функции $\ell(t)$ при $t = 0$. Изучить отдельно случай $a(0) = b(0)$.

Дополнительный материал

10.1. Уравнение геодезических в гамильтоновой форме. Напомним, см. дополнительный материал к лекции 6, что кокасательное расслоение T^*M к произвольному многообразию M представляет собой симплектическое многообразие, поэтому можно записать систему уравнений Гамильтона для произвольной функции H на нем. Пусть M — риманово многообразие, $(x^1, \dots, x^n)$ — локальные координаты на нем, и $(x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n)$ — соответствующая карта на T^*M. Определим функцию Гамильтона H на T^*M, положив $H(x,p) = \dfrac{1}{2} g^{ij} p_i p_j$, где g_{ij} — компоненты римановой метрики в координатах $(x^1, \dots, x^n)$.

Упражнение 10.3. Проверьте, что заданная в локальных координатах функция Гамильтона H определена корректно.

Соответствующая система уравнений Гамильтона имеет вид

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = g^{i\alpha} p_\alpha,$$
$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^i} p_\alpha p_\beta,$$

где точкой, как обычно, обозначено дифференцирование по t. Из первого уравнения получим $p_\alpha = g_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta$, т.е. “импульс p — это ковектор, соответствующий скорости $\dot{x}$.” Исключим из второго уравнения импульсы p. Имеем:

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^i} g_{\alpha k} \dot{x}^k g_{\beta j} \dot{x}^j = \big(g_{i\beta} \dot{x}^\beta\big)^{\cdot} = \ddot{x}^\beta g_{i\beta} + \dot{x}^\beta \frac{\partial g_{i\beta}}{\partial x^k} \dot{x}^k.$$

Чтобы избавиться от производной обратной матрицы метрики, воспользуемся следующей тривиальной леммой.

Лемма 10.3. *Имеет место следующее соотношение*:

$$\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^i} g_{\beta k} = -g^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\beta k}}{\partial x^i}.$$

С помощью леммы 10.3 перепишем левую часть последнего уравнения в виде

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^i} g_{\alpha k} \dot{x}^k g_{\beta j} \dot{x}^j = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\beta j}}{\partial x^i} g_{\alpha k} \dot{x}^k \dot{x}^j = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} \dot{x}^k \dot{x}^j,$$

поэтому само уравнение можно записать так:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\dot{x}^k\dot{x}^j = \ddot{x}^\beta g_{i\beta} + \dot{x}^\beta \frac{\partial g_{i\beta}}{\partial x^k}\dot{x}^k.$$

Разбивая последнее слагаемое правой части на два равных, перенося все в правую часть и умножая на матрицу $g^{i\alpha}$ получаем

$$\ddot{x}^\alpha + \dot{x}^k\dot{x}^j\frac{1}{2}g^{i\alpha}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\right) = 0.$$

Осталось заметить, что

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^k\dot{x}^j = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\dot{x}^k\dot{x}^j,$$

поэтому наше уравнение — это в точности уравнение геодезических на M. Поскольку все наши преобразования можно проделать в обратном порядке, получаем следующее утверждение.

Утверждение 10.3. *Пусть M — произвольное риманово многообразие. Каждое решение $(x(t), p(t))$ построенной выше гамильтоновой системы на кокасательном расслоении T^*M проецируется в геодезическую $x(t)$ на M. Обратно, если $x(t)$ — произвольная геодезическая, $\dot{x}(t)$ — ее поле скоростей, а $p(t)$ — ковекторное поле, полученное из $\dot{x}(t)$ поднятием индекса с помощью римановой метрики, то пара $(x(t), p(t))$ — решение гамильтоновой системы уравнений на T^*M с определенным выше гамильтонианом H.*

Лекция 11. Тензор кривизны

Вопрос о существовании евклидовых координат для данной связности (метрики) уже затрагивался нами выше. В качестве одного из препятствий к построению таких координат, мы указали тензор кручения аффинной связности. В данном разделе мы определим и изучим так называемый тензор кривизны. Оказывается в терминах тензоров кривизны и кручения можно сформулировать критерий существования евклидовых координат. Мы дадим здесь два определения тензора кривизны.

11.1. Координатное определение тензора кривизны

Если на многообразии M с аффинной связностью Γ существуют евклидовы координаты $(z^1, \dots, z^n)$, то в этих координатах операция ковариантного дифференцирования в связности Γ совпадает, по определению, с операцией частного дифференцирования (так дело обстоит, например в $\mathbb{R}^n$ с евклидовой связностью и евклидовыми координатами $(z^1, \dots, z^n)$). Поэтому для любого векторного поля T на M имеет место равенство

$$\nabla_p\bigl(\nabla_q T^i\bigr) = \frac{\partial^2 T^i}{\partial z^q \partial z^p} = \frac{\partial^2 T^i}{\partial z^p \partial z^q} = \nabla_q\bigl(\nabla_p T^i\bigr).$$

Таким образом, в евклидовых координатах (если такие существуют) вторые ковариантные производные не зависят от порядка. Отметим, что равенство

$$\nabla_p\bigl(\nabla_q T^i\bigr) = \nabla_q\bigl(\nabla_p T^i\bigr)$$

— тензорное, поэтому оно или имеет, или не имеет место во всех системах координат сразу.

Итак, пусть теперь M — многообразие с аффинной связностью Γ, и T — векторное поле на M. Вычислим $\nabla_p\bigl(\nabla_q T^i\bigr)$ в локальных координатах $(x^1, \dots, x^n)$. Получим:

$$\begin{aligned}
\nabla_p\bigl(\nabla_q T^i\bigr) &= \nabla_p\Bigl(\frac{\partial T^i}{\partial x^q} + \Gamma^i_{\alpha q} T^\alpha\Bigr) = \\
&= \frac{\partial}{\partial x^p}\Bigl(\frac{\partial T^i}{\partial x^q} + \Gamma^i_{\alpha q} T^\alpha\Bigr) + \Gamma^i_{\beta p}\Bigl(\frac{\partial T^\beta}{\partial x^q} + \Gamma^\beta_{\alpha q} T^\alpha\Bigr) - \Gamma^\beta_{qp}\Bigl(\frac{\partial T^i}{\partial x^\beta} + \Gamma^i_{\alpha\beta} T^\alpha\Bigr) = \\
&= \underline{\frac{\partial^2 T^i}{\partial x^q \partial x^p}} + \frac{\partial \Gamma^i_{\alpha q}}{\partial x^p} T^\alpha + \underline{\Gamma^i_{\alpha q}\frac{\partial T^\alpha}{\partial x^p} + \Gamma^i_{\beta p}\frac{\partial T^\beta}{\partial x^q}} + \\
&\quad + \Gamma^i_{\beta p}\Gamma^\beta_{\alpha q} T^\alpha - \underline{\Gamma^\beta_{qp}\frac{\partial T^i}{\partial x^\beta}} - \Gamma^\beta_{qp}\Gamma^i_{\alpha\beta} T^\alpha,
\end{aligned}$$

где подчеркнутые слагаемые симметричны по p и q. Ясно, что $\nabla_p\bigl(\nabla_q T^i\bigr)$ получается из предыдущего выражения перестановкой индексов p и q.

Поэтому

$$(\nabla_p\nabla_q - \nabla_q\nabla_p)T^i = \Big(\frac{\partial\Gamma^i_{\alpha q}}{\partial x^p} - \frac{\partial\Gamma^i_{\alpha p}}{\partial x^q} + \Gamma^i_{\beta p}\Gamma^\beta_{\alpha q} - \Gamma^i_{\beta q}\Gamma^\beta_{\alpha p}\Big)T^\alpha + \\ + \ (\Gamma^\beta_{pq} - \Gamma^\beta_{qp})\Big(\frac{\partial T^i}{\partial x^\beta} + \Gamma^i_{\alpha\beta}T^\alpha\Big).$$

Отметим, что во втором слагаемом стоят уже известные нам компоненты тензора кручения Ω аффинной связности Γ. Обозначим множитель, стоящий перед T^α через $R^i_{\alpha\ pq}$. Тогда последнее выражение перепишется в виде

$$\big(\nabla_p\nabla_q - \nabla_q\nabla_p\big)T^i = R^i_{\alpha\ pq}T^\alpha + \Omega^\beta_{pq}\nabla_\beta T^\alpha, \qquad (*)$$

где

$$R^i_{\alpha\ pq} = \frac{\partial\Gamma^i_{\alpha q}}{\partial x^p} - \frac{\partial\Gamma^i_{\alpha p}}{\partial x^q} + \Gamma^i_{\beta p}\Gamma^\beta_{\alpha q} - \Gamma^i_{\beta q}\Gamma^\beta_{\alpha p}.$$

Из того обстоятельства, что все слагаемые в равенстве $(*)$, за исключением $R^i_{\alpha\ pq}T^\alpha$ — тензорные, и T^α — компоненты произвольного векторного поля, вытекает следующий результат.

Лемма 11.1. *Соответствие, сопоставляющее произвольным локальным координатам $(x^1,\dots,x^n)$ на многообразии M набор функций $R^i_{\alpha\ pq}$ задает на M тензорное поле R типа $(1,3)$.*

Определение. Тензорное поле R типа $(1,3)$, компоненты которого в локальных координатах $(x^1,\dots,x^n)$ на многообразии M с аффинной связностью Γ задаются в виде

$$R^i_{\alpha\ pq} = \frac{\partial\Gamma^i_{\alpha q}}{\partial x^p} - \frac{\partial\Gamma^i_{\alpha p}}{\partial x^q} + \Gamma^i_{\beta p}\Gamma^\beta_{\alpha q} - \Gamma^i_{\beta q}\Gamma^\beta_{\alpha p}.$$

называется *тензором кривизны аффинной связности* Γ.

Утверждение 11.1. *Если на многообразии M существуют евклидовы координаты в окрестности точки P для связности Γ, то тензор кривизны этой связности равен нулю в этой окрестности. Если же тензор кривизны связности Γ в окрестности некоторой точки P отличен от нуля, то в окрестности точки P нельзя выбрать евклидовы координаты (в смысле связности Γ).*

Доказательство. Это очевидно: тензор кривизны в евклидовых координатах равен нулю и, поэтому, если евклидовы координаты существуют, то тензор кривизны тождественно равен нулю в произвольных координатах.

Замечание. На самом деле, верно и обратное утверждение: *если тензор кривизны симметричной связности* Γ *равен нулю, то существуют евклидовы координаты.* Однако доказательство этого утверждения лежит за рамками нашего курса и сводится к разрешимости системы уравнений в частных производных (см. в следующей лекции комментарии для случая римановых многообразий).

Очевидно, что тензор кривизны обладает следующей косой симметрией: $R^i_{\alpha\ pq} = -R^i_{\alpha\ qp}$. Именно этим объясняется пробел, который мы ставим между первым и остальными двумя нижними индексами тензора кривизны — он позволяет визуально выделить кососимметричные индексы.

Другие симметрии тензора кривизны удобнее изучать в терминах его инвариантного определения. Чтобы дать это инвариантное определение, нам понадобится понятие коммутатора векторных полей на многообразии.

11.2. Коммутатор векторных полей

Пусть M — гладкое многообразие, и V — произвольное векторное поле на M. Тогда определено отображение пространства $\mathcal{F}(M)$ гладких функций на M в себя, переводящее произвольную гладкую функцию f из $\mathcal{F}(M)$ в функцию $V(f)$, значение которой в точке P есть производная по направлению вектора $V(P)$ от f в точке P. Пусть теперь имеется два векторных поля V и W. Рассмотрим отображение $[V,W]$ пространства $\mathcal{F}(M)$ в себя, заданное так:

$$[V,W]\colon f \mapsto V\big(W(f)\big) - W\big(V(f)\big), \qquad f \in \mathcal{F}(M).$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма 11.2. *В сделанных выше обозначениях, существует единственное гладкое векторное поле A на M, такое что $A(f) = [V,W](f)$ для произвольной гладкой функции $f \in \mathcal{F}(M)$. Если $(x^1, \dots, x^n)$ — локальные координаты на M, то компоненты векторного поля A вычисляются через компоненты полей V и W в этих координатах по следующим формулам:*

$$a^\alpha = \frac{\partial w^\alpha}{\partial x^\beta} v^\beta - \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} w^\beta.$$

Доказательство. Нам нужно проверить, что отображение $[V,W]$ является дифференцированием в каждой точке многообразия M (напомним, что касательный вектор можно определить как дифференцирование). Для произвольных функций f и g из $\mathcal{F}(M)$ и произвольных чисел α и β

имеем:

$$[V,W](\alpha f+\beta g) = V\big(\alpha W(f)+\beta W(g)\big) - W\big(\alpha V(f)+\beta V(g)\big) = \\ = \alpha\big(V(W(f)) - W(V(f))\big) + \beta\big(V(W(g)) - W(V(g))\big) = \\ = \alpha[V,W](f) + \beta[V,W](g),$$

поэтому операция $[V,W]$ линейна на $\mathcal{F}(M)$. Проверим правило Лейбница.

$$[V,W](fg) = V\big(W(f)g + fW(g)\big) - W\big(V(f)g + fV(g)\big) = \\ = V\big(W(f)\big)g + W(f)V(g) + V(f)W(g) + fV\big(W(g)\big) - \\ - W\big(V(f)\big)g - V(f)W(g) - W(f)V(g) - fW\big(V(g)\big) = \\ = [V,W](f)\ g + f\ [V,W](g).$$

Итак, мы показали, что $[V,W]$ — дифференцирование. Поэтому она задает векторное поле на M, которое мы обозначим через A.

Пусть $(x^1,\dots,x^n)$ — локальные координаты на M. Вычислим в этих координатах $[V,W](f)$. Имеем:

$$\begin{aligned}[V,W](f) &= V\big(W(f)\big) - W\big(V(f)\big) = V\Big(\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}w^\alpha\Big) - W\Big(\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}v^\alpha\Big) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\beta}\Big(\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}w^\alpha\Big)v^\beta - \frac{\partial}{\partial x^\beta}\Big(\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}v^\alpha\Big)w^\beta = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}w^\alpha v^\beta + \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\frac{\partial w^\alpha}{\partial x^\beta}v^\beta - \frac{\partial^2 f}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}v^\alpha w^\beta - \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta}w^\beta = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\Big(\frac{\partial w^\alpha}{\partial x^\beta}v^\beta - \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta}w^\beta\Big).\end{aligned}$$

Положим $a^\alpha = \dfrac{\partial w^\alpha}{\partial x^\beta}v^\beta - \dfrac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta}w^\beta$. Тогда

$$[V,W](f) = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}a^\alpha = A(f),$$

Таким образом, $(a^1,\dots,a^n)$ — это компоненты векторного поля A в координатах $(x^1,\dots,x^n)$. Лемма доказана.

Определение. Векторное поле $[V,W]$ называется *коммутатором векторных полей V и W.*

Приведем несколько простейших свойств коммутатора.

Утверждение 11.2. *Операция коммутирования векторных полей обладает следующими свойствами.*

1) *Косая симметрия: для любых полей X и Y имеет место равенство* $[X,Y] = -[Y,X]$.

2) Линейность над $\mathbb{R}^1$: для любых полей X, Y и Z и любых чисел α и β имеет место равенство

$$[X, \alpha Y + \beta Z] = \alpha[X, Y] + \beta[X, Z].$$

3) Правило Лейбница: для любых двух полей X и Y и гладкой функции $f \in \mathcal{F}(M)$ имеют место равенства

$$[X, fY] = f[X, Y] + X(f)Y, \qquad [fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)X.$$

4) Тождество Якоби: для любых полей X, Y и Z имеет место равенство

$$\big[X, [Y, Z]\big] + \big[Y, [Z, X]\big] + \big[Z, [X, Y]\big] = 0.$$

5) Если $(x^1, \dots, x^n)$ — произвольная система локальных координат на многообразии, и ∂_{x^i} и ∂_{x^j} — координатные векторные поля, то $[\partial_{x^i}, \partial_{x^j}] = 0$.

Доказательство. Первые два свойства очевидны. Докажем правило Лейбница. Имеем:

$$\begin{aligned}
[X, fY](h) &= X\big(fY(h)\big) - fY\big(X(h)\big) = \\
&= X(f)Y(h) + fX\big(Y(h)\big) - fY\big(X(h)\big) = \big(f[X, Y] + X(f)Y\big)(h),
\end{aligned}$$

что и требовалось (мы несколько раз пользовались правилом Лейбница для дифференцирования функций). Второе тождество проверяется аналогично.

Для проверки тождества Якоби достаточно заметить, что

$$\begin{aligned}
\big[X, [Y, Z]\big](h) &= X\big([Y, Z](h)\big) - [Y, Z]\big(X(h)\big) = \\
&= X\big((YZ - ZY)(h)\big) - (YZ - ZY)\big(X(h)\big) = \\
&= (XYZ - XZY - YZX + ZYX)(h),
\end{aligned}$$

а остальные два слагаемых получаются из этого циклической перестановкой полей X, Y, и Z. Поэтому

$$\begin{aligned}
&[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = (XYZ - XZY - YZX + ZYX) + \\
&+ (YZX - YXZ - ZXY + XZY) + (ZXY - ZYX - XYZ + YXZ) = 0.
\end{aligned}$$

Отметим, что это доказательство в точности совпадает с доказательством тождества Якоби для линейных операторов, известным из линейной алгебры.

Последнее свойство очевидно, так как $\partial_{x^i}(h) = \dfrac{\partial h}{\partial x^i}$.

Пункт 5 утверждения 11.2 представляет самостоятельный интерес. Пусть в области U гладкого n-мерного многообразия M задано семейство векторных полей $\{X_1, \dots, X_n\}$, такое что в каждой точке $P \in U$ векторы $\big\{X_i(P)\big\}$ образуют базис в касательном пространстве $T_P M$. Возникает естественный вопрос: существует ли в U система координат $(x^1, \dots, x^n)$, такая что $\partial_{x^i} = X_i$? Оказывается. такие координаты существуют не всегда, и пункт 5 утверждения 11.2 — это необходимое условие существования таких координат. Покажем, что это условие является так же и достаточным.

Утверждение 11.3. *Пусть в области U гладкого n-мерного многообразия M задано семейство векторных полей $\{X_1, \dots, X_n\}$, такое что в каждой точке $P \in U$ векторы $\big\{X_i(P)\big\}$ образуют базис в касательном пространстве $T_P M$. Если коммутаторы $[X_i, X_j]$ векторных полей равны нулю, то в некоторой области $U' \subset U$ существуют координаты $(x^1, \dots, x^n)$, для которых $\partial_{x^i} = X_i$.*

Доказательство. Пусть $(y^1, \dots, y^n)$ — локальные координаты в области U, и ∂_{y^i} — соответствующие координатные векторные поля. Мы хотим сделать такую замену координат $x^i = x^i(y^1, \dots, y^n)$, что $\partial_{x^i} = X_i$. Как известно,

$$\partial_{x^i} = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\partial_{y^\alpha}, \qquad X_i = X_i^\alpha \partial_{y^\alpha},$$

откуда условие $\partial_{x^i} = X_i$ равносильно системе уравнений

$$\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} = X_i^\alpha, \qquad 1 \le i,\ \alpha \le n$$

на неизвестные функции $y^i(x^1, \dots, x^n)$. Поскольку все происходит в одной карте, которая, как можно предполагать, гомеоморфна диску, необходимое и достаточное условие разрешимости этой системы уравнений (по лемме Пуанкаре) состоит в следующем:

$$\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^j \partial x^i} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x^j} X_i^\alpha = \frac{\partial}{\partial x^i} X_j^\alpha.$$

Функции X_i^α — суть компоненты векторного поля X_i в исходных координатах $(y^1, \dots, y^n)$, поэтому

$$\frac{\partial}{\partial x^j} X_i^\alpha = \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^\beta} X_i^\alpha = X_j^\beta \frac{\partial}{\partial y^\beta} X_i^\alpha,$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial x^j} X_i^\alpha = \frac{\partial}{\partial x^i} X_j^\alpha \quad \Leftrightarrow \quad X_j^\beta \frac{\partial}{\partial y^\beta} X_i^\alpha = X_i^\beta \frac{\partial}{\partial y^\beta} X_j^\alpha \quad \Leftrightarrow \quad [X_i, X_j] = 0,$$

что и требовалось.

Нам также будет полезен следующий результат.

Лемма 11.3. *Для симметричной аффинной связности имеет место тождество*

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X,$$

где X и Y — произвольные векторные поля.

Доказательство. Вычислим компоненту правой части проверяемого равенства в локальных координатах $(x^1, \dots, x^n)$. Имеем:

$$\begin{aligned}\big(\nabla_X Y - \nabla_Y X\big)^k &= X^i\Big(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \Gamma^k_{\alpha i}Y^\alpha\Big) - Y^i\Big(\frac{\partial X^k}{\partial x^i} + \Gamma^k_{\alpha i}X^\alpha\Big) = \\ &= X^i\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} - Y^i\frac{\partial X^k}{\partial x^i} + \Big(\Gamma^k_{\alpha i}X^iY^\alpha - \Gamma^k_{\alpha i}X^\alpha Y^i\Big).\end{aligned}$$

Слагаемое в скобках равно нулю в силу симметричности связности. Поэтому

$$\big(\nabla_X Y - \nabla_Y X\big)^k = X^i\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} - Y^i\frac{\partial X^k}{\partial x^i} = \big([X, Y]\big)^k,$$

что и требовалось.

11.3. Инвариантное определение тензора кривизны для симметричной связности

Пусть M — гладкое многообразие с симметричной аффинной связностью Γ, и X, Y и Z — векторные поля на M. Построим *оператор кривизны* R, положив

$$R(X, Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z.$$

Если $\mathcal{X}(M)$ — пространство векторных полей на M, то оператор кривизны — это отображение $R\colon \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$.

Лемма 11.4. *Отображение R трилинейно относительно умножения на функции и, поэтому, задает тензорное поле типа $(1,3)$, совпадающее с тензором кривизны.*

Доказательство. Пусть f — гладкая функция на многообразии M. Покажем сначала, что $R(X, Y)(fZ) = fR(X, Y)Z$. Действительно,

$$\begin{aligned}&R(X, Y)(fZ) = \nabla_X\nabla_Y(fZ) - \nabla_Y\nabla_X(fZ) - \nabla_{[X,Y]}(fZ) = \\ &= \nabla_X\big((\nabla_Y f)Z + f\nabla_Y Z\big) - \nabla_Y\big((\nabla_X f)Z + f\nabla_X Z\big) - (\nabla_{[X,Y]}f)Z - f\nabla_{[X,Y]}Z = \\ &= (\nabla_X\nabla_Y f)Z + (\nabla_Y f)\nabla_X Z + (\nabla_X f)\nabla_Y Z + f\nabla_X\nabla_Y Z - \\ &\qquad - (\nabla_Y\nabla_X f)Z - (\nabla_X f)\nabla_Y Z - (\nabla_Y f)\nabla_X Z - f\nabla_Y\nabla_X Z - \\ &\qquad\qquad - (\nabla_{[X,Y]}f)Z - f\nabla_{[X,Y]}Z = \\ &= f\big(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - f\nabla_{[X,Y]}Z\big) + \\ &\qquad + Z\big(\nabla_X\nabla_Y f - \nabla_Y\nabla_X f - \nabla_{[X,Y]}f\big).\end{aligned}$$

Второе слагаемое в этой сумме равно нулю, так как

$$\nabla_X \nabla_Y f - \nabla_Y \nabla_X f = X\big(Y(f)\big) - Y\big(X(f)\big) = [X,Y](f) = \nabla_{[X,Y]} f,$$

поэтому окончательно:

$$R(X,Y)(fZ) = f\big(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - f\nabla_{[X,Y]} Z\big) = fR(X,Y)(Z),$$

что и требовалось.

Покажем теперь, что $R(fX,Y)Z = fR(X,Y)Z$. Действительно:

$$R(fX,Y)Z = \nabla_{fX} \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_{fX} Z - \nabla_{[fX,Y]} Z.$$

Пользуясь очевидным равенством $\nabla_{fX} Z = f\nabla_X Z$ и правилом Лейбница для коммутатора получим:

$$\begin{aligned} R(fX,Y)Z &= f\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y\big(f\nabla_X Z\big) - \nabla_{f[X,Y]-Y(f)X} Z = \\ &= f\nabla_X \nabla_Y Z - (\nabla_Y f)\nabla_X Z - f\nabla_Y \nabla_X Z - f\nabla_{[X,Y]} Z + Y(f)\nabla_X Z = \\ &= f\big(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - f\nabla_{[X,Y]} Z\big), \end{aligned}$$

что и требовалось. Равенство $R(X,fY)Z = fR(X,Y)Z$ проверяется точно так же. Итак, мы проверили линейность отображения R по каждому аргументу.

Покажем теперь, что R задает тензорное поле типа $(1,3)$. Пусть $(x^1,\dots,x^n)$ — локальные координаты на M. Запишем векторные поля X, Y и Z в виде $X = X^\alpha \partial_{x^\alpha}$, $Y = Y^\beta \partial_{x^\beta}$ и $Z = Z^\gamma \partial_{x^\gamma}$ подставим полученные выражения в оператор кривизны. В силу доказанной линейности, имеем:

$$R(X,Y)Z = R(X^\alpha \partial_{x^\alpha}, Y^\beta \partial_{x^\beta})(Z^\gamma \partial_{x^\gamma}) = X^\alpha Y^\beta Z^\gamma R(\partial_{x^\alpha}, \partial_{x^\beta})(\partial_{x^\gamma}).$$

Величины $R(\partial_{x^\alpha}, \partial_{x^\beta})\partial_{x^\gamma}$ являются векторами, поэтому могут быть записаны в виде

$$R(\partial_{x^\alpha}, \partial_{x^\beta})\partial_{x^\gamma} = T^i_{\gamma\;\alpha\beta}\partial_{x^i}.$$

Сопоставим координатам $(x^1,\dots,x^n)$ набор величин $T^i_{\gamma\;\alpha\beta}$. Из доказанной линейности относительно умножения на функции вытекает, что при замене координат эти величины меняются по тензорному закону, т.е. являются компонентами тензорного поля. Лемма доказана.

Покажем теперь, что тензорное поле T, соответствующее оператору кривизны, совпадает с определенным нами выше тензором кривизны. Чтобы вычислить компоненты поля T в координатах $(x^1,\dots,x^n)$, следует найти значение $R(\partial_{x^\alpha}, \partial_{x^\beta})\partial_{x^\gamma}$ оператора кривизны на векторах канонического базиса. Поскольку коммутатор $[\partial_{x^\alpha}, \partial_{x^\beta}]$ координатных полей равен нулю, имеем:

$$R(\partial_{x^\alpha}, \partial_{x^\beta})\partial_{x^\gamma} = \nabla_{\partial_{x^\alpha}} \nabla_{\partial_{x^\beta}} \partial_{x^\gamma} - \nabla_{\partial_{x^\beta}} \nabla_{\partial_{x^\alpha}} \partial_{x^\gamma}.$$

Проделав вычисления, аналогичные приведенным в разделе о координатном определении тензора кривизны и воспользовавшись симметрией аффинной связности, получим

$$R(\partial_{x^\alpha}, \partial_{x^\beta})\partial_{x^\gamma} = \Big(\frac{\partial \Gamma^i_{\gamma\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma^i_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} + \Gamma^i_{k\alpha}\Gamma^k_{\gamma\beta} - \Gamma^i_{k\beta}\Gamma^k_{\gamma\alpha}\Big)\partial_{x^i},$$

откуда, компоненты $T^i_{\gamma\ \alpha\beta}$ совпадают с компонентами тензора кривизны, что и требовалось.

Замечание. Отметим, что $\nabla_{\partial_{x^p}}\nabla_{\partial_{x^q}}\partial_{x^k}$ — это векторное поле, а $\nabla_p\nabla_q\partial_{x^k}$ — тензор типа $(1,2)$, поэтому их приравнивать нельзя и, значит, нельзя воспользоваться вычислениями для $\nabla_p\nabla_q\partial_{x^k}$ непосредственно.

Задачи

Задача 11.1. Если A — квадратная вещественная матрица размера $(n\times n)$, то обозначим через V_A векторное поле в $\mathbb{R}^n$, заданное так: $V_A(x) = Ax$, $x\in\mathbb{R}^n$. Показать, что $[V_A, V_B] = V_{[B,A]}$, где слева стоит коммутатор векторных полей, а справа — векторное поле, порожденное коммутатором матриц.

Задача 11.2. Пусть на сфере $S^3\subset\mathbb{R}^4$, стандартно вложенной в $\mathbb{R}^4$, т.е. $\sum(x^i)^2 = 1$, заданы векторные поля X и Y, которые в произвольной точке $(x^1,x^2,x^3,x^4)\in S^3$ имеют вид

$$X = (x^2, -x^1, x^4, -x^3), \qquad Y = (x^3, x^4, -x^1, -x^2).$$

Найти $[X,Y]$.

Задача 11.3. Пусть $N\subset M$ — подмногообразие гладкого многообразия N, и пусть X и Y — гладкие поля на объемлющем многообразии M, касающиеся N в точках из N. Тогда определены ограничения $X|_N$ и $Y|_N$ полей на подмногообразие. Показать, что $[X,Y]|_N = [X|_N, Y_N]$, т.е. “коммутатор можно считать в объемлющем пространстве.”

Задача 11.4. Вычислить тензор кривизны одномерного многообразия с произвольной аффинной связностью.

Задача 11.5. Пусть $\bar\nabla$ — ковариантное дифференцирование в $\mathbb{R}^3$ в стандартной евклидовой связности. Рассмотрим новую операцию, заданную на векторах так:

$$\nabla_X Y = \bar\nabla_X Y + \frac{1}{2} X\times Y.$$

Показать, что это — ковариантное дифференцирование в некоторой связности. Вычислить ее тензоры кривизны и кручения.

Дополнительный материал

11.1. Скобки Пуассона. Пусть $M = M^{2n}$ — симплектическое многообразие с симплектической структурой ω. *Скобкой Пуассона* двух гладких функций f и g на M называется гладкая функция на M, заданная так:

$$\{f,g\} = \omega(\mathrm{sgrad}\, g, \mathrm{sgrad}\, f) = (\mathrm{sgrad}\, f)g.$$

В произвольных локальных координатах $(x^1, \dots, x^{2n})$ на M значение скобки Пуассона может быть вычислено по формуле

$$\{f, g\} = \omega^{ij} \frac{\partial g}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j},$$

где, напомним, через ω^{ij} обозначены компоненты матрицы, обратной к матрице (ω_{ij}) компонент формы ω.

Утверждение 11.4. *Операция взятия скобки Пуассона билинейна над $\mathbb{R}$, кососимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби*

$$\{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{f, \{g, h\}\} = 0$$

Доказательство. Первые два свойства очевидны из определения. Третье свойство докажем для случая $M = \mathbb{R}^{2n}$, $\omega = \sum dx^i \wedge dy^i$. (Напомним, что в силу теоремы Дарбу это предположение не меняет общности рассуждений.) Заметим, что выражение вида $\{h, \{f, g\}\}$ записывается в локальных координатах в виде суммы, каждое слагаемое которой содержит вторую производную функции f или g. Поэтому, если записать левую часть тождества Якоби в координатах, то вторые производные функции f входят в выражения $\{h, \{f, g\}\}$ и $\{g, \{h, f\}\}$. С другой стороны, пользуясь представлением скобки Пуассона в виде производной одной функции вдоль косого градиента другой и косой симметрией, имеем:

$$\{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = -\{h, \{g, f\}\} + \{g, \{h, f\}\} = -\{h, (\operatorname{sgrad} g) f\} + \{g, (\operatorname{sgrad} h) f\} =$$
$$= -(\operatorname{sgrad} h \operatorname{sgrad} g) f + (\operatorname{sgrad} g \operatorname{sgrad} h) f = [\operatorname{sgrad} g, \operatorname{sgrad} h] f.$$

Но полученное выражение, равное результату дифференцирования функции f вдоль векторного поля, не содержит вторых производных функции f. Поэтому вторые производные функции f входят в левую часть тождества Якоби с нулевым коэффициентом. Значит все слагаемые тождества Якоби равны нулю, что и требовалось.

Следствие 11.1. *Для произвольных гладких функций f и g на симплектическом многообразии имеет место следующее тождество*

$$\operatorname{sgrad}\{f, g\} = [\operatorname{sgrad} f, \operatorname{sgrad} g].$$

Доказательство. Для произвольной функции h, в силу определения косого градиента и скобки Пуассона, а также в силу ее косой симметрии и тождества Якоби, имеем

$$(\operatorname{sgrad}\{f, g\}) h = \omega(\operatorname{sgrad} h, \operatorname{sgrad}\{f, g\}) = \{\{f, g\}, h\} = -\{h, \{f, g\}\} =$$
$$= -\{g, \{f, h\}\} + \{f, \{g, h\}\} = [\operatorname{sgrad} f, \operatorname{sgrad} g](h),$$

что и требовалось.

Рассмотрим на симплектическом многообразии M гамильтонову систему уравнений $\dot{x} = \operatorname{sgrad} H$ с гамильтонианом H. Напомним, что функция f называется *первым интегралом* системы уравнений, если f постоянна на решениях этой системы. Наличие первых интегралов позволяет уменьшить количество неизвестных функций, перейдя к рассмотрению уравнений на поверхности уровня первого интеграла.

Утверждение 11.5. *Функция f является первым интегралом гамильтоновой системы $\dot{x} = \operatorname{sgrad} H$, если и только если $\{f, H\} = 0$.*

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что производная функции f вдоль решения системы $\dot{x} = \operatorname{sgrad} H$ равна $\operatorname{sgrad} H(f) = \{H, f\}$. Предложение доказано.

Лекция 12. Случай римановой связности (тензор Римана)

Пусть M — риманово многообразие с римановой связностью. Тензор кривизны римановой связности часто называют *тензором Римана* соответствующего риманова многообразия.

12.1. Новые симметрии тензора Римана

Мы начнем с доказательства тождества Якоби, которому удовлетворяет тензор кривизны произвольной симметричной аффинной связности.

Утверждение 12.1 (Тождество Якоби). *Пусть M — многообразие с симметричной аффинной связностью, и R — тензор кривизны этой связности. Тогда для любых векторных полей X, Y и Z имеет место равенство*

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0,$$

или, в локальных координатах, $R^i_{j\,pq} + R^i_{p\,qj} + R^i_{q\,jp} = 0.$

Доказательство. Заметим, что в силу полилинейности оператора кривизны R тождество Якоби достаточно проверить для координатных векторов, коммутаторы которых равны нулю. Поэтому тождество Якоби сводится к равенству

$$\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z + \nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_Z\nabla_Y X + \nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_X\nabla_Z Y,$$

где X, Y и Z — координатные векторные поля. Последнее равенство очевидно, так как в силу леммы 11.3

$$\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_X\nabla_Z Y = \nabla_X\big(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y\big) = \nabla_X[Y,Z] = 0.$$

Утверждение доказано.

Если многообразие M — риманово, и Γ — риманова связность, то тензор кривизны этой связности обладает дополнительными симметриями.

Утверждение 12.2. *Пусть M — риманово многообразие, Γ — риманова связность и R — соответствующий тензор кривизны.*

- *Для любых векторных полей X, Y, Z и W имеет место равенство $\big\langle R(X,Y)Z,W\big\rangle + \langle R(X,Y)W,Z\rangle = 0$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в римановой метрике. В локальных координатах имеем: $R_{ij\,pq} = -R_{ji\,pq}$, где $R_{ij\,pq} = g_{i\alpha}R^{\alpha}_{j\,pq}$.*

- *Для любых векторных полей X, Y, Z и W имеет место равенство $\big\langle R(X,Y)Z,W\big\rangle = \big\langle R(Z,W)X,Y\big\rangle$, или в локальных координатах:* $R_{ij\;pq} = R_{pq\;ij}$

Доказательство. Для доказательства первого свойства рассмотрим оператор $R(X,Y) = \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$ и изучим, как он действует на функциях. Очевидно

$$R(X,Y)(f) = X\big(Y(f)\big) - Y\big(X(f)\big) - [X,Y](f) = 0$$

для произвольной функции f. Поэтому требуемое равенство можно переписать в виде

$$0 = R(X,Y)\big(\langle Z,W\rangle\big) = \big\langle R(X,Y)Z,W\big\rangle + \big\langle Z,R(X,Y)W\big\rangle,$$

т.е. как аналог правила Лейбница для оператора $R(X,Y)$, действующего на скалярное произведение. Вычислим левую часть этого выражения.

$$\begin{gathered}R(X,Y)\big(\langle Z,W\rangle\big) = \nabla_X\big(\langle\nabla_Y Z,W\rangle + \langle Z,\nabla_Y W\rangle\big) - \\ - \nabla_Y\big(\langle\nabla_X Z,W\rangle + \langle Z,\nabla_X W\rangle\big) - \langle\nabla_{[X,Y]}Z,W\rangle - \langle Z,\nabla_{[X,Y]}W\rangle = \\ = \langle\nabla_X\nabla_Y Z,W\rangle + \langle\nabla_Y Z,\nabla_X W\rangle + \langle\nabla_X Z,\nabla_Y W\rangle + \\ + \langle Z,\nabla_X\nabla_Y W\rangle - \langle\nabla_Y\nabla_X Z,W\rangle - \langle\nabla_X Z,\nabla_Y W\rangle - \\ - \langle\nabla_Y Z,\nabla_X W\rangle - \langle Z,\nabla_Y\nabla_X W\rangle - \langle\nabla_{[X,Y]}Z,W\rangle - \langle Z,\nabla_{[X,Y]}W\rangle.\end{gathered}$$

После сокращения получаем

$$\begin{aligned}R(X,Y)\big(\langle Z,W\rangle\big) &= \langle\nabla_X\nabla_Y Z,W\rangle - \langle\nabla_Y\nabla_X Z,W\rangle - \langle\nabla_{[X,Y]}Z,W\rangle + \\ &\quad + \langle Z,\nabla_X\nabla_Y W\rangle - \langle Z,\nabla_Y\nabla_X W\rangle - \langle Z,\nabla_{[X,Y]}W\rangle = \\ &= \langle R(X,Y)Z,W\rangle + \langle Z,R(X,Y)W\rangle,\end{aligned}$$

что и доказывает первое свойство.

Второе свойство вытекает из уже доказанных нами симметрий тензора кривизны. Действительно, умножив тождество Якоби для полей X, Y и Z скалярно на W, мы получим равенство

$$\underbrace{\langle R(X,Y)Z,W\rangle}_{0} + \underbrace{\langle R(Y,Z)X,W\rangle}_{1} + \underbrace{\langle R(Z,X)Y,W\rangle}_{2} = 0.$$

Аналогично, сделав циклические перестановки всех четырех аргументов, найдем

$$\begin{aligned}\underbrace{\langle R(Y,Z)W,X\rangle}_{1} + \underbrace{\langle R(Z,W)Y,X\rangle}_{3} + \underbrace{\langle R(W,Y)Z,X\rangle}_{4} &= 0,\\ \underbrace{\langle R(Z,W)X,Y\rangle}_{3} + \underbrace{\langle R(W,X)Z,Y\rangle}_{5} + \underbrace{\langle R(X,Z)W,Y\rangle}_{2} &= 0,\\ \underbrace{\langle R(W,X)Y,Z\rangle}_{5} + \underbrace{\langle R(X,Y)W,Z\rangle}_{0} + \underbrace{\langle R(Y,W)X,Z\rangle}_{4} &= 0.\end{aligned}$$

Заметим теперь, что слагаемые, помеченные 0, 1, 3 и 5 отличаются знаком в силу тождества $\langle R(X,Y)Z,W\rangle = -\langle R(X,Y)W,Z\rangle$, а слагаемые, помеченные 2 и 4, совпадают в силу того же тождества и косой симметрии $R(X,Y) = R(Y,X)$. Поэтому, обозначив слагаемое, помеченное цифрой k через $\#k$, и сложив все четыре уравнения, получим

$$(\#0+\#1+\#2)+(-\#1+\#3+\#4)+(-\#3+\#5+\#2)+(-\#5-\#0+\#4) = \\ = 2(\#2+\#4) = 0,$$

т.е.

$$\langle R(Z,X)Y,W\rangle + \langle R(W,Y)Z,X\rangle = \langle R(Z,X)Y,W\rangle - \langle R(Y,W)Z,X\rangle = 0,$$

что и требовалось. Утверждение доказано.

Поскольку евклидовы координаты в смысле римановой связности — это, как мы уже знаем, то же самое, что евклидовы координаты для римановой метрики, тензор кривизны на римановом многообразии отвечает за возможность выбора локальных координат, в которых метрика постоянна. А именно, имеет место следующее утверждение.

Утверждение 12.3. *Если тензор кривизны на римановом многообразии не равен нулю, то на этом многообразии нельзя ввести координаты, в которых компоненты метрики были бы постоянны.*

Замечание. Отметим, что при этом тензор кривизны достаточно вычислить в любой системе координат, поэтому это утверждение действительно эффективно.

Замечание. На самом деле имеет место и обратное утверждение: *если тензор кривизны риманова многообразия равен нулю, то в окрестности каждой точки существуют координаты, в которых метрика постоянна.*

Тензор кривизны — это очень сложный объект: он имеет $(\dim M)^4$ компонент (на самом деле, в силу симметрий независимых компонент меньше, см. ниже).

Упражнение 12.1. Сколько независимых компонент имеет тензор кривизны n-мерного риманова многообразия? Разобрать отдельно случаи $n = 2$ и $n = 3$.

Часто изучают различные свертки тензора кривизны, которые, оказывается тоже несут в себе определенную геометрическую информацию. Особенно часто встречаются две таких свертки.

Тензором Риччи римановой связности называется тензор $C_2^1(R)$, где R — тензор кривизны этой связности. Компоненты тензора Риччи $\tilde{R}$, очевидно, выглядят так: $\tilde{R}_{ij} = R^{\alpha}_{i\,\alpha j} = g^{\alpha\beta}R_{\beta i\,\alpha j}$. Из последней формулы ясно, что тензор Риччи симметричен. Далее, *скалярной кривизной*

R риманова многообразия называется полная свертка тензора Риччи, у которого предварительно поднимают индекс: $R = g^{\alpha\beta}\tilde{R}_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}R^i_{\alpha\ i\beta}$. Один пример использования этих сверток мы разберем ниже.

Нам также полезно будет найти явный вид компонент тензора кривизны римановой связности в терминах компонент римановой метрики. Ясно, что если $(x^1, \dots, x^n)$ — локальные координаты на римановом многообразии M, то компонента $R_{ij\ pq}$ тензора кривизны, у которого опущен верхний индекс, может быть вычислена так:

$$R_{ij\ pq} = \langle R(\partial_p, \partial_q)\partial_j, \partial_i\rangle,$$

где $\partial_k \equiv \partial_{x^k}$ — вектора из канонического базиса. Так как координатные векторные поля коммутируют, см. утверждение 11.2, можно переписать это выражение в виде

$$R_{ij\ pq} = \langle \nabla_{\partial_p}\nabla_{\partial_q}\partial_j, \partial_i\rangle - \langle \nabla_{\partial_q}\nabla_{\partial_p}\partial_j, \partial_i\rangle.$$

Вычислим первое слагаемое (второе получается из него перестановкой индексов). Для этого, воспользовавшись тем, что связность согласована с метрикой, перепишем это слагаемое в виде

$$\langle \nabla_{\partial_p}\nabla_{\partial_q}\partial_j, \partial_i\rangle = \nabla_{\partial_p}\big(\langle \nabla_{\partial_q}\partial_j, \partial_i\rangle\big) - \langle \nabla_{\partial_q}\partial_j, \nabla_{\partial_p}\partial_i\rangle.$$

Так как в силу леммы 7.4

$$\nabla_{\partial_q}\partial_j = \Gamma^\alpha_{jq}\partial_\alpha,$$

а $\langle \partial_i, \partial_j\rangle = g_{ij}$ — компонента римановой метрики, имеем:

$$\langle \nabla_{\partial_p}\nabla_{\partial_q}\partial_j, \partial_i\rangle = \frac{\partial}{\partial x^p}\Big(\Gamma^\alpha_{jq}g_{i\alpha}\Big) - g_{\alpha\beta}\Gamma^\alpha_{jq}\Gamma^\beta_{ip}.$$

Далее, вспомним, что символы Кристоффеля римановой связности выражаются через компоненты метрики так:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{i\alpha}\Big(\frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{k\alpha}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\alpha}\Big).$$

Поэтому

$$\Gamma^\alpha_{jq}g_{i\alpha} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{qi}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jq}}{\partial x^i}\Big),$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial x^p}\Big(\Gamma^\alpha_{jq}g_{i\alpha}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 g_{ji}}{\partial x^q\partial x^p} + \frac{\partial^2 g_{qi}}{\partial x^j\partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{jq}}{\partial x^i\partial x^p}\Big).$$

Таким образом,

$$\langle \nabla_{\partial_p}\nabla_{\partial_q}\partial_j, \partial_i\rangle = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 g_{ji}}{\partial x^q\partial x^p} + \frac{\partial^2 g_{qi}}{\partial x^j\partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{jq}}{\partial x^i\partial x^p}\Big) - g_{\alpha\beta}\Gamma^\alpha_{jq}\Gamma^\beta_{ip}.$$

Поэтому

$$
\begin{aligned}
R_{ij\,pq} &= \langle \nabla_{\partial_p}\nabla_{\partial_q}\partial_j, \partial_i\rangle - \langle \nabla_{\partial_q}\nabla_{\partial_p}\partial_j, \partial_i\rangle = \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 g_{qi}}{\partial x^j \partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{jq}}{\partial x^i \partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{pi}}{\partial x^j \partial x^q} + \frac{\partial^2 g_{jp}}{\partial x^i \partial x^q}\Big) - g_{\alpha\beta}(\Gamma^\alpha_{jq}\Gamma^\beta_{ip} - \Gamma^\alpha_{jp}\Gamma^\beta_{iq}).
\end{aligned}
$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 12.4. *Пусть M — риманово многообразие. Тогда компоненты тензора кривизны римановой связности на многообразии M в координатах $(x^1, \ldots, x^n)$ могут быть вычислены по формуле*

$$
R_{ij\,pq} == \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 g_{qi}}{\partial x^j \partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{jq}}{\partial x^i \partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{pi}}{\partial x^j \partial x^q} + \frac{\partial^2 g_{jp}}{\partial x^i \partial x^q}\Big) - g_{\alpha\beta}(\Gamma^\alpha_{jq}\Gamma^\beta_{ip} - \Gamma^\alpha_{jp}\Gamma^\beta_{iq}),
$$

где g_{ij} — компоненты римановой метрики, а Γ^i_{jk} — символы Кристоффеля в координатах $(x^1, \ldots, x^n)$.

12.2. Тензор кривизны двумерной поверхности

В качестве иллюстрации, мы вычислим тензор кривизны римановой связности для регулярной двумерной поверхности M^2 в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ (метрика на M^2, естественно, индуцируется из $\mathbb{R}^3$). В частности, мы получим еще одно доказательство знаменитой теоремы Гаусса о независимости гауссовой кривизны от изометрии поверхности.

Итак, пусть $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ — регулярная двумерная поверхность, и P — произвольная точка на ней. Введем в $\mathbb{R}^3$ специальную декартову систему координат: поместим начало ее в точку P, оси x и y расположим в касательной плоскости $T_P M$, а ось z — по нормали к поверхности. Тогда, очевидно, поверхность M в окрестности точки P представляет собой график некоторой гладкой функции $z = f(x, y)$, причем $df(P) = 0$. Поэтому в координатах (x, y) на поверхности M матрица первой квадратичной формы имеет вид

$$
(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 + f_x f_x & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y f_y \end{pmatrix},
$$

где нижним индексом обозначено частное дифференцирование по соответствующей координате, причем в точке P метрика (g_{ij}) — это единичная матрица, а символы Кристоффеля $\Gamma^i_{jk} = 0$, так как все частные производные $\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$ в точке P равны нулю.

Теперь все готово для вычисления тензора кривизны. В случае двумерного многообразия тензор кривизны R имеет, вообще говоря, 16 компонент $R_{ij\,pq}$. Однако, в силу косых симметрий тензора кривизны, среди этих компонент отличны от нуля лишь те, у которых первые два и последние два индекса различны. Таких компонент четыре, причем они отличаются друг от друга знаками:

$$R_{12\,12} = -R_{21\,12} = R_{21\,21} = -R_{12\,21}.$$

В силу утверждения 12.4 и равенства символов Кристоффеля в точке P нулю, компонента $R_{12\,12}$ может быть вычислена так:

$$R_{12\,12} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 g_{21}}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x \partial x} - \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial y \partial y} + \frac{\partial^2 g_{21}}{\partial x \partial y}\Big) = \frac{1}{2}\Big(2\frac{\partial^2 g_{21}}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x \partial x} - \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial y \partial y}\Big),$$

где $x^1 = x$ и $x^2 = y$. Воспользовавшись явным видом метрики g_{ij}, найдем:

$$\begin{aligned} R_{12\,12} &= \frac{1}{2}\big(2(f_x f_y)_{xy} - (1 + (f_y)^2)_{xx} - (1 + (f_x)^2)_{yy}\big) = \\ &= (f_{xx} f_y + f_x f_{yx})_y - (f_x f_{xy})_y - (f_y f_{yx})_x. \end{aligned}$$

Наконец, запишем значение компоненты $R_{12\,12}$ в точке P, в которой, напомним, все первые частные производные функции f обращаются в нуль, поэтому соответствующие слагаемые можно не писать:

$$R_{12\,12} = f_{xx} f_{yy} + f_{xy} f_{xy} - f_{xy} f_{xy} - f_{yx} f_{yx} = f_{xx} f_{yy} - f_{yx} f_{yx} = K(P),$$

где через $K(P)$ обозначена гауссова кривизна поверхности M в точке P. (Напомним, что гауссова кривизна вычисляется как отношение определителей первой и второй квадратичных форм. Определитель первой квадратичной формы в точке P равен единице. Вторая квадратичная форма поверхности M в точке P в координатах (x, y) совпадает с матрицей Гессе функции f.) Итак, компонента $R_{12\,12}$ в координатах (x, y) совпадает с гауссовой кривизной поверхности. Вычислим теперь скалярную кривизну $R(P)$ поверхности M в точке P. По определению,

$$R(P) = g^{\alpha\beta} R^i_{\alpha\ i\beta} = g^{\alpha\beta} g^{ij} R_{j\alpha\ i\beta}.$$

В силу косых симметрий тензора $R_{j\alpha\ i\beta}$ имеем:

$$\begin{aligned} R(P) &= g^{22} g^{11} R_{12\,12} + g^{12} g^{12} R_{21\,12} + g^{22} g^{11} R_{21\,21} + g^{12} g^{12} R_{12\,21} = \\ &= R_{12\,12}(g^{22} g^{11} - g^{12} g^{12} + g^{22} g^{11} - g^{12} g^{12}) = \frac{2R_{12\,12}}{\det(g_{ij})}. \end{aligned}$$

В частности, в точке P имеем

$$R(P) = 2K(P).$$

Отметим, что последнее равенство — это равенство скаляров, поэтому оно не зависит от выбора системы координат. Итак, нами доказан следующий результат.

Утверждение 12.5. *Пусть M — регулярная поверхность в $\mathbb{R}^3$. Тогда ее скалярная кривизна равна удвоенной гауссовой кривизне.*

Следствие 12.1 (Теорема Гаусса). *Гауссова кривизна двумерной регулярной поверхности полностью определяется первой квадратичной формой этой поверхности. В частности, гауссова кривизна не меняется при изометриях.*

Доказательство. Это очевидно, так как компоненты тензора кривизны римановой связности полностью определяются компонентами метрического тензора.

12.3. Независимые компоненты тензора Римана

В предыдущем разделе мы убедились, что тензор Римана двумерного многообразия имеет лишь одну независимую компоненту, а именно $R_{12\,12}$. Это означает, что все остальные компоненты или равны нулю, или вычисляются по $R_{12\,12}$ (на самом деле, не нулевые компоненты или совпадают с $R_{12\,12}$, или отличаются знаком, см. выше).

Сосчитаем теперь количество независимых компонент тензора Римана в общем случае n-мерного риманова многообразия. Для этого воспользуемся известными нам симметриями этого тензора, см. утверждения 12.1 и 12.2. Во-первых, тензор Римана $R_{ij\,kl}$ кососимметричен по первой $i\,j$ и последней $k\,l$ парам индексов. Это означает, что каждая из этих пар принимает $N = C_n^2$ независимых значений. Далее, тензор Римана симметричен относительно перестановки первой и последней пар индексов. Другими словами, если $I = i\,j$ и $K = k\,l$ — мультииндексы, то $R_{IK} = R_{KL}$. Таким образом, у нас имеется симметричная «матрица», индексы I и K которой принимают N значений. Такая «матрица» имеет $N(N+1)/2$ независимых компонент. Итак, мы учли все известные симметрии тензора Римана, кроме тождества Якоби, и получили

$$\frac{N(N+1)}{2} = \frac{n(n-1)/2\big(n(n-1)/2+1\big)}{2} = \frac{(n^2-n)(n^2-n+2)}{8}$$

компонент.

Итак, нам остается учесть тождества Якоби. Вообще говоря, тождество Якоби следует записывать для каждой четверки индексов. Каждое такое тождество представляет собой линейное уравнение на компоненты тензора Римана. Вычислим, сколько среди этих уравнений нетривиальных и независимых. Имеет место следующая лемма.

Лемма 12.1. *Если среди четверки индексов i, j, k, l есть пара совпадающих, то тождество Якоби вытекает из других симметрий тензора Римана. Если две четверки индексов i, j, k, l и i_1, j_1, k_1, l_1 получены друг из друга перестановкой, то соответствующие тождества Якоби равносильны.*

Доказательство. Докажем первое утверждение леммы. Если, например, совпадают первые два индекса, то имеем:

$$R_{ii\,kl}+R_{ik\,li}+R_{il\,ik}=0+R_{ik\,li}+R_{il\,ik}=R_{ik\,li}+R_{ik\,il}=R_{ik\,li}-R_{ik\,li}=0.$$

Остальные случаи разбираются аналогично.

Второе утверждение леммы достаточно проверить для транспозиций. Сравним, например, тождества Якоби

$$R_{ij\,kl}+R_{ik\,lj}+R_{il\,jk}=0 \qquad \text{и} \qquad R_{ji\,kl}+R_{jk\,li}+R_{jl\,ik}=0,$$

отличающиеся транспозицией (ij). Так как, в силу известных симметрий, $R_{ji\,kl}=-R_{ij\,kl}$, $R_{jk\,li}=R_{li\,jk}=-R_{il\,jk}$, а $R_{jl\,ik}=R_{ik\,jl}=-R_{ik\,lj}$, имеем:

$$R_{ji\,kl}+R_{jk\,li}+R_{jl\,ik}=-R_{ij\,kl}-R_{il\,jk}-R_{ik\,lj},$$

т.е. второе выписанное нами тождество вытекает из первого. Остальные случаи разбираются аналогично. Лемма доказана.

Из доказанной нами Леммы 12.1 вытекает, что среди тождеств Якоби следует учитывать в точности те, которые отвечают различным четверкам попарно различных индексов. Таких четверок, а значит и тождеств, тождеств имеется C_n^4. Таким образом, число независимых компонент тензора Римана равно

$$\frac{(n^2-n)(n^2-n+2)}{8}-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}=\frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

Мы доказали следующий результат.

Утверждение 12.6. *Количество независимых компонент тензора Римана n-мерного риманова многообразия равно $n^2(n^2-1)/12$.*

Упражнение 12.2. В частном случае $n=3$, число независимых компонент тензора Римана равно 6, т.е. их ровно столько же, сколько компонент у тензора Риччи в этом случае (напомним, тензор Риччи — это симметричный тензор типа $(0,2)$). Показать, что компоненты тензора Римана в трехмерном случае выражаются через компоненты тензора Риччи.

М. Громов в своих замечательных лекциях о тензоре Римана[5] приводит следующее рассуждение, объясняющее правдоподобность теоремы, обратной к утверждению 12.3: *если тензор кривизны риманова многообразия равен нулю, то в окрестности каждой точки существуют координаты, в которых метрика постоянна.* Громов предлагает воспользоваться соображениями размерности. А именно, пусть $(y^1,\dots,y^n)$ —

[5]М. Громов, Знак и геометрический смысл кривизны, Ижевск, Издательский дом «Удмуртский университет», 1999.

некоторые координаты на n-мерном римановом многообразии в окрестности точки P, и (g_{ij}) — компоненты метрического тензора в этих координатах. Наша цель — выбрать на многообразии такие новые координаты $x^i = x^i(y^1, \dots, y^n)$, что в них компоненты метрического тензора будут постоянны. Хорошо известно, что линейной заменой координат можно добиться того, что в точке P компоненты метрики будут иметь вид δ_{ij}. При этом, очевидно, линейная замена определяется первыми производными $\dfrac{\partial x^i}{\partial y^j}$ в точке P. Далее, нетривиальным, но тоже хорошо известным является тот факт, что можно подобрать такую замену координат, что и первые производные компонент метрического тензора (в новых координатах) окажутся равными нулю в точке P. Соответствующая конструкция была описана выше, однако эта возможность может быть предсказана из размерностных соображений. А именно, различных первых производных $\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$ метрики имеется $M = n^2(n+1)/2$ штук ($n(n+1)/2$ функций и n дифференцирований). Первые производные метрики определяются, очевидно, вторыми производными $\dfrac{\partial x^i}{\partial y^j \partial y^k}$ координат, которых в нашем распоряжении имеется тоже $M = n^2(n+1)/2$ штук (n функций и $n(n+1)/2$ дифференцирований). Таким образом, управляя M параметрами мы зануляем M величин.

Следующий шаг состоит в попытке обратить в нуль вторые производные метрики, управляя третьими производными координат. Вторых производных от метрики $n^2(n+1)^2/4$ штук ($n(n+1)/2$ функций и столько же дифференцирований), третьих производных от координат — nC^3_{n+2} штук (n функций и C^3_{n+2} дифференцирований). Таким образом, количество производных больше имеющегося у нас в распоряжении количества параметров на

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{(n+2)(n+1)n^2}{6} = \frac{n^2(n^2-1)}{12},$$

что в точности равно числу независимых компонент тензора Римана. Оказывается (еще раз подчеркнем, что мы и не думали этого доказывать), как раз обращение в нуль компонент тензора Римана позволяет обратить в нуль вторые производные метрики, а вслед за этим сделать метрику постоянной в целой окрестности точки P.

Задачи

Задача 12.1. Вычислить скалярную кривизну сферы радиуса R, плоскости Лобачевского, прямого кругового цилиндра.

Задача 12.2. Пусть S^n — стандартная сфера радиуса R в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$. Показать, что ее тензор кривизны может быть задан формулой

$$R(X,Y)Z = \frac{1}{R^2}\Big(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y\Big).$$

Задача 12.3. Риманово многообразие называется *пространством Эйнштейна*, если $\tilde{R}_{ij} = \lambda(x) g_{ij}$, т.е. метрический тензор пропорционален тензору Риччи. Показать, что любое двумерное риманово многообразие является пространством Эйнштейна.

Задача 12.4. На трехмерном римановом многообразии выразить компоненты тензора кривизны через компоненты тензора Риччи, метрику и скалярную кривизну.

Дополнительный материал

12.1. Тензор Римана трехмерного риманова многообразия. Как следует из утверждения 12.6, тензор кривизны трехмерного риманова многообразия имеет 6 независимых компонент. Напомним, что тензор Риччи $\tilde{R}_{ij}$ представляет собой симметричную билинейную форму, поэтому тоже имеет 6 независимых компонент. Покажем, что в трехмерном случае компоненты тензора Римана выражаются через компоненты тензора Риччи.

По определению, $\tilde{R}_{ij} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha i\, \beta j}$, $1 \le i \le j \le 3$. Посмотрим на эти 6 соотношений как на систему линейных уравнений на неизвестные $R_{\alpha i\, \beta j}$. Из симметрий тензора Римана вытекает, что достаточно найти компоненты $R_{\alpha i\, \beta j}$ тензора Римана, для которых $\alpha < i$, $\beta < j$ и пара (α, i) не превосходит пары (β, j) в естественном лексикографическом порядке (т.е. или $\alpha < \beta$, или $\alpha = \beta$ и $i \le j$). Таких компонент, как мы знаем, 6. Вот их полный список:

$$R_{12\,12}, \quad R_{12\,13}, \quad R_{12\,23}, \quad R_{13\,13}, \quad R_{13\,23}, \quad R_{23\,33}.$$

Итак, у нас имеется 6 линейных уравнений на 6 неизвестных. Компоненты матрицы этой линейной системы выражаются через компоненты метрического тензора g^{ij}. А именно,

$$\begin{aligned}
R_{11} &= g^{22} R_{12\,12} + 2g^{23} R_{12\,13} + g^{33} R_{13\,13},\\
R_{22} &= g^{11} R_{12\,12} - 2g^{13} R_{12\,23} + g^{33} R_{23\,23},\\
R_{33} &= g^{11} R_{13\,13} + 2g^{12} R_{13\,23} + g^{22} R_{23\,23},\\
R_{12} &= -g^{12} R_{12\,12} - g^{13} R_{12\,13} + g^{23} R_{12\,23} + g^{33} R_{13\,23}\\
R_{13} &= -g^{12} R_{12\,13} - g^{22} R_{12\,23} - g^{13} R_{13\,13} - g^{23} R_{13\,23}\\
R_{23} &= g^{11} R_{12\,13} + g^{12} R_{12\,23} - g^{13} R_{13\,23} - g^{23} R_{23\,23}.
\end{aligned}$$

Определитель этой системы равен $2(\det g^{ij})^2$, поэтому не равен нулю. Таким образом, система всегда разрешима, что и позволяет выразить компоненты тензора Римана через компоненты метрики и тензор Риччи.

Лекция 13. Степень отображения

В этой и следующей лекции мы приведем несколько иллюстраций, демонстрирующих связь дифференциальной геометрии и топологии. Один пример результатов подобного рода у нас уже был, а именно, теория когомологий де Рама. Здесь мы рассмотрим ряд конструкций, связанных с понятием степени отображения, к определению которого мы и переходим.

13.1. Определение и основные свойства степени

Пусть M и N — гладкие связные замкнутые (т.е., напомним, компактные и без края) ориентированные многообразия одной и той же размерности n, и $f\colon M \to N$ — гладкое отображение. Пусть $y \in N$ — регулярное значение отображения f. Последние, напомним, означает, что отображение f регулярно в каждой точке x прообраза $f^{-1}(y)$ точки y при отображении f. Другими словами, если $(x^1, \dots, x^n)$ и $(y^1, \dots, y^n)$ — локальные координаты в окрестности точки $x \in f^{-1}(y)$ и точки y соответственно, и $y^i(x^1, \dots, x^n)$ — координатное представление отображения f в этих координатах, то определитель матрицы Якоби $\dfrac{\partial y^i}{\partial x^k}$ в точке x отличен от нуля. Отметим, что если прообраз точки y пуст, то y — регулярное значение по определению.

Из компактности M вытекает (проверьте!), что прообраз $f^{-1}(y)$ состоит из конечного числа точек. Отметим также, что в силу ориентируемости рассматриваемых многообразий, можно считать, что знак определителя матрицы Якоби $\dfrac{\partial y^i}{\partial x^k}$ в точке x не зависит от выбора локальных координат (для этого следует фиксировать ориентации на обоих многообразиях). Из сказанного вытекает корректность следующего определения.

Определение. Пусть $f\colon M \to N$ — гладкое отображение гладких компактных связных замкнутых ориентируемых многообразий одинаковой размерности, и $y \in N$ — некоторое его регулярное значение. *Степенью отображения f по отношению к регулярному значению y* называется число

$$\deg f(y) = \sum_{x_\alpha \in f^{-1}(y)} \operatorname{sign} \det\Big(\frac{\partial y^i}{\partial x^k}(x_\alpha)\Big).$$

Важность понятия степени определяется следующим результатом.

Теорема 13.1. *Пусть $f\colon M \to N$ — гладкое отображение гладких связных замкнутых ориентируемых многообразий одинаковой размерности. Тогда степень отображения f не зависит от выбора регулярного значения и не меняется при гомотопиях отображения.*

Доказательство. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 13.1. *Пусть P и P' — две произвольные точки связного многообразия M. Тогда существует гладкое семейство диффеоморфизмов $\varphi_t\colon M \to M$, $t \in [0,1]$, такое что φ_0 — тождественное отображение, а $\varphi_1(P) = P'$. Более того, если многообразие M ориентировано, то диффеоморфизмы φ_t сохраняют ориентацию.*

Доказательство. Пусть $n = \dim M$. В силу связности многообразия M, точки P и P' можно соединить простым регулярным путем, поэтому можно выбрать открытое множество $U \subset M$, диффеоморфное $\mathbb{R}^n$ и содержащее обе точки P и P' (для этого достаточно взять малую окрестность упомянутого пути). Более того, в U можно выбрать такую локальную систему координат $(x^1, \dots, x^n)$, что $P = (0, \dots, 0)$, $P' = (1, 0, \dots, 0)$, а выбранный путь — это первая координатная линия.

Рассмотрим открытые подмножества U' и U'' в U, обладающие следующими свойствами: $[P, P'] \subset U' \subset U'' \subset \bar{U}'' \subset U$, и замыкание $\bar{U}''$ компактно. Тогда, как известно, существует гладкая функция ψ на U, равная 1 в U' и нулю вне U''. В окрестности U, во введенных координатах $(x^1, \dots, x^n)$, рассмотрим векторное поле $X = \psi\partial_{x^1}$, и пусть φ'_t — однопараметрическая группа диффеоморфизмов, соответствующая X, т.е. $X = d\varphi'_t/dt|_{t=0}$, существование которой известно из теории обыкновенных дифференциальных уравнений.[6] По определению, при $t = 0$ диффеоморфизм φ'_t является тождественным преобразованием, а $\varphi'_1(P) = P'$. Более того, все φ'_t являются тождественными отображениями вне U''. Продолжим семейство диффеоморфизмов φ'_t вне окрестности U тождественным преобразованием. Тем самым мы построим искомое семейство φ_t. Осталось заметить, что в локальных координатах $(x^1, \dots, x^n)$ отображение φ_t — это просто сдвиг вдоль координаты x^1, поэтому оно сохраняет ориентацию. Доказательство закончено.

Вернемся к доказательству теоремы. Из леммы 13.1 вытекает, что ее первое утверждение является следствием второго. Действительно, пусть y и y' — регулярные значения отображения f. Тогда, в силу леммы 13.1, существует однопараметрическое семейство диффеоморфизмов φ_t многообразия N, такое что $\varphi_0 = 1_N$, и $\varphi_1(y) = y'$. Ясно, что точка y является регулярной для всех отображений $\varphi_t \circ f$. Из второго утверждения теоремы вытекает, что $\deg f(y) = \deg \varphi_t \circ f(y)$. Поэтому, в частности, $\deg f(y) = \deg \varphi_1 \circ f(y)$. Осталось заметить, что якобиан отображения

[6] Напомним, что диффеоморфизмы φ'_t получаются так. Пусть $\dot{x}(t) = X(x)$ — система обыкновенных дифференциальных уравнений, и $x = x(t, x_0)$ — решение задачи Коши для начальных условий $x(0) = x_0$. Тогда отображение $x_0 \mapsto x(t, x_0)$ и есть диффеоморфизм φ'_t. Гладкость и взаимная однозначность отображений φ'_t — следствия теорем существования, единственности и гладкой зависимости от начальных условий решения задачи Коши.

$\varphi_1 \circ f$ в каждой точке из $(\varphi_1 \circ f)^{-1}(y)$ равен произведению положительного якобиана отображения φ_1 в точке y и якобиана отображения f в соответствующей точке из $f^{-1}(y')$, откуда $\deg(\varphi_1 \circ f)(y) = \deg f(y')$, что и требовалось. Итак, для завершения доказательства теоремы достаточно проверить инвариантность степени отображения при гомотопиях этого отображения.

Пусть f и g — два гомотопных отображения многообразия M в многообразие N, и $F\colon [0,1]\times M \to N$ — гладкая гомотопия, их соединяющая: $f = F|_{\{0\}\times M}$, а $g = F|_{\{1\}\times M}$. Пусть $y \in N$ — регулярное значение обоих отображений (такое найдется в силу теоремы Сарда). Из теоремы о неявной функции вытекает, что каждая достаточно близкая к y точка $y' \in N$ также является регулярным значением для обоих отображений. Кроме того, для любого достаточно близкого к y регулярного значения y' имеем: $\deg f(y') = \deg f(y)$, а $\deg g(y') = \deg g(y)$. Далее, снова по теореме Сарда, в любой окрестности точки y существует точка y', являющаяся регулярным значением для отображения F. Итак, выберем y' так, чтобы y' была регулярным значением F, f и g, и выполнялись условия $\deg f(y') = \deg f(y)$, и $\deg g(y') = \deg g(y)$. Ясно, что доказательство достаточно провести для такой точки y'.

По теореме о неявной функции, прообраз $F^{-1}(y')$ является одномерным подмногообразием в $[0,1]\times M$. Более того, легко показать, что край $\partial F^{-1}(y')$ лежит в крае многообразия $[0,1]\times M$, т.е. в объединении $\bigl(\{0\}\times M\bigr) \cup \bigl(\{1\}\times M\bigr)$. Так как прообраз $\partial F^{-1}(y')$ — замкнутое, и, значит, компактное подмножество в M, этот прообраз состоит из конечного набора замкнутых кривых, диффеоморфных окружности, и незамкнутых кривых, диффеоморфных отрезку.

Обозначим через I_k незамкнутые кривые из $\partial F^{-1}(y')$. Концы a_k и b_k отрезков I_k лежат на крае многообразия $[0,1]\times M$ и составляют множество $f^{-1}(y') \cup g^{-1}(y')$. Более того, так как точки a_k и b_k являются регулярными для отображений f и g, векторы скоростей каждой кривой I_k в этих ее концевых точках не касаются края многообразия $[0,1]\times M$ (иначе дифференциал соответствующего отображения f или g переводит их в нуль).

Для завершения доказательства теоремы, покажем, что если концы a_k и b_k отрезка I_k лежат в одной компоненте связности края многообразия $[0,1]\times M$, то знаки якобианов ограничения отображения F на эту компоненту (т.е. знаки якобианов одного из отображений f и g) в точках a_k и b_k противоположны, а если a_k и b_k лежат в разных компонентах связности, то знаки якобианов отображений f и g в этих точках одинаковы. Это завершит доказательство теоремы, так как в первом случае точки a_k и b_k дают нулевой вклад в степень соответствующего отображения f или g, а во втором случае — дают одинаковый вклад в степени обоих отображений f и g.

Для каждого I_k рассмотрим на нем стандартную координату φ, такую что точка a_k соответствует $\varphi = 0$, а точка b_k соответствует $\varphi = 1$. На многообразии $[0,1] \times M$ рассмотрим системы координат следующего вида. Пусть t — стандартная координата на отрезке $[0,1]$, а $(x^1, \dots, x^n)$ — координаты на M из ориентированного атласа, определенные в некотором открытом множестве $U \subset M$. Тогда $(t, x^1, \dots, x^n)$ — это координаты на $[0,1] \times U$, порождающие ориентированный атлас на $[0,1] \times M$.

Пусть a_k и b_k лежат в одной связной компоненте края многообразия $[0,1] \times M$. Предположим для определенности, что a_k и b_k лежат на компоненте $\{0\} \times M$. Пусть $U_\alpha \subset M$ и $U_\beta \subset M$ — некоторые окрестности точек a_k и b_k соответственно, а $(x^1_\alpha, \dots, x^n_\alpha)$ и $(x^1_\beta, \dots, x^n_\beta)$ — координаты в U_α и U_β из ориентированного атласа на M. Как и выше, рассмотрим на $[0,1] \times U_\alpha$ и $[0,1] \times U_\beta$ координаты $(t, x^1_\alpha, \dots, x^n_\alpha)$ и $(t, x^1_\beta, \dots, x^n_\beta)$. Тогда в некоторой окрестности точки a_k в $[0,1] \times M$ кривая I_k имеет вид $\gamma_\alpha(\varphi) = \bigl(t(\varphi), x^1_\alpha(\varphi), \dots, x^n_\alpha(\varphi)\bigr)$, а в некоторой окрестности точки b_k — вид $\gamma_\beta(\varphi) = \bigl(t(\varphi), x^1_\beta(\varphi), \dots, x^n_\beta(\varphi)\bigr)$. Ясно, что базисы $\{\partial_t, \partial_{x^1_\alpha}, \dots, \partial_{x^n_\alpha}\}$ и $\bigl\{\gamma'_\alpha(0), \partial_{x^1_\alpha}, \dots, \partial_{x^n_\alpha}\bigr\}$, определенные в точке a_k, имеют одинаковые ориентации, так как $dt/d\varphi(0) > 0$, в то время как базисы $\{\partial_t, \partial_{x^1_\beta}, \dots, \partial_{x^n_\beta}\}$ и $\bigl\{\gamma'_\beta(1), \partial_{x^1_\beta}, \dots, \partial_{x^n_\beta}\bigr\}$, определенные в точке b_k, имеют противоположные ориентации, так как $dt/d\varphi(1) < 0$.

Рассмотрим вдоль I_k такую систему из n векторных полей $\bigl\{X^p(\varphi)\bigr\}$, что в точке a_k семейство векторов $\bigl\{X^p(0)\bigr\}$ совпадает с базисом $\bigl\{\partial_{x^p_\alpha}\bigr\}$ касательного пространства к компоненте края $\{0\} \times M$, в точке b_k векторы $\bigl\{X^p(1)\bigr\}$ образуют некоторый базис в касательном пространстве к этой же компоненте, и в каждой точке кривой I^k система векторов, получающаяся из $\bigl\{X^p(\varphi)\bigr\}$ добавлением вектора скорости кривой I_k, линейно независима, т.е. образует базис $E(\varphi)$ в касательном пространстве к многообразию $[0,1] \times M$. Ясно, что ориентации всех базисов $E(\varphi)$ семейства одинаковы, в частности, одинаково ориентированы базисы $E(0) = \bigl\{\gamma'_\alpha(0), \partial_{x^1_\alpha}, \dots, \partial_{x^n_\alpha}\bigr\}$ и $E(1) = \bigl\{\gamma'_\beta(1), X^1(1), \dots, X^n(1)\bigr\}$. С другой стороны, t-компоненты векторов $\gamma'_\alpha(0)$ и $\gamma'_\beta(1)$ имеют противоположные знаки, поэтому базисы $\bigl\{X^p(1)\bigr\}$ и $\bigl\{\partial_{x^i_\beta}\bigr\}$ имеют противоположную ориентацию.

Остается заметить, что отображение F в каждой точке кривой I_k переводит семейство векторов $\bigl\{X^p(\varphi)\bigr\}$ в некоторый базис касательного пространства к многообразию N в точке y', причем ориентации всех полученных в y' базисов одинаковы. (Последнее вытекает из непрерывной зависимости этих базисов от параметра φ.) Таким образом, мы видим, что базисы $\bigl\{df(\partial_{x^i_\alpha})\bigr\}$ и $\bigl\{df(X^p(1))\bigr\}$ одинаково ориентированы, и их ориентация противоположна ориентации базиса $\{df(\partial_{x^i_\beta})\}$. Следовательно, знаки якобиана отображения f в точках a_k и b_k противоположны.

Случай когда точки a_k и b_k лежат в разных компонентах края многообразия $[0,1] \times M$ разбирается аналогично, и оставляется в качестве обязательного упражнения. Доказательство теоремы закончено.

Доказанная теорема 13.1 позволяет корректно определить *степень отображения* $\deg f$ как $\deg f(y)$ для произвольного регулярного значения y.

Замечание. Для неориентируемых многообразий можно определить степень отображения, складывая якобианы по модулю 2.

Приведем теперь некоторые примеры использования степени отображения.

13.2. Основная теорема алгебры

Мы сформулируем и докажем Основную теорему алгебры в следующем упрощенном виде.

Теорема 13.2. *Каждый комплексный многочлен степени $n \geq 1$ имеет по крайней мере один корень.*

Пусть $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ — произвольный комплексный полином степени n. Очевидно, он задает гладкое (даже комплексно-аналитическое) отображение из плоскости в плоскость: $w = P(z)$. Однако, чтобы использовать понятие степени, нам нужно отображение компактных многообразий, поэтому мы продолжим P до отображения f_P сферы S^2 в себя так. Напомним, во первых, что сфера S^2 диффеоморфна комплексной проективной прямой $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ (см. также дополнительный материал). Рассмотрим два экземпляра $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ и фиксируем на каждом из них однородные координаты $(z_0 : z_1)$ и $(w_0 : w_1)$ соответственно. Рассмотрим карты $z_0 \neq 0$ с координатой $z = z_1/z_0$ и $w_0 \neq 0$ с координатой $w = w_1/w_0$ и зададим в этих картах отображение f_P, положив $w = P(z)$.

Покажем, что заданное так отображение действительно продолжается до гладкого отображения $f_P\colon \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$. Для этого заметим, что

$$w = \frac{w_1}{w_0} = P(z) = \frac{z_1^n + a_{n-1}z_1^{n-1}z_0 + \dots + a_1 z_1 z_0^{n-1} + a_0 z_0^n}{z_0^n},$$

и зададим f_P в однородных координатах так:

$$\begin{aligned} w_1(z_0 : z_1) &= z_1^n + a_{n-1}z_1^{n-1}z_0 + \dots + a_1 z_1 z_0^{n-1} + a_0 z_0^n, \\ w_0(z_0 : z_1) &= z_0^n. \end{aligned}$$

В картах $(z_0 \neq 0, z = z_1/z_0)$, $(w_0 \neq 0, w = w_1/w_0)$ отображение f_P, как мы уже видели, имеет вид $w = P(z)$ и, потому, является комплексно-аналитическим. Отметим, что эта пара карт покрывает обе сферы $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$, за исключением точек $z_0 = 0$ и $w_0 = 0$, соответствующих бесконечности. В окрестностях бесконечностей рассмотрим другие карты $z' = z_0/z_1$ и $w' = w_0/w_1$. Ясно, что

$$w' = \frac{w_0}{w_1} = \frac{z_0^n}{z_1^n + a_{n-1}z_1^{n-1}z_0 + \cdots + a_0 z_0^n} = \frac{(z')^n}{1 + a_{n-1}z' + \cdots + a_0(z')^n},$$

поэтому при $|z'| < \varepsilon$, для достаточно малого ε, координатное представление $w' = w'(z')$ также является комплексно-аналитическим. Мы доказали следующую лемму.

Лемма 13.2. *Построенное выше отображение $f_P\colon \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$, совпадающее в конечной области с полиномом P, является комплексно-аналитическим.*

Вычислим теперь степень отображения f_P. Для этого рассмотрим гладкую гомотопию F_t, заданную в однородных координатах так:

$$\begin{aligned} &w_1(z_0 : z_1, t) = z_1^n + t\big(a_{n-1}z_1^{n-1}z_0 + \cdots + a_1 z_1 z_0^{n-1} + a_0 z_0^n\big),\\ &w_0(z_0 : z_1, t) = z_0^n. \end{aligned}$$

По теореме 13.1, все отображения $F_t\colon \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ имеют равные степени. При этом, в конечной области отображение F_1 совпадает с многочленом $P(z)$, а F_0 имеет вид $w(z) = z^n$. Вычислим степень отображения F_0. Для этого рассмотрим его значение $w = 1$. Нам следует проверить, что 1 — регулярное значение отображения F_0, найти прообразы (это просто, прообразы значения 1 суть примитивные корни n-ой степени из 1, которых имеется ровно n штук), и определить знак якобиана в каждом прообразе.

Лемма 13.3. *Пусть $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — комплексно-аналитическое отображение. Тогда его якобиан неотрицателен и равен $|f'(z)|^2$, где штрих означает дифференцирование по комплексной переменной z.*

Доказательство. Пусть $w = f(z)$ — гладкое отображение плоскости в себя, заданное коплекснозначной функцией комплексного переменного. Положив $z = x + iy$ и $w = u + iv$, запишем отображение f в следующем виде: $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, где $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — вещественная и мнимая части величины $f(x, y)$. Тогда якобиан J отображения f имеет, очевидно, вид

$$J = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

С другой стороны, $x = (z + \bar z)/2$, $y = -i(z - \bar z)/2$, откуда

$$\frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big), \qquad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\Big),$$

и условие аналитичности функции f, т.е. условие $\partial f/\partial \bar z = 0$, принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big)(u+iv) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\Big) + \frac{i}{2}\Big(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\Big) = 0,$$

что равносильно условиям Коши–Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Кроме того, воспользовавшись условиями Коши–Римана, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\Big)(u+iv) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\Big) + \frac{i}{2}\Big(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\Big) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y},$$

поэтому

$$J = \Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2 = \Big|\frac{\partial f}{\partial z}\Big|^2 = \Big|\frac{df}{dz}\Big|^2 \geq 0,$$

где последнее равенство имеет место, так как

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{df}{dz}.$$

Лемма доказана.

Теперь проверка регулярности значения $w = 1$ тривиальна, знаки якобианов определены, и, тем самым, доказана следующая лемма.

Лемма 13.4. *Степень каждого из отображений F_t, $t \in [0,1]$, равна n.*

Осталось заметить, что так как степень отображения F_t отлична от нуля, то множество $F_t^{-1}(y)$ не пусто для каждого $y \in \mathbb{C}$. (Действительно, если $F_t^{-1}(y_0)$ пусто, то y_0 — регулярное значение и $\deg F_t = 0$, противоречие.) В частности, не пусто и множество $F_1^{-1}(0)$, т.е. уравнение $F_1(z) = 0$ имеет корни, что и требовалось.

13.3. Теорема «о еже»

Пусть X — касательное векторное поле на многообразии M. Точка $P \in M$ называется *особой для* X, если $X(P) = 0$.

Приведем результат, известный в математическом фольклоре как «Теорема о еже». Эта теорема позволяет решить следующую задачу: существует ли на сфере S^2 касательное векторное поле без особых точек, т.е. можно ли расположить «иголки» (касательные векторы) сферического «ежа» так, чтобы в результате «прически» не возникло «пробора» (т.е. особых точек)? Имеет место следующий результат.

Теорема 13.3. *На сфере S^{2k} четной размерности не существует касательного векторного поля без особых точек.*

Доказательство. Рассмотрим сферу S^{2k} стандартно вложенную в $\mathbb{R}^{2k+1}$, и предположим, что на ней существует касательное векторное поле Y без особых точек. Тогда векторное поле $X(P) = Y(P)/\|Y(P)\|$ также является гладким касательным векторным полем на S^{2k}.

В каждой точке $P \in S^{2k}$ рассмотрим два вектора: вектор внешней нормали $n(P)$ и противоположный вектор $-n(P)$. Так как $X(P) \neq 0$, то однозначно определена двумерная аффинная плоскость $\Pi(P) \subset \mathbb{R}^{2k+1}$, проходящая через P и натянутая на линейно независимые векторы $X(P)$ и $n(P)$. Эта плоскость, очевидно, гладко зависит от P и содержит вектор $-n(P)$. Рассмотрим семейство $X_t(P)$ векторов, лежащих в плоскости $\Pi(P)$, заданное так

$$X_t(P) = X(P)\cos t + n(P)\sin t, \qquad t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Заметим, что при каждом t поле X_t задает отображение $X_t\colon S^{2k} \to S^{2k}$ так: $P \mapsto X_t(P)$. Таким образом, мы построили гладкую гомотопию X_t отображений из S^{2k} в S^{2k}, причем $X_{\frac{\pi}{2}}$ — это тождественное отображение сферы в себя, а $X_{-\frac{\pi}{2}}$ — это «антиподальное» отображение, переводящее P в $-P$. Из общей теоремы 13.1 вытекает, что эти отображения имеют равные степени. Степень тождественного отображения равна 1.

Лемма 13.5. *Степень «антиподального» отображения $a\colon S^n \to S^n$, определенного формулой $a(P) = -P$, $P \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, равна $(-1)^{n+1}$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $A\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, заданное так: $A(P) = -P$. Отображение A линейно, его определитель равен $(-1)^{n+1}$, поэтому A меняет ориентацию пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, если и только если число $(n+1)$ нечетно. Отображение a совпадает с ограничением A на S^n.

Рассмотрим замкнутый шар $B^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Это ориентируемое многообразие с краем S^n. Ориентируем B^{n+1} в соответствии с ориентацией $\mathbb{R}^{n+1}$. Далее, фиксируем на сфере S^n ориентацию, согласованную с ориентацией шара B^{n+1}. Но, так как A переводит внешнюю нормаль к сфере во внешнюю нормаль, то ориентации $A(S^n) = a(S^n)$ и $A(B^{n+1})$ также согласованы. Поэтому, если A сохраняет ориентацию B^{n+1}, то и a сохраняет ориентацию сферы S^n. Обратно, если A меняет ориентацию шара, то ориентация сферы, оставаясь согласованной с ориентацией шара–образа, меняется под действием отображения a на противоположную. Лемма доказана.

Таким образом, если размерность сферы четная, то степень «антиподального отображения»равна -1. Полученное противоречие завершает доказательство.

Задачи

Задача 13.1. Показать, что если $f\colon M \to N$ — гладкое отображение гладких компактных многообразий одинаковой размерности, и $y \in N$ — регулярное значение отображения f, то прообраз $f^{-1}(y)$ состоит из конечного числа точек.

Задача 13.2. Покажите, что если найдется такая точка $y \in N$, что прообраз $f^{-1}(y)$ пуст, то степень отображения f равна нулю.

Задача 13.3. Найти критические точки и степень отображения $S^2 \to S^2$, заданного в конечной области формулойа (а) $z \mapsto z^3 - 3z^2 - 9z + 27$; (б) $z \mapsto (z^2+4)/(z+1)$.

Задача 13.4. Вычислить степень отображения $f\colon \mathrm{SO}(2) \to \mathrm{SO}(2)$, заданного формулой $f(A) = A^k$. Тот же вопрос для $\mathrm{SO}(3)$, для $\mathrm{SU}(2)$.

Задача 13.5. Пусть $f\colon S^{2k} \to S^{2k}$. Показать, что найдется такая точка $x \in S^{2k}$, что или $x = f(x)$, или $x = -f(x)$.

Задача 13.6. Построить примеры гладких касательных векторных полей на сферах S^1, S^3, S^7. Существует ли такое поле на $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$? А на T^2?

Дополнительный материал

13.1. Диффеоморфизм сферы и комплексной проективной прямой. Напомним, что проективная прямая $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ представляет собой множество комплексных одномерных подпространств пространства $\mathbb{C}^2$. Если (z^1, z^2) — декартовы (комплексные) координаты в $\mathbb{C}^2$, то каждая такая прямая может быть задана своим направляющим (комплексным) вектором, который определен с точностью до пропорциональности. Как и в вещественном случае, удобно задавать такие направляющие векторы так называемыми однородными координатами, т.е. упорядоченными парами вида $(z_0 : z_1)$ с отношением эквивалентности $(z_0 : z_1) \sim (\lambda z_0 : \lambda z_1)$ для любого ненулевого комплексного числа λ.

Итак, пусть $(z_0 : z_1)$ однородные координаты на $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$. Тогда, чтобы превратить $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ в гладкое многообразие, можно определить две карты U_0 и U_1, положив

$$U_i = \Big\{(z_0 : z_1) \mid z_i \neq 0\Big\},$$

где $i = 0,\ 1$, и координатные гомеоморфизмы $\varphi_i\colon U_i \to \mathbb{C}(w_i)$, где через w_i обозначена комплексная координата на соответствующем экземпляре комплексной плоскости, положив $\varphi_0(z_0 : z_1) = z_1/z_0$ и $\varphi_1(z_0 : z_1) = z_0/z_1$. Поскольку $\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}(w_0) = 1/w_0$, функции перехода являются комплексно-аналитическими в общей области определения, откуда $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ — одномерное комплексно-аналитическое многообразие.

Перейдем к сфере S^2 стандартно вложенной в $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим на ней две карты стереографической проекции $\sigma_N : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}(z)$ из северного и $\sigma_S : S^2 \setminus \{S\} \to \mathbb{C}(w)$ из южного полюсов на проходящую через центр сферы горизонтальную плоскость (на плоскостях проекции введены комплексные координаты z и w соответственно). Если $z = \sigma_N(P)$ и $w = \sigma_S(P)$ — проекции одной и той же точки $P \in S^2$ из разных полюсов, (x^1, x^2, x^3) — декартовы координаты точки P в $\mathbb{R}^3$, а $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$ — расстояние от точки P до оси Ox^3, то

$$\frac{|z|}{r} = \frac{1}{1-x^3}, \qquad \frac{|w|}{r} = \frac{1}{1+x^3},$$

откуда, учитывая, что для точек сферы $r = \sqrt{1-(x^3)^2}$, заключаем, что

$$|z| = \frac{\sqrt{1-(x^3)^2}}{1-x^3} = \sqrt{\frac{1+x^3}{1-x^3}}, \qquad |w| = \frac{\sqrt{1-(x^3)^2}}{1+x^3} = \sqrt{\frac{1-x^3}{1+x^3}}.$$

Так как аргументы чисел z и w, очевидно, совпадают, заключаем, что $z = 1/w$. Кстати, мы показали, что S^2 — комплексно-аналитическое многообразие.

Осталось рассмотреть отображение $F\colon S^2 \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ заданное во введенных нами картах так: $F(z) = w_0$ и $F(w) = w_1$. Так как функции перехода и карты одинаковы, отображение F определено корректно (написанные формулы согласованы на пересечении карт). Построенное отображение задает искомый диффеоморфизм.

13.2. Проверка гладкости гомотопии F_t. В доказательстве основной теоремы алгебры мы рассмотрели гомотопию $F_t\colon [0,1]\times\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$, записанную в однородных координатах $(z_0 : z_1)$ и $(w_0 : w_1)$ в виде

$$\begin{aligned}
&w_1(z_0 : z_1, t) = z_1^n + t\big(a_{n-1}z_1^{n-1}z_0 + \dots + a_1 z_1 z_0^{n-1} + a_0 z_0^n\big),\\
&w_0(z_0 : z_1, t) = z_0^n,
\end{aligned}$$

и показали, что $\deg F_t = n$. Почему нельзя рассмотреть аналогичную гомотопию G_t

$$\begin{aligned}
&w_1(z_0 : z_1, t) = t(z_1^n + a_{n-1}z_1^{n-1}z_0 + \dots + a_1 z_1 z_0^{n-1}) + a_0 z_0^n,\\
&w_0(z_0 : z_1, t) = z_0^n,
\end{aligned}$$

и, заметив, что $\deg G_t = 0$ доказать «альтернативную теорему», гласящую что алгебраические уравнения не имеют корней? Дело в том, что похожие, на первый взгляд, гомотопии F_t и G_t отличаются тем, что F_t — гладкая, а G_t — нет.

Чтобы проверить гладкость отображения его нужно честно записать в картах. Как и в доказательстве теоремы 13.2, введем в рассмотрение карты с координатами $z = z_1/z_0$ и $z' = z_0/z_1$ и координатами $w = w_1/w_0$ и $w' = w_0/w_1$. Тогда отображение F_t имеет вид

$$\begin{aligned}
w = F_t(z) &= z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0),\\
w' = F_t(z') &= \frac{1}{1 + t\Big(a_{n-1}z' + \dots + a_1(z')^{n-1} + a_0(z')^n\Big)}.
\end{aligned}$$

Первая формула задает гладкую (даже полиномиальную) гомотопию в координатах z и w, покрывающих сферы целиком, за исключением бесконечности, соответствующей $z' = 0$. Вторая формула также задает гладкую гомотопию при $|z'| < \varepsilon$ (где ε настолько мал, что знаменатель не обращается в нуль) в координатах z' и w', т.е. как раз в окрестности бесконечности. Тем самым, гомотопия F_t действительно гладкая.

Выполняя те же вычисления для гомотопии G_t имеем:

$$\begin{aligned}
w = G_t(z) &= t(z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z) + a_0,\\
w' = G_t(z') &= \frac{1}{t\Big(1 + a_{n-1}z' + \dots + a_1(z')^{n-1}\Big) + a_0(z')^n}.
\end{aligned}$$

Первая формула по-прежнему задает гладкую гомотопию в конечной области, а вторая — имеет особенность по крайней мере при $z' = 0$ и $t = 0$. Поэтому гомотопия G_t не гладкая.

Лекция 14. Другие применения степени отображения

В данном разделе мы рассмотрим еще несколько применений степени отображения.

14.1. Степень и интеграл

Пусть $f\colon M\to N$ — гладкое отображение гладких замкнутых (т.е. компактных и без края) связных ориентированных многообразий одинаковой размерности n, и ω — внешняя форма степени n на многообразии N. Тогда имеет место следующая полезная теорема.

Теорема 14.1. *В сделанных предположениях,*

$$\int_M f^*\omega = (\deg f)\int_N \omega.$$

Доказательство. Пусть $y\in N$ — регулярное значение отображения f. Тогда существует окрестность U точки y в N, состоящая из регулярных значений отображения f. Пусть $f^{-1}(y)=\{x_1,\dots,x_m\}$ — полный прообраз точки y. Тогда окрестность U может быть выбрана настолько малой, что

$$f^{-1}(U)=U_1\cup\dots\cup U_m,\qquad x_\alpha\in U_\alpha,$$

причем окрестности U_α точек x_α попарно не пересекаются. Фиксируем локальные координаты $(y^1,\dots,y^n)$ в окрестности U на N, и $(x^1_\alpha,\dots,x^n_\alpha)$ — локальные координаты в окрестности U_α на M. Так как все точки из U_α — регулярные точки отображения f, то по теореме об обратной функции ограничение отображения f на U_α — диффеоморфизм. Пусть $\varphi(y^1,\dots,y^n)dy^1\wedge\dots\wedge dy^n$ — координатное представление формы ω в координатах $(y^1,\dots,y^n)$, и $y=y(x_\alpha)$ — координатное представление отображения f в координатах $(x^1_\alpha,\dots,x^n_\alpha)$ и $(y^1,\dots,y^n)$. Тогда, по теореме о замене переменных под знаком интеграла, имеем:

$$\int_U\varphi(y)dy^1\cdots dy^n=\int_{U_\alpha}\varphi\big(y(x_\alpha)\big)\Big|\det\frac{\partial y^i}{\partial x^k_\alpha}\Big|dx^1_\alpha\cdots dx^n_\alpha=$$
$$=\operatorname{sign}\det\Big(\frac{\partial y^i}{\partial x^k_\alpha}\Big)\int_{U_\alpha}\varphi\big(y(x_\alpha)\big)\Big(\det\frac{\partial y^i}{\partial x^k_\alpha}\Big)dx^1_\alpha\cdots dx^n_\alpha,$$

откуда,

$$\operatorname{sign}\det\Big(\frac{\partial y^i}{\partial x^k_\alpha}\Big)\int_U\varphi(y)dy^1\cdots dy^n=\int_{U_\alpha}\varphi\big(y(x_\alpha)\big)\det\Big(\frac{\partial y^i}{\partial x^k_\alpha}\Big)dx^1_\alpha\cdots dx^n_\alpha.$$

Воспользовавшись видом формы $f^*\omega$ и аддитивностью интеграла по непересекающимся областям, получим, что

$$\int_{f^{-1}(U)} f^*\omega = \Bigl(\sum_\alpha \operatorname{sign}\det\Bigl(\frac{\partial y^i}{\partial x^k_\alpha}\Bigr)\Bigr)\int_U \omega = (\deg f)\int_U \omega,$$

т.е. искомая формула имеет место в окрестности каждого регулярного значения. Далее, по теореме Сарда, множество критических значений отображения f — это множество меры 0, поэтому его вклад в интеграл $\int_N \omega$ равен нулю. С другой стороны, прообраз этого множества, т.е. множество критических точек отображения f, также дает нулевой вклад в интеграл $\int_M f^*\omega$, так как в этих точках форма $f^*\omega$ равна нулю. Таким образом, теорема вытекает из предыдущего равенства и аддитивности интеграла.

14.2. Теорема Гаусса–Бонне

Пусть $M^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ — ориентируемая гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$, и пусть N — поле единичных нормалей к поверхности M. Рассмотрим *гауссово отображение* $N\colon M \to S^{n-1}$, ставящее в соответствие каждой точке $P \in M$ вектор $N(P)$, и пусть $\Omega \in \Omega^{n-1}(S^{n-1})$ — форма объема на стандартной сфере S^{n-1} радиуса 1. Обозначим через K гауссову кривизну гиперповерхности M, а через $d\sigma$ форму объема на M для индуцированной из $\mathbb{R}^n$ метрики.

Утверждение 14.1. *В сделанных выше предположениях, при подходящем выборе ориентации поверхности, имеем*:

$$N^*\Omega = K\,d\sigma.$$

Доказательство. Пусть $P \in M$ — произвольная точка. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ евклидовы координаты $(x^1, \dots, x^n)$ с началом в точке P, направив ось x^n в направлении вектора $N(P)$. Тогда поверхность M в окрестности точки P можно представить в виде графика некоторой функции $x^n = f(x^1, \dots, x^{n-1})$, причем, как мы уже видели выше, $f_{x^i}(P) = 0$. В координатах $(x^1, \dots, x^{n-1})$ матрица индуцированной метрики на M в точке P равна единичной, т.е. δ_{ij}, поэтому $d\sigma = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}$. Гауссова кривизна K в точке P равна определителю матрицы $\bigl(f_{x^ix^j}(P)\bigr)$ вторых частных производных.

На сфере S^{n-1} в окрестности точки $N(P) = (0, \dots, 1)$ выберем координаты $(u^1, \dots, u^{n-1})$, совпадающие с евклидовыми координатами горизонтальной плоскости объемлющего евклидова пространства. Тогда в точке $N(P)$ в этих координатах метрика также евклидова, поэтому форма объема на S^{n-1} в точке $N(P)$ имеет вид $\Omega = du^1 \wedge \dots \wedge du^{n-1}$.

Далее, вектор нормали к поверхности M в окрестности точки P задается так:

$$N = \frac{\left(-f_{x^1}, \cdots, -f_{x^{n-1}}, 1\right)}{\sqrt{1 + f_{x^1}^2 + \ldots + f_{x^{n-1}}^2}},$$

поэтому гауссово отображение $N\colon M \to S^{n-1}$ записывается в локальных координатах $(x^1, \ldots, x^{n-1})$ и $(u^1, \ldots, u^{n-1})$ в виде

$$u^i(x^1, \ldots, x^{n-1}) = \frac{-f_{x^i}}{\sqrt{1 + f_{x^1}^2 + \ldots + f_{x^{n-1}}^2}},$$

и, так как $f_{x^i}(P) = 0$, то дифференциал $dN(P)$ отображения N в точке P имеет вид

$$dN(P) = \left(-f_{x^i x^j}\right), \qquad \text{т.е.} \qquad \frac{\partial u^i}{\partial x^j}(P) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(P).$$

Следовательно,

$$N^*\Omega = \det\Bigl(\frac{\partial u^i}{\partial x^j}\Bigr) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1} =$$
$$= \det\Bigl(-\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\Bigr) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1} = (-1)^{n-1} K\, d\sigma.$$

Таким образом, в случае четной размерности, т.е. $n - 1 = 2k$, мы получаем требуемое равенство, а в случае $n = 2k$ нужно сменить ориентацию поверхности M на противоположную, что приведет к изменению знака гауссовой кривизны. Утверждение доказано.

Следствие 14.1 (Теорема Гаусса-Бонне). *Пусть M — замкнутая связная ориентируемая поверхность в $\mathbb{R}^3$. Тогда*

$$\int_M K\, d\sigma = 4\pi\lambda,$$

где λ — некоторое целое число (равное степени гауссова отображения поверхности M) .

Доказательство. Пусть $N\colon M \to S^2$ — гауссово отображение поверхности M. Как и выше, обозначим через K гауссову кривизну для M, а через $d\sigma$ и Ω — формы площади на M и S^2 соответственно. Тогда

$$\int_M K\, d\sigma = \int_M N^*\Omega = (\deg N) \int_{S^2} \Omega = 4\pi \cdot \deg N.$$

Положив $\lambda = \deg N$, получим требуемое.

Отметим, что двумерность поверхности в теореме Гаусса–Бонне не существенна. Для случая гиперповерхности изменится только множитель перед $\deg N$. Этот множитель, который мы обозначим через c_{n-1}, равен объему стандартной евклидовой сферы S^{n-1}.

Следствие 14.2. *Пусть M — замкнутая связная ориентируемая гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$\int_M K\,d\sigma = c_{n-1}\lambda,$$

где λ — некоторое целое число (равное, с точностью до знака, степени гауссова отображения поверхности M).

14.3. Особые точки векторных полей

Пусть U — область в $\mathbb{R}^n$, такая что замыкание $\bar{U}$ области U компактно, и граница ∂U этой области — замкнутое $(n-1)$-мерное многообразие. Пусть X — некоторое векторное поле в области $W \supset U$. Напомним, что точка $P \in U$ называется *особой для* X, если $X(P) = 0$. Особая точка P поля X называется *изолированной*, если в некоторой ее окрестности нет других особых точек.

Отметим, что векторное поле вне своих особых точек порождает отображение N в S^{n-1}, ставящее в соответствие каждой неособой точке P точку $X(P)/\|X(P)\|$ из S^{n-1}.

Предположим, что поле X не имеет на ∂U особых точек. Тогда отображение N определено во всех точках границы ∂U.

Определение. Степень отображения $N\colon \partial U \to S^{n-1}$ называется *индексом векторного поля* X в области U и обозначается через $\operatorname{ind} X$.

Пусть $P \in U$ — изолированная особая точка. Рассмотрим замкнутую шаровую окрестность $B \subset U$ точки P, не содержащую других особых точек. Тогда отображение N определено во всех точках сферы ∂B.

Определение. Степень отображения $N\colon \partial B \to S^{n-1}$ называется *индексом особой точки* P поля X и обозначается через $\operatorname{ind}_P X$.

Теорема 14.2. *Пусть поле X имеет в области U лишь изолированные особые точки и не имеет особых точек на границе области U. Тогда индекс поля X равен сумме индексов его особых точек.*

Доказательство. Пусть P_i — особые точки поля X, и B_i — непересекающиеся шаровые окрестности точек P_i, причем каждая B_i не содержит особых точек, отличных от P_i. Обозначим через V область $U \setminus (\cup_i B_i)$. Тогда отображение N определено на всем на V.

Рассмотрим на S^{n-1} стандартную форму объема Ω. Так как форма Ω замкнута, то $(n-1)$-форма $N^*(\Omega)$ на V также замкнута, поэтому по формуле Стокса

$$\int_{\partial V} N^*(\Omega) = \int_V dN^*(\Omega) = 0.$$

С другой стороны,

$$\int_{\partial V} N^*(\Omega) = \int_{\partial U} N^*(\Omega) + \sum_i \int_{\partial B_i} N^*(\Omega) = 0,$$

где ориентации многообразия ∂U и сфер ∂B_i согласованы с ориентацией области V. Применяя теорему 14.1 и учитывая ориентации сфер ∂B_i, получаем:

$$\int_{\partial U} N^*(\Omega) = c_{n-1} \cdot \deg N|_{\partial U} = c_{n-1} \operatorname{ind} X,$$

$$\int_{\partial B_i} N^*(\Omega) = c_{n-1} \cdot \deg N|_{\partial B_i} = -c_{n-1} \operatorname{ind}_{P_i} X,$$

откуда

$$\operatorname{ind} X = \sum_i \operatorname{ind}_{P_i} X,$$

что и требовалось.

14.4. Теорема Брауэра

В качестве приложения теории индекса векторных полей, докажем гладкий вариант теоремы Брауэра о неподвижной точке (справедливой и в непрерывном случае).

Следствие 14.3 (Теорема Брауера). *Пусть D^n — замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$. Любое гладкое отображение $\varphi\colon D^n \to D^n$ имеет неподвижную точку.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. существует такое отображение $\varphi\colon D^n \to D^n$, у которого нет неподвижных точек. Тогда на D^n имеется векторное поле X без особых точек, определенное так: $X(P) = \varphi(P) - P$. Ясно, что индекс этого векторного поля в D^n равен нулю.

С другой стороны, поле X, ограниченное на $S^{n-1} = \partial D^n$ также нигде не обращается в нуль и направлено строго внутрь шара D^n, поэтому существует гомотопия, переводящее поле $X|_{S^{n-1}}$ в поле внутренних нормалей сферы S^{n-1}. Следовательно, индекс поля X совпадает со степенью антиподального отображения сферы S^{n-1} на себя, переводящего каждую точку в противоположную ей. Но у такого отображения степень равна ± 1. Это противоречие и завершает доказательство.

Задачи

Задача 14.1. Найти степень векторного поля X на гиперповерхности M (т.е. степень соответствующего гауссова отображения), где

$$X = \left(x^2 + y^2 - 1, \frac{x^2}{4} + 4y^2 - 1\right), \qquad M = \left\{(x,y) \mid 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 3 = 0\right\}.$$

Задача 14.2. Доказать, что степени любых двух векторных полей на произвольной двумерной замкнутой поверхности одинаковы. Верно ли это в произвольной размерности?

Задача 14.3. Доказать, что на всяком связном компактном замкнутом многообразии существует гладкое векторное поле с одной особой точкой. Найти индекс этой особой точки.

Задача 14.4. Построить пример гладкого векторного поля с одной особой точкой на (а) сфере; (б) на торе; (в) на сфере с g ручками; (г) на проективной плоскости; (д) на бутылке Клейна; (е) на сфере с μ пленками Мебиуса.

Дополнительный материал

14.1. Теорема Гаусса–Бонне и эйлерова характеристика. На самом деле, степень гауссова отображения двумерной поверхности не зависит ни от индуцированной на поверхности метрики, ни от способа вложения поверхности в $\mathbb{R}^3$. Она зависит лишь от топологии поверхности. Можно показать, что $\deg N$ совпадает с половиной эйлеровой характеристикой поверхности M.

Нетрудно вычислить степень гауссова отображения для стандартного вложения сферы M_g^2 с g ручками в евклидово пространство. Действительно, рассмотрим вложение M_g^2 в $\mathbb{R}^3$, при котором ручки поверхности расположены вдоль вертикальной оси, см. рис. 5.

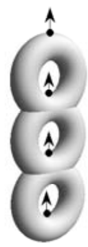

Рис. 5. Сфера с тремя ручками

Рассмотрим гауссово отображение $N\colon M_g^2 \to S^2$, и, в качестве его регулярного значения, выберем северный полюс сферы. Прообраз северного полюса состоит из $g+1$ точки, см. рис. 5, причем в одной точке (верхней на рисунке) гауссова кривизна поверхности положительна, а в остальных — отрицательна. Из утверждения 14.1 вытекает, что знак гауссовой кривизны совпадает со знаком якобиана гауссова отображения. Поэтому $\deg N = +1 - g$ и, значит, равна половине эйлеровой характеристики поверхности.

Отметим, что мы провели вычисления для конкретного (удобного для наших целей) вложения поверхности. Пусть теперь имеется два вложения $F_i\colon M_g^2 \to \mathbb{R}^3$,

$i = 0, 1$. Тогда имеется два гауссовых отображения $N_i : M_g^2 \to S^2$, степень которых, вообще говоря, различна. Однако, если существует гладкая гомотопия F_t, $t \in [0, 1]$, одного вложения в другое в классе вложений (такие гомотопии называются *изотопиями*), то существует и гладкая гомотопия N_t, $t \in [0, 1]$ гауссовых отображений, откуда вытекает равенство их степеней. Таким образом, для доказательства независимости степени гауссова отображения от вложения достаточно доказать изотопичность любых двух вложений. Последний факт, однако, весьма нетривиален и его доказательство выходит за рамки нашего курса.

Лекция 15. Элементы вариационного исчисления

В предыдущих лекциях мы сначала определили геодезические как кривые с параллельным полем скоростей, а затем показали, что они обладают другим важным свойством: являются локально кратчайшими кривыми, т.е. кривыми, каждый достаточно малый фрагмент которых имеет наименьшую длину среди всех кривых, соединяющих граничные точки такого фрагмента. Еще одно эквивалентное определение геодезических: это такие кривые, которые являются критическими точками для функции длины, т.е. если мы продеформируем такую кривую, то ее длина в первом приближении не изменится. Эти идеи лежат в основе целого направления в математике, которое называется вариационным исчислением. В данной лекции мы кратко расскажем о нем с геометрической точки зрения.

15.1. Классическая вариационная задача

Пусть M — гладкое n-мерное многообразие, $P \in M$ — произвольная точка, T_PM — касательное пространство, TM — касательное расслоение к многообразию M и $\pi\colon TM \to M$ — стандартная проекция, ставящая в соответствие каждому вектору v в некотором T_PM точку $P \in M$. Напомним, что каждые локальные координаты $(x^1, \dots, x^n)$ в окрестности U точки P порождают локальные координаты $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$ в окрестности $\pi^{-1}(U)$, где y^i — компоненты касательного вектора в каноническом базисе $\{\partial_{x^i}\}$.

Пусть $L\colon TM \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — некоторая непрерывная функция. Такие функции L называются *лагранжианами*. Если задан лагранжиан L, то по нему можно построить отображение Φ_L, ставящее в соответствие каждой кривой $\gamma(t)$ из многообразия M число $\Phi_L(\gamma)$. Покажем, как это делается.

Прежде всего, для каждой гладкой кривой $\gamma\colon [a,b] \to M$ определим кривую $\tilde\gamma\colon [a,b] \to TM \times \mathbb{R}$, положив $\tilde\gamma(t) = \bigl(\gamma(t), \dot\gamma(t), t\bigr)$. Кривая $\tilde\gamma$ называется *поднятием кривой* γ. Если L — лагранжиан, то вычислив L в точках кривой $\tilde\gamma$, получим непрерывную функцию на отрезке $[a,b]$. Интеграл от этой функции по $[a,b]$ и есть число $\Phi_L(\gamma)$:

$$\Phi_L(\gamma) = \int_a^b L\bigl(\tilde\gamma(t)\bigr)\,dt = \int_a^b L\bigl(\gamma(t), \dot\gamma(t), t\bigr)\,dt.$$

Отображение Φ_L называется (классическим одномерным) *вариационным функционалом*, соответствующим лагранжиану L.

Пример. Пусть M — риманово многообразие. Положим

$$L(x,y,t) = \sqrt{g_{ij}(x)y^iy^j},$$

где $g_{ij}(x)$ — компоненты римановой метрики в координатах $(x^1, \dots, x^n)$. Легко видеть, что вариационный функционал Φ_L, соответствующий этому лагранжиану, ставит в соответствие гладкой кривой γ на M ее длину. Построенный функционал называется *функционалом длины*.

Если $L(x,y,t) = \frac{1}{2} g_{ij}(x) y^i y^j$, то функционал Φ_L называется *функционалом энергии*.

Замечание. Часто координаты y^i обозначают через $\dot{x}^i$, чтобы подчеркнуть геометрический смысл этих координат — компонент векторов скоростей кривых.

Выше, выводя формулу первой вариации длины кривой, мы уже определяли гладкую вариацию кривой. Здесь мы ограничимся более частным определением. Гладкая гомотопия γ_s, $s \in [-1,1]$, отображения $\gamma\colon [a,b] \to M$, т.е. отображение $\Gamma\colon [-1,1] \times [a,b] \to M$, $\Gamma(s,t) = \gamma_s(t)$, называется гладкой *деформацией* или *вариацией* кривой γ. Говорят, то деформация γ_s *неподвижна на концах*, если $\gamma_s(a) = \gamma_0(a)$ и $\gamma_s(b) = \gamma_0(b)$ для любого $s \in [-1,1]$. Напомним, что *полем деформации* или *полем вариации* $E(t)$ называется поле вдоль кривой $\gamma(t)$, определяющееся по деформации $\gamma_s(t)$ так: $E(t) = d\gamma_s(t)/ds\big|_{s=0} = d\Gamma|_{(0,t)}(\partial_s)$. Если деформация γ неподвижна на концах, то $E(a) = E(b) = 0$.

Пусть γ — некоторая гладкая кривая. Предположим, что лагранжиан L является гладкой функцией в некоторой окрестности поднятия $\tilde{\gamma}$ кривой γ. Тогда для любой достаточно малой деформации γ_s кривой γ, т.е. такой деформации, что все $\tilde{\gamma}_s$ лежат в области гладкости функции L, определена гладкая функция $\Phi_L(\gamma_s)$ параметра s.

Определение. Кривая γ называется *экстремалью функционала* Φ_L, если для любой достаточно малой деформации γ_s этой кривой, неподвижной на концах, точка $s = 0$ является стационарной для функции $f(s) = \Phi(\gamma_s)$, т.е. выполняется соотношение

$$f'(0) = \frac{d\Phi(\gamma_s)}{ds}\Big|_{s=0} = 0.$$

Задача о поиске экстремалей одномерного вариационного функционала называется *классической вариационной задачей*, решением которой занимается классическое вариационное исчисление, возникшее в работах Эйлера и Лагранжа.

Теорема 15.1. *Кривая γ является экстремалью вариационного функционала Φ_L, если и только, если вдоль γ выполняется следующая система дифференциальных уравнений Эйлера–Лагранжа*:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Доказательство. Вычислим производную по s функции $\Phi_L(\gamma_s)$ в начальный момент времени. Обозначим через $x^i(s)$ координатные функции кривой $\gamma_s(t)$. Имеем

$$\frac{d}{ds}\int_a^b L\bigl(x_s(t),\dot{x}_s(t),t\bigr)\,dt = \int_a^b \frac{d}{ds}L\bigl(x_s(t),\dot{x}_s(t),t\bigr)\,dt = \\ = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x^i}\frac{dx_s^i}{ds} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\frac{d\dot{x}_s^i}{ds}\right)\,dt.$$

Заметим, что на каждой кривой $\gamma_s(t)$ выполнено,

$$\frac{d\dot{x}_s^i}{ds} = \frac{d}{ds}\frac{d}{dt}x_s^i = \frac{d}{dt}\frac{d}{ds}x_s^i$$

что позволяет продолжить предыдущее равенство так:

$$\int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x^i}\frac{dx_s^i}{ds} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\frac{d\dot{x}_s^i}{ds}\right)\,dt = \\ = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x^i}\frac{dx_s^i}{ds} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\frac{dx_s^i}{ds}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)\frac{dx_s^i}{ds}\right)\,dt.$$

Полагая в предыдущем выражении $s=0$ и вспоминая, что $E(t) = dx_s/ds$ при $s=0$, имеем:

$$\left.\frac{d\Phi(\gamma_s)}{ds}\right|_{s=0} = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)\right)\,E(t)\,dt + \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}E(t)\right|_a^b = \\ = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)\right)\,E(t)\,dt.$$

В силу произвольности деформации γ_s, поле $E(t)$ также может быть выбрано любым, зануляющимся на концах отрезка $[a,b]$, поэтому условие экстремальности кривой γ равносильно тому, что

$$\xi^i(t) = \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) = 0, \qquad i = 1,\dots,n$$

вдоль кривой γ (иначе, если хотя бы одно из этих уравнений не равно нулю при некотором $t=t_0$, то в качестве $E(t)$ можно взять поле $f(t)\xi(t) = f(t)\bigl(\xi^1(t),\dots,\xi^n(t)\bigr)$, где $f(t)$ — гладкая неотрицательная функция, равная 1 в точке $t=t_0$, и равная нулю в точках a и b: для деформации с таким полем $\eta(t)$ производная функции $\Phi_L(\gamma_s)$ отлична от нуля при $s=0$). Доказательство закончено.

15.2. Примеры лагранжианов

В качестве первого примера рассмотрим функционал энергии на римановом многообразии M. Пусть g_{ij} — риманова метрика, и

$$L(x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n, t) = \frac{1}{2} g_{ij}(x) \dot{x}^i \dot{x}^j$$

— соответствующий лагранжиан, задающий функционал энергии. Отметим, что функция L гладкая везде. Найдем экстремали этого функционала. Для этого запишем систему уравнений Эйлера–Лагранжа. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = \frac{d}{dt}\left(g_{\alpha j}\dot{x}^j\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha}\dot{x}^i\dot{x}^j = \\ = g_{\alpha j}\ddot{x}^j + \frac{\partial g_{\alpha j}}{\partial x^i}\dot{x}^i\dot{x}^j - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha}\dot{x}^i\dot{x}^j = \\ = g_{\alpha j}\ddot{x}^j + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha j}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{\alpha i}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha}\right)\dot{x}^i\dot{x}^j = 0, \qquad \alpha = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Сворачивая эту систему с $g^{k\alpha}$, получаем

$$\ddot{x}^k + \frac{1}{2} g^{k\alpha}\left(\frac{\partial g_{\alpha j}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha}\right)\dot{x}^i\dot{x}^j = \ddot{x}^k + \Gamma^k_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

а это и есть система уравнений, задающая геодезические. Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 15.2. *Кривая γ на римановом многообразии является геодезической тогда и только тогда, когда она — экстремаль функционала энергии.*

Пусть теперь $L(x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n, t) = \sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}$ — лагранжиан функционала длины. Отметим, что функция L гладкая везде, где вектор $(\dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n)$ отличен от нуля. Иными словами, лагранжиан L является гладкой функцией в некоторой окрестности поднятия кривой γ, если и только если γ — регулярная кривая.

Найдем условие экстремальности регулярной кривой γ. Запишем уравнения Эйлера–Лагранжа. Имеем:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = \frac{d}{dt}\left(\frac{g_{\alpha j}\dot{x}^j}{\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}}\right) - \frac{\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha}\dot{x}^i\dot{x}^j}{2\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}} = 0, \qquad \alpha = 1, \dots, n.$$

Если кривая γ параметризована пропорционально натуральному параметру, то условие экстремальности равносильно написанному выше условию экстремальности кривой для функционала энергии, т.е. условию того, что кривая γ — геодезическая. Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 15.3. *Регулярная кривая γ, параметризованная пропорционально натуральному параметру, является экстремалью функционала длины, если и только если она — геодезическая.*

Заметим, что так как функционал длины не зависит от параметризации, то мы тем самым полностью описали его экстремали. А именно,

Следствие 15.1. *Регулярная кривая $\gamma(t)$ является экстремалью функционала длины, если и только если после перепараметризации $t(s)$, превращающей параметр t в натуральный параметр s, кривая $\gamma\big(t(s)\big)$ — геодезическая.*

15.3. Законы сохранения

Начнем с еще одного примера. Рассмотрим механическую систему, состоящую из материальной точки массы m, движущейся под действием поля консервативных сил f. Последнее означает, что существует такая функция $U(x)$, называемая *потенциалом*, что $f = -\operatorname{grad} U$. Кинетическая энергия T задается в виде $\dfrac{m\dot{x}^2}{2}$, а полная энергия H равна $T+U$. Уравнение Ньютона, описывающее движение этой материальной точки, имеет вид $f = m\ddot{x}$. При этом выполняется закон сохранения энергии: вдоль траектории движения энергия H постоянна.

Оказывается, траектории движения материальной точки в этой системе можно описывать как экстремали вариационного функционала Φ_L, соответствующего лагранжиану $L = T - U$. Действительно, уравнения Эйлера–Лагранжа имеют вид:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) + \operatorname{grad} U = 0,$$

что эквивалентно уравнениям Ньютона. Здесь $f = -\operatorname{grad} U = \partial L/\partial x$ задает поле сил, а $m\dot{x} = \partial L/\partial \dot{x}$ — импульс материальной точки. Далее, полную энергию H можно записать в виде

$$H = T + U = m\dot{x}^2 - (T - U) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x} - L.$$

Пусть L — произвольный лагранжиан. В каждой точке $P \in M$ для локальных координат $(x^1, \ldots, x^n)$ определен набор величин $p_i = \partial L/\partial \dot{x}^i$, а также величина $H = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\dot{x}^\alpha - L(x, \dot{x}, t)$

Лемма 15.1. *Величины p_i являются компонентами ковекторного векторного поля в координатах $(x^1, \ldots, x^n)$, а величина H — скалярной функцией.*

Доказательство. Действительно, пусть $(x^{1'}, \dots, x^{n'})$ — другие координаты в окрестности точки P. Тогда

$$\dot{x}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\dot{x}^i, \qquad \frac{\partial \dot{x}^{i'}}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i},$$

откуда

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{i'}}\frac{\partial \dot{x}^{i'}}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{i'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} = p_{i'}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i},$$

т.е. величины p_i при замене координат меняются по ковекторному закону. Осталось заметить, что величина $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\dot{x}^\alpha$ есть значение ковектора p на векторе $\dot{x}$, поэтому не зависит от координат, т.е. является скаляром. Лемма доказана.

Определение. Ковекторное поле $p = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ называется *обобщенным импульсом*, а скалярная функция $H(x, \dot{x}, t) = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\dot{x}^\alpha - L(x, \dot{x}, t)$ — *полной энергией.*

Оказывается, закон сохранения энергии имеет место в существенно более общей ситуации.

Теорема 15.4 (Закон сохранения энергии). *Пусть $L = L(x, \dot{x})$ — произвольный лагранжиан на M, явно не зависящий от параметра t. Тогда полная энергия H постоянна вдоль экстремалей функционала Φ_L.*

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\frac{dH\big(x(t), \dot{x}(t)\big)}{dt} = 0$$

для произвольной экстремали $\big(x(t), \dot{x}(t)\big)$ вдоль экстремалей. Имеем:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x} - L\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\ddot{x} - \frac{\partial L}{\partial x}\dot{x} - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\ddot{x} =$$
$$= \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{dL}{dx}\right)\dot{x} = 0,$$

где последнее равенство имеет место в силу уравнений Эйлера–Лагранжа. Доказательство закончено.

Теорема 15.5 (Закон сохранения импульса). *Пусть лагранжиан L не зависит явно от переменной x^i. Тогда i-ая компонента p_i обобщенного импульса p постоянна вдоль экстремалей функционала Ψ_L.*

Доказательство. Из уравнений Эйлера–Лагранжа вытекает, что

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) = 0,$$

что и требовалось.

В качестве примера использования законов сохранения, докажем теорему Клеро. Пусть M — двумерная поверхность в $\mathbb{R}^3$, полученная вращением вокруг оси z некоторой кривой, лежащей в плоскости xz и не пересекающей ось z. Напомним, что кривые, полученные пересечением поверхности M с плоскостями, проходящими через ось z, называются меридианами, а с плоскостями, параллельными плоскости xy — параллелями. Пусть $\gamma(t)$ — геодезическая на M, и $\psi(t)$ — угол между геодезической γ в точке $\gamma(t)$ и параллелью, проходящей через эту точку. Пусть $r(t)$ — расстояние от точки $\gamma(t)$ до оси z. Тогда имеет место следующий результат.

Теорема 15.6 (Клеро). *В сделанных выше предположениях, величина*

$$r(t)\cos\psi(t)$$

постоянна вдоль геодезической $\gamma(t)$.

Доказательство. В самом деле, вычислив метрику на поверхности вращения, легко проверить, что элемент длины, т.е. лагранжиан, задающий функционал длины, имеет вид $ds = L = \sqrt{(1+r_z^2(z))\dot{z}^2 + r^2(z)\dot{\varphi}^2}$, т.е. L явно не зависит от φ, поэтому имеет место закон сохранения импульса

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{r^2\dot{\varphi}}{L} = \mathrm{const}\,.$$

Так как каждая геодезическая γ параметризована пропорционально натуральному параметру, величина $L = \|\dot{\gamma}\|$ постоянна вдоль γ. Поэтому последнее соотношение равносильно условию $r^2\dot{\varphi} = \mathrm{const}$, что, в свою очередь, равносильно утверждению теоремы (проверьте). Доказательство закончено.

Замечание. На самом деле, законы сохранения энергии и импульса позволяют полностью проинтегрировать уравнение геодезических на поверхности вращения $M \subset \mathbb{R}^3$ (сделайте это).

15.4. Многомерные вариационные задачи

Заменим теперь кривую, на которой вычислялся вариационный функционал, на некоторую поверхность, заданную отображением области $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ в m-мерное многообразие M. Для простоты будем предполагать, что граница $\partial\Omega$ — несвязное объединение конечного числа гладких многообразий размерности $k-1$, т.е. Ω — гладкое многообразие с краем.

Рассмотрим сначала пространство

$$W = \cup_{P\in M} \underbrace{T_PM \times \cdots \times T_PM}_{k \text{ раз}}$$

и отметим, что на нем можно ввести структуру гладкого $(m\cdot k)$-мерного многообразия, действуя по аналогии с касательным расслоением. В частности, если $\pi\colon W \to M$ стандартная проекция, сопоставляющая набору касательных векторов $(v_1, \dots, v_k)$ из T_PM точку P, то локальные координаты $(x^1, \dots, x^m)$ в окрестности точки p порождают локальные координаты

$$(x^1, \dots, x^m, y_1^1, \dots, y_1^m, \dots, y_k^1, \dots, y_k^m)$$

на W, где $(y_i^1, \dots, y_i^m)$ — компоненты вектора v_i из соответствующего экземпляра T_PM в каноническом базисе $\{\partial_{x_j}\}$, порожденном координатами $(x^1, \dots, x^m)$.

Многомерным *лагранжианом* L будем называть непрерывную функцию $L\colon W \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$.

Если u^α — стандартные координаты в $\mathbb{R}^m \supset \Omega$, то лагранжиан будем записывать в координатах так:

$$L = L(x, y, u) = L(x^1, \dots, x^m, y_1, \dots, y_k, u^1, \dots, u^k),$$

где $y_i = (y_i^1, \dots, y_i^m)$.

Если $f\colon \Omega \to M$ — гладкое отображение, то *поднятием* $\tilde f$ назовем отображение из Ω в $W \times \mathbb{R}^m$, заданное так:

$$\tilde f(u) = \Big(f(u), \frac{\partial f}{\partial u}(u), u\Big).$$

Многомерным вариационным функционалом, соответствующим лагранжиану L, назовем отображение, которое каждому f ставит в соответствие число

$$\Phi_L(f) = \int_\Omega L\big(\tilde f(u)\big)\,du.$$

Деформацией или *вариацией* отображения $f\colon \Omega \to M$ называется гладкая гомотопия этого отображения, т.е. такое гладкое отображение $F\colon [-1,1] \times \Omega \to M$, что $F(s,u) = f_s(u)$, а полем вариации — векторное поле $E(u)$ вдоль f, определенное так: $E(u) = df_s/ds(u)|_{s=0} = dF|_{(0,u)}(\partial_s)$. Говорят, что деформация f_s *неподвижна на крае*, если точки из $\partial\Omega$ остаются неподвижными. В последнем случае поле E равно нулю на $\partial\Omega$.

Определение. Пусть лагранжиан L гладок в окрестности образа поднятия $\tilde f$. Тогда f называется *экстремалью функционала* Φ_L, если

$$\frac{d\Phi_L(f_s)}{ds}\Big|_{s=0} = 0$$

для любой достаточно малой деформации f_s отображения f, неподвижной на крае.

(Классическая) *многомерная вариационная задача* — это задача о поиске экстремалей многомерного вариационного функционала.

Следующая теорема доказывается аналогично теореме 15.1 (проверьте).

Теорема 15.7. *Отображение f является экстремалью функционала Φ_L, если и только если вдоль f выполняется следующая система дифференциальных уравнений Эйлера–Лагранжа*:

$$\sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial y^i_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Пример. Пусть область Ω лежит на плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами (u^1, u^2), и $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ — погружение. Пусть (x^1, x^2, x^3) — стандартные координаты в $\mathbb{R}^3$, и отображение f задается тремя координатными функциями $x^i(u^1, u^2)$. Если $f(u^1, u^2)$ радиус-вектор точки поверхности f с координатами (u^1, u^2), то индуцированная метрика имеет вид $g_{ij} = \langle f_{u^i}, f_{u^j}\rangle$. Рассмотрим функцию Лагранжа $L\colon W \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$L(x^1, x^2, x^3, y_1, y_2, u) = \frac{\langle y_1, y_1\rangle + \langle y_2, y_2\rangle}{2}.$$

Так как $\tilde f = \big(f(u), f_{u_1}(u), f_{u_2}(u), u\big)$, то Значение функционала $\Phi_L(f)$ имеет вид:

$$\Phi_L(f) = \frac{1}{2}\int_\Omega (g_{11} + g_{22})\, du^1 du^2.$$

Этот функционал называется *функционалом энергии* или *функционалом Дирихле.* Найдем его экстремали, для чего запишем уравнения Эйлера–Лагранжа. Рассматриваемый лагранжиан не зависит явно от x^i. При $i = 1$ имеем

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial y^1_\alpha}\right) = \frac{\partial y^1_1}{\partial u^1} + \frac{\partial y^1_2}{\partial u^2} = x^1_{u^1u^1} + x^1_{u^2u^2}.$$

При остальных i вычисления аналогичны. Итак, система уравнений Эйлера–Лагранжа принимает вид

$$x^i_{u^1u^1} + x^i_{u^2u^2} = 0, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Таким образом, координаты радиус-вектора экстремали функционала Дирихле являются гармоническими функциями. Напомним, что такие радиус-векторы (и соответствующие поверхности) называются гармоническими. Итак, мы доказали следующий результат.

Утверждение 15.1. *Экстремали функционала Дирихле — гармонические поверхности.*

Пример. В предыдущем примере изменим лагранжиан, положив

$$L(x^1, x^2, x^3, y_1, y_2, u) = \frac{1}{2}\sqrt{\langle y_1, y_1\rangle\langle y_2, y_2\rangle - \langle y_1, y_2\rangle^2}.$$

Тогда величина

$$\Phi_L(f) = \frac{1}{2}\int_\Omega \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\,du^1du^2.$$

пропорциональна площади поверхности f. Вариационный функционал Φ_L называется поэтому *функционалом площади* и иногда обозначается через vol_2. Оказывается, экстремали этого функционала — это минимальные поверхности, т.е. поверхности нулевой средней кривизны (докажите).

Задачи

Задача 15.1. Докажите, что экстремали многомерной вариационной задачи являются решениями уравнения Эйлера–Лагранжа.

Задача 15.2. Докажите, что экстремальность отображения по отношению к многомерному вариационному функционалу равносильна выполнению системы дифференциальных уравнений Эйлера–Лагранжа.

Задача 15.3. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ — погружение, и vol_2 обозначает функционал площади. Докажите, что для любой деформации f_s отображения f, неподвижной на границе $\partial\Omega$, выполняется

$$\frac{d\,\mathrm{vol}_2(f_s)}{ds}\Big|_{s=0} = -\int_\Omega \langle E, H\rangle,$$

где E — поле вариации f_s, а H — вектор средний кривизны поверхности f, т.е. произведение средней кривизны на единичную нормаль.

Задача 15.4. Докажите, что минимальная поверхность в $\mathbb{R}^3$ задается гармоническим радиус-вектором (все координатные функции — гармонические), если и только если индуцированная метрика конформна (изотермична).

Список литературы

1. *Мищенко А. С., Фоменко А. Т.* Курс дифференциальной геометрии и топологии. — М.: Факториал Пресс, 2000.

2. *Мищенко А. С., Фоменко А. Т.* Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии. — М.: Физматлит, 2004.

3. *Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Элементы дифференциальной геометрии и топологии. — М.: Наука, 1987.

4. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр 2: Линейная алгебра и дифференциальная геометрия. — М.: Наука, 1979; Семестр 3: Гладкие многообразия. — М.: Наука, 1987.

5. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия: в 2 т. — М.: Наука, 1979, 1984.

6. *Рашевский П. К.* Курс дифференциальной геометрии. — М.: Гостехиздат, 1956.

7. *Трофимов В. В.* Введение в геометрию многообразий с симметриями. — М.: Изд-во МГУ, 1989.

8. *Васильев А. М., Соловьев Ю. П.* Дифференциальная геометрия. — М.: Изд-во МГУ, 1988.

9. *Мищенко А. С., Соловьев Ю. П., Фоменко А. Т.*, Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии. — М.: Физматлит, 2004.

10. *Иванов А. О., Тужилин А. А.*, Лекции по классической дифференциальной геометрии. — М.: Логос, 2008.