Некоторые открытые проблемы по топологии и динамическим системам

Е.А.Кудрявцева

Все перечисленные здесь проблемы являются открытыми и актуальными, а продвижение по любой из них достойно опубликования. Кроме открытых проблем приводятся также упражнения и задачи. Этими исследовательскими задачами могут начать заниматься студенты 2–5 курсов, аспиранты. Проблемы разбиты на пять групп:

А. Задача самопересечения для поверхностей в 4-мерных многообразиях.

Б. Минимальные задачи о неподвижных точках, точках совпадения и прообраза при отображениях поверхностей.

В. Пространства функций Морса (и функций с умеренными особенностями) на поверхностях. Глобальная теория особенностей гладких функций (и гамильтоновых систем) на поверхностях.

Г. Инварианты идеальных магнитных полей в $\mathbb{R}^3$.

Д. Устойчивость Солнечной системы.

Желательно знакомство с такими понятиями дифференциальной геометрии и топологии, как ориентированное многообразие, касательный вектор и касательное пространство, степень гладкого отображения (А,Б), теорема классификации замкнутых поверхностей, связные топологические пространства, односвязные топологические пространства, гомотопия отображений, фундаментальная группа (А,Б,В), гладкая функция, функция Морса (В,Д), замкнутые дифференциальные формы, бездивергентные векторные поля в $\mathbb{R}^3$, диффеоморфизм, гамильтонова система (Г,Д).

Любые возникающие вопросы по задачам (и их решения) можно обсудить на кафедре дифференциальной геометрии и приложений (ауд. 16-19). Исследовательский семинар по задачам, близким к задачам А,Б,Г, проходит по средам, 16:20, ауд. 14-07 или 15-02. Приглашаются все желающие.

А. Задача самопересечения для поверхностей в 4-мерных многообразиях

Эта актуальная задача является развитием классических задач, изучавшихся Я.Нильсеном (1927), Х.Уитни (1944), К.Уоллом (1970), а также многими современными математиками.

Пусть $M = M^2$ – связная замкнутая ориентированная двумерная поверхность, $N = N^4$ – 4-мерное связное ориентированное многообразие, и $f\colon M \to N$ – непрерывное отображение. Рассмотрим *множество точек самопересечения*

$$I(f) := \{(x, x') \in M \times M \mid x \neq x',\ f(x) = f(x')\}.$$

Ясно, что это множество состоит из пар вида $(x, x'), (x', x)$. Требуется найти отображение $f_0\colon M \to N$, гомотопное отображению f и имеющее наименьшее возможное (среди всех таких отображений) количество точек самопересечения:

$$\mathrm{MI}[f] := |I(f_0)| \leq |I(g)|$$

для любого отображения $g\colon M \to N$, гомотопного отображению f. Нужно также найти само число $\mathrm{MI}[f] := |I(f_0)|$, которое называют *минимальным* числом *самопересечения* для f. Аналогичная задача самопересечения ставится для любого непрерывного отображения $f\colon M^n \to N^{2n}$, где $\dim M = n$, $\dim N = 2n$.

Известны следующие классические подходы к решению этой задачи.

Метод Уитни 1944 (односвязный случай). Предположим, что точка самопересечения $(x,x') \in I(f)$ трансверсальна (этого можно добиться малым шевелением отображения f). Тогда нетрудно определить *индекс самопересечения* ± 1 *в точке* (x,x'), который обозначим $\mathrm{ind}_{(x,x')}f$. А именно, знак $\mathrm{ind}_{(x,x')}f = \pm 1$ показывает, согласована ли ориентация касательного пространства T_yN в точке $y := f(x) = f(x')$ с ориентацией, полученной при разложении $T_yN = df(T_xM) \oplus df(T_{x'}M)$. Здесь ориентация плоскости $df(T_xM) \subset T_yN$ индуцирована из ориентации касательной плоскости T_xM при касательном отображении $df(x)\colon T_xM \to T_yN$, а ориентация плоскости $df(T_{x'}M) \subset T_yN$ индуцирована из ориентации касательной плоскости $T_{x'}M$ при касательном отображении $df(x')\colon T_{x'}M \to T_yN$. Определим *индекс самопересечения* отображения f как целое число

$$\mathrm{ind} f := \sum_{(x,x') \in I(f)} \mathrm{ind}_{(x,x')} f.$$

Аналогичным образом определяется индекс самопересечения для любого непрерывного отображения $f\colon M^n \to N^{2n}$, в том числе когда многообразия M, N не обязательно ориентируемы.

Можно показать, что $\mathrm{ind} f = \mathrm{ind} g$, если отображения $f, g\colon M \to N$ гомотопны. То есть, индекс самопересечения не меняется при гомотопии отображения f, а значит, является *гомотопическим инвариантом* отображения. Отсюда следует важный вывод: если $\mathrm{ind} f \neq 0$, то f не гомотопно вложению.

Согласно теореме Уитни (1944), любое замкнутое многообразие M^n гладко вкладывается в $\mathbb{R}^{2n}$, т.е. существует вложение $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$. Следовательно, $\mathrm{ind} f = \mathrm{MI}[f] = 0$ для любого отображения $f\colon M^n \to \mathbb{R}^{2n}$. (Все отображения $M \to \mathbb{R}^k$ гомотопны.) Из теоремы К.Уолла (1970), см. ниже, вытекает следующий аналог теоремы Уитни в случае, когда $M^n = S^n$ – n-мерная сфера, $n \geq 3$, а N^{2n} *односвязно*: любое отображение $f\colon M^n \to N^{2n}$ гомотопно вложению в том и только том случае, когда $\mathrm{ind} f = 0$.

Проблема А1. Пусть $M = M^n$ и $N = N^{2n}$ – ориентированные (или не обязательно) гладкие связные многообразия, причем M замкнуто, а N *односвязно* (т.е. любая замкнутая кривая на N стягиваема в точку). Доказать, что в случае $n \geq 3$ выполнено следующее обобщение теорем Уитни и Уолла: любое отображение $f\colon M^n \to N^{2n}$ гомотопно вложению в том и только том случае, когда $\mathrm{ind} f = 0$.

Упражнение 1. Верно ли аналогичное утверждение, если размерность n равна 1 или 2?

Метод Нильсена 1927 (общий случай). Если N не является односвязным, определим “более тонкий” гомотопический инвариант, чем индекс самопересечения $\mathrm{ind} f$. Две точки самопересечения $(x_i, x_i') \in I(f)$, $i = 0, 1$, называются *эквивалентными по Нильсену*, если существует пара путей $\gamma, \delta\colon [0,1] \to M$, где $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$, $\delta(0) = x_0'$, $\delta(1) = x_1'$, причем пути $f \circ \gamma, g \circ \delta\colon [0,1] \to N$ гомотопны относительно концов (в классе путей, идущих из точки $f(x_0) = g(x_0')$ в точку $f(x_1) = g(x_1')$). Пусть $[(x,x')]$ – класс эквивалентности (называемый также *классом Нильсена*) точки самопересечения $(x,x') \in I(f)$. Определим *индекс самопересечения f на классе Нильсена* $[(x,x')]$ как $\mathrm{ind}_{[(x,x')]} f := \sum_{(x_1,x_1') \in [(x,x')]} \mathrm{ind}_{(x_1,x_1')} f$. Ясно, что $\mathrm{ind} f = \sum_{[(x,x')]} \mathrm{ind}_{[(x,x')]} f$, где сумма берется по всем классам Нильсена точек самопересечения. Назовем класс Нильсена $[(x,x')]$ *существенным*, если его индекс $\neq 0$. Количество существенных классов Нильсена обозначается через $\mathrm{NI}[f]$ и называется *нильсенским числом самопересечения* отображения f.

Набор индексов существенных классов Нильсена, а значит, и их количество $\mathrm{NI}[f]$, являются гомотопическими инвариантами отображения f. Отсюда следует важный вывод: минимальное число самопересечения не меньше числа Нильсена, т.е.

$$\mathrm{MI}[f] \geq \mathrm{NI}[f].$$

К.Уолл (1970) доказал, что если $M^n = S^n$ – n-мерная сфера и $n \geq 3$, то любое отображение $f\colon M^n \to N^{2n}$ гомотопно вложению в том и только том случае, когда $\mathrm{NI}[f] = 0$. Ограничение на размерность $n \geq 3$ в теореме Уолла является необходимым, согласно результатам М.Келли (1987, случай $n = 2$) и С.А.Богатого, Е.А.Кудрявцевой и Х.Цишанга (2004, случай $n = 1$).

Проблема А2. Пусть $M = M^n$ и $N = N^{2n}$ – ориентированные (или не обязательно) связные гладкие многообразия, причем M замкнуто и $n \geq 3$. Доказать следующее усиление теорем Уитни и Уолла: любое отображение $f\colon M^n \to N^{2n}$ гомотопно вложению в том и только том случае, когда $\mathrm{NI}[f] = 0$ (последнее означает существование хотя бы одного существенного класса Нильсена точек самопересечения f).

Задача 1. Верно ли аналогичное утверждение, если размерность n равна 1 или 2? (Случай $n = 2$ для отображений сферы $S^2 \to N^4$ рассматривался М.Келли (1987). При $n = 1$ задача самопересечения кривых на поверхностях была недавно полностью решена в работе С.А.Богатого, Е.А.Кудрявцевой и Х.Цишанга (2004).)

Проблема А3. Пусть $M = M^n$ и $N = N^{2n}$ – ориентированные (или не обязательно) связные гладкие многообразия, причем M замкнуто, а $n \geq 3$. Доказать следующее усиление проблем А1 и А2: для любого отображения $f\colon M^n \to N^{2n}$ минимальное число точек самопересечения равно числу Нильсена: $\mathrm{MI}[f] = \mathrm{NI}[f]$.

Проблема А4. Верно ли аналогичное утверждение, если размерность n равна 2 (т.е. замкнутая поверхность отображается в 4-мерное многообразие)? Вычислить минимальное число самопересечения $\mathrm{MI}[f]$ и число Нильсена $\mathrm{NI}[f]$ для любого отображения $f\colon M^2 \to N_4$.

[Рекомендованная литература: М.Келли (1987), Б.Шнайдерман и П.Тайхнер (2000), С.А.Богатый, Е.А.Кудрявцева и Х.Цишанг (2004).]

Б. Минимальные задачи о неподвижных точках, точках совпадения и прообраза при отображениях поверхностей

Эти актуальные задачи являются развитием задач, изучавшихся Л.Брауером (1911), Я.Нильсеном (1927), Х.Кнезером (1928), Х.Хопфом (1930), Ф.Векеном (1941), Х.Ширмер (1955), Лефшецем (1930), Б.Янгом (1981), а также многими другими современными математиками.

Пусть M^2 и N^2 – замкнутые связные ориентированные двумерные поверхности и $f, g\colon M \to N$ – пара непрерывных отображений между ними. Рассмотрим *множество точек совпадения*

$$\mathrm{coin}(f, g) := \{x \in M \mid f(x) = g(x)\}.$$

Требуется найти пару отображений $f_0, g_0\colon M \to N$, гомотопных отображениям f, g, с наименьшим возможным (среди всех таких пар отображений) количеством точек совпадения:

$$\mathrm{MC}[f, g] := |\mathrm{coin}(f_0, g_0)| \leq |\mathrm{coin}(f_1, g_1)|$$

для любой пары отображений $f_1, g_1\colon M \to N$, гомотопных данным отображениям f, g. Нужно также найти само число $\mathrm{MC}[f, g] := |\mathrm{coin}(f_0, g_0)|$, которое называют *минимальным числом совпадения* для пары (f, g). Аналогичная задача совпадения ставится для любой пары непрерывных отображений $f, g\colon M^n \to N^n$, где $\dim M = \dim N = n$. Важными частными случаями задачи совпадения являются задача о неподвижных точках отображения f (здесь $g = \mathrm{id}$, $\mathrm{Fix}(f) = \mathrm{coin}(f, \mathrm{id})$) и задача о прообразе точки при отображении f (здесь $g = \mathrm{const}\colon M \to y_0 \in N$, $f^{-1}(y_0) = \mathrm{coin}(f, \mathrm{const})$).

Известны следующие классические подходы к решению этих задач.

Метод Лефшеца (односвязный случай). Предположим, что точка совпадения $x \in \mathrm{coin}(f,g)$ трансверсальна (этого можно добиться малым шевелением пары отображений f,g). Тогда нетрудно определить *индекс совпадения* ± 1 *в точке* x, который обозначим $\mathrm{ind}_x(f,g)$ (аналогично определению степени $\deg_x f$ отображения f в точке $x \in f^{-1}(y_0)$, а также определению индекса неподвижной точки $x \in \mathrm{Fix}(f)$). А именно, знак $\mathrm{ind}_x(f,g) = \pm 1$ показывает, согласована ли ориентация касательной плоскости T_yN в точке $y := f(x) = g(x)$ с ориентацией, индуцированной из ориентации касательной плоскости T_xM при касательном отображении $df(x) - dg(x)\colon\ T_xM \to T_yN$. Определим *индекс совпадения* пары (f,g) как целое число

$$\mathrm{ind}(f,g) := \sum_{x \in \mathrm{coin}(f,g)} \mathrm{ind}_x(f,g).$$

Аналогичным образом определяется индекс совпадения для любой пары непрерывных отображений $f,g\colon\ M^n \to N^{2n}$, в том числе когда рассматриваемые многообразия не обязательно ориентируемы. В случае задачи о неподвижных точках, индекс совпадения пары (f,id) равен *числу Лефшеца отображения* f, которое обозначается через $L(f) = \mathrm{ind}(f,\mathrm{id})$. В случае задачи о прообразе точки, индекс совпадения пары (f,const) называется *степенью* (или *абсолютной степенью*, в неориентируемом случае) отображения f и обозначается через $\deg f = \mathrm{ind}(f,\mathrm{const})$ (соответственно $A(f)$).

Можно показать, что $\mathrm{ind}(f,g) = \mathrm{ind}(\tilde f,\tilde g)$, если отображения $f,\tilde f\colon\ M \to N$ гомотопны, а отображения $g,\tilde g\colon\ M \to N$ тоже гомотопны. То есть, индекс совпадения не меняется при гомотопии пары отображений (f,g), а значит, является *гомотопическим инвариантом* пары отображений. Отсюда следует важный вывод: если $\mathrm{ind}(f,g) \neq 0$, то пара (f,g) не гомотопна никакой паре $(\tilde f,\tilde g)$, не имеющей точек совпадения.

Из теорем Ф.Векена 1941, Х.Ширмер 1955, Р.Добренько–Е.Езерского 1993 ($n \geq 3$), Е.Езерского 1992 ($n = 2$, для $N = S^2$ и $N = \mathbb{R}P^2$), см. ниже, следует, что если M^n замкнуто, а N^n *односвязно*, то для любой пары отображений $f,g\colon\ M \to N$ выполнено следующее: пара (f,g) гомотопна паре (f_0,g_0), не имеющей точек совпадения, в том и только том случае, когда $\mathrm{ind}(f,g) = 0$.

Упражнение 2. Верно ли аналогичное утверждение для любой пары непрерывных отображений f,g окружности в себя? (То есть, при $n = 1$.)

Упражнение 3. Докажите аналогичное утверждение для любой пары непрерывных отображений f,g двумерного тора в себя. (То есть, при $n = 2$ и $M = N$ – двумерный тор.)

Задача 2. Докажите, что предположение об односвязности N^2 нельзя отбросить, если $n = 2$ и $g = \mathrm{id}$ (задача о неподвижных точках отображения поверхности, т.е. $\mathrm{ind}(f,\mathrm{id}) = L(f)$). (Пример Б.Янга 1981.)

Согласно результату Х.Кнезера (1928), предположение об односвязности N^n можно отбросить, если $n = 2$ и $g = \mathrm{const}$ (задача прообраза точки при отображениях поверхностей, т.е. $\mathrm{ind}(f,\mathrm{const}) = \deg f$).

Метод Нильсена 1927 (общий случай). Если N не является односвязным, определим "более тонкий" гомотопический инвариант, чем индекс совпадения $\mathrm{ind}(f,g)$. Две точки совпадения $x_0, x_1 \in \mathrm{coin}(f,g)$ называются *эквивалентными по Нильсену*, если существует такой путь $\gamma\colon\ [0,1] \to M$ из точки $\gamma(0) = x_0$ в точку $\gamma(1) = x_1$, что пути $f \circ \gamma, g \circ \gamma\colon\ [0,1] \to N$ гомотопны относительно концов (в классе путей, идущих из точки $f(x_0) = g(x_0)$ в точку $f(x_1) = g(x_1)$). Пусть $[x]$ – класс эквивалентности (называемый также *классом Нильсена*) точки совпадения $x \in \mathrm{coin}(f,g)$. Определим *индекс совпадения пары* (f,g) *на классе Нильсена* $[x]$ как $\mathrm{ind}_{[x]}(f,g) := \sum_{x' \in [x]} \mathrm{ind}_{x'}(f,g)$. Ясно, что $\mathrm{ind}(f,g) = \sum_{[x]} \mathrm{ind}_{[x]}(f,g)$, где сумма берется по всем классам Нильсена точек совпадения пары (f, g). Назовем класс Нильсена $[x]$ *существенным*, если его индекс $\neq 0$. Количество существенных классов Нильсена обозначается через $\mathrm{NC}[f]$ и называется *нильсенским числом совпадения* для пары отображений (f, g).

Набор индексов существенных классов Нильсена, а значит, и их количество $\mathrm{NC}[f]$, являются гомотопическими инвариантами пары отображений (f, g). Отсюда следует важный вывод: минимальное число совпадения не меньше числа Нильсена, т.е.

$$\mathrm{MC}[f, g] \geq \mathrm{NC}[f, g].$$

Ф.Векен 1941, Х.Ширмер 1955 (ориентируемый случай) и Р.Добренько–Е.Езерски 1993 (общий случай) доказали, что если $n \neq 3$, то для любой пары отображений $f, g\colon M^n \to N^n$ выполнено $\mathrm{MC}[f, g] = \mathrm{NC}[f, g]$. Ограничение на размерность $n \neq 2$ в этой теореме является необходимым, согласно примеру Х.Хопфа (1930, задача о прообразе точки, т.е. $g = \mathrm{const}$) и примеру Б.Янга (1981, задача о неподвижных точках, т.е. $g = \mathrm{id}$).

В случае $n = 2$ (для отображений между поверхностями) известны следующие результаты в задаче совпадения, кроме вышеупомянутых результатов Езерского 1992, Кнезера 1928, Хопфа 1930 и Янга 1981.

- Н.В.Иванов (1982) и Б.Янг (1981) одновременно и независимо доказали равенство $\mathrm{MC}[f, g] = \mathrm{NC}[f, g]$ для любой пары *гомеоморфизмов* $f, g\colon M \to M = N$.

- С.А.Богатый, Д.Л.Гонсалвес, Е.А.Кудрявцева и Х.Цишанг (1998–2001) полностью решили задачу прообраза точки при отображениях поверхностей (т.е. вычислили $\mathrm{MC}[f, \mathrm{const}]$ и исследовали, когда выполнено $\mathrm{MC}[f, \mathrm{const}] = \mathrm{NC}[f, \mathrm{const}]$).

- С.А.Богатый, Е.А.Кудрявцева и Х.Цишанг (2005) доказали равенство $\mathrm{MC}[f, g] = \mathrm{NC}[f, g]$ в случае, когда M – тор или бутылка Клейна.

Проблема Б1. Пусть $M = M^2$ и $N = N^2$ – ориентированные (или не обязательно) связные гладкие поверхности, причем M замкнута. Для любой пары непрерывных отображений $f, g\colon M \to N$ вычислить минимальное число точек совпадения $\mathrm{MI}[f, g]$. Для каких пар (f, g) выполнено $\mathrm{MI}[f, g] = \mathrm{NI}[f, g]$? Построить "более тонкий" (чем число совпадения Нильсена $\mathrm{NC}[f, g]$) гомотопический инвариант пары (f, g) (обозначим его $\mathrm{NC}_1[f, g]$), для которого $\mathrm{MC}[f, g] \geq \mathrm{NC}_1[f, g] \geq \mathrm{NC}[f, g]$ для любой пары (f, g), причем $\mathrm{NC}_1[f, g] > \mathrm{NC}[f, g]$ для некоторых пар (f, g).

Проблема Б2. Пусть $M = M^2$ и $N = N^2$ – ориентированные (или не обязательно) связные гладкие поверхности, причем M замкнута. Пусть для пары непрерывных отображений $f, g\colon M \to N$ число совпадения Нильсена равно нулю: $\mathrm{NC}[f, g] = 0$. Вычислить минимальное число совпадения $\mathrm{MC}[f, g]$ (оно не обязательно равно нулю, см. пример Б.Янга 1981 выше). Построить для таких пар "более тонкий" (чем число совпадения Нильсена $\mathrm{NC}[f, g]$) гомотопический инвариант пары (f, g), см. проблему Б1.

Проблема Б3. Решить одну из вышеуказанных проблем в каком-либо частном случае, например, для задачи о неподвижных точках (т.е. для $g = \mathrm{id}$), или когда M – поверхность рода 2, или N – двумерный тор, или когда $\deg f = \deg g = 0$, и т.п.

В. Пространства функций Морса (и функций с умеренными особенностями) на поверхностях. Глобальная теория особенностей гладких функций (и гамильтоновых систем) на поверхностях

Эта серия актуальных задач имеет важные приложения в качественной теории динамических систем, а именно в теориях лиувиллевой и орбитальной классификаций интегрируемых гамильтоновых систем (например, для известных интегрируемых задач динамики твердого тела с двумя степенями свободы). Эта задача является развитием задач, изучавшихся А.Б.Гивенталем 1982 и В.И.Арнольдом 1989 (случай функций на окружности), А.Т.Фоменко 1986, А.Т.Фоменко и Х.Цишангом 1987–90, А.Т.Фоменко и А.В.Болсиновым 1993 (теория Морса для интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы), С.В.Матвеевым 1998, Х.Цишангом 1998, В.В.Шарко 1998 (пространство функций Морса на поверхностях), и многими другими современными математиками.

Пусть $M = M^2$ – замкнутая компактная связная ориентируемая поверхность. Гладкая функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ называется *функцией Морса*, если для любой ее критической точки (т.е. такой точки $x \in M$, в которой все первые частные производные функции f равны нулю) матрица, составленная из вторых частных производных функции f в этой точке, невырождена. Пусть $F = F_{p,q,r}(M)$ – пространство функций Морса на поверхности M, имеющих ровно p точек локальных минимумов, q седловых точек и r точек локальных максимумов. Пространство F мы снабдим C^∞-топологией (т.е. топологией равномерной сходимости функций и всех их частных производных любого порядка). Требуется найти *гомотопический тип* пространства F. В частности, нужно выяснить, является ли F связным, односвязным, и вычислить такие топологические инварианты F, как группы гомологий $H_k(F)$ и гомотопические группы $\pi_k(F)$. Аналогичные задачи ставятся для пространств функций Морса на компактной поверхности M с непустым краем, а также для пространств функций, имеющих "умеренные" особенности. При этом предполагается, что все критические точки лежат внутри поверхности, а ограничение функции на любую компоненту края равно константе (с фиксированным направлением роста функции вблизи края).

С.В.Матвеев (1999) доказал, что если M замкнута (или любая компонента края M является локальным максимумом функций), то пространство F линейно связно. Е.А.Кудрявцева и М.Басманова (2000) изучали компоненты связности пространства F, когда поверхность M имеет непустой край и $p = r = 0$ (т.е. функции имеют только седловые критические точки). Е.А.Кудрявцева и Д.А.Пермяков (2006) доказали, что пространство F имеет гомотопический тип некоторого (не более чем счетного) клеточного комплекса $\tilde{\mathbb{K}}$ размерности $q-1$.

Проблема В1. Описать клеточный комплекс $\tilde{\mathbb{K}}$ алгоритмически.

Проблема В2. Описать множество компонент связности пространства F, если поверхность M имеет непустой край.

Проблема В3. Является ли пространство F односвязным, если поверхность $M = S^2$ является сферой, а число седел $q \le 2$?

Проблема В4. Является ли пространство F односвязным, если поверхность M замкнута?

Проблема В5. Вычислить гомотопические группы $\pi_k(F)$ пространства F, $k \geq 0$.

Проблема В6. Вычислить группы гомологий $H_k(F)$ пространства F, $k \geq 0$.

Г. Инварианты идеальных магнитных полей в $\mathbb{R}^3$

Эта актуальная задача из области теоретической физики изучается многими современными математиками и физиками: Е.Калаби (1970), В.И.Арнольд (1973), А.Баняга (1978), Я.Элиашберг и Л.Полтерович (1993), Х.Хофер (1993), Х.Хофер и Е.Цендер (1994), В.И.Арнольд и Б.А.Хесин (1998), Л.Полтерович (2001), и др.

Общая постановка проблемы.
Идеальное магнитное поле в $\mathbb{R}^3$ – это замкнутая дифференциальная 2-форма $\omega = \omega_t$ с компактным носителем в $\mathbb{R}^3$ (или бездивергентное векторное поле в $\mathbb{R}^3$), зависящая от времени t

согласно системе дифференциальных уравнений Максвелла с нулевым электрическим полем (конкретный вид этой системы нам здесь не понадобится). Требуется найти как можно больше "законов сохранения", или "первых интегралов" системы, т.е. таких функций $f = f(\omega)$ на пространстве замкнутых 2-форм, что $f(\omega_t)$ не зависит от времени t для любого решения ω_t.

Из уравнений Максвелла (явный вид этих уравнений нам здесь не понадобится) следует известный "принцип замороженности магнитных линий": существует такое семейство диффеоморфизмов φ_t пространства $\mathbb{R}^3$, что $\varphi_0 = \mathrm{id}$ и $\omega_t = \varphi_t^* \omega_0$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Поэтому, если найдется функция $f = f(\omega)$, определенная на множестве замкнутых 2-форм, такая, что $f(\varphi^*\omega) = f(\omega)$ для любой замкнутой 2-формы ω и любого сохраняющего ориентацию диффеоморфизма $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, то $f(\omega_t) = \mathrm{const}$ не зависит от времени (т.е. функция f является первым интегралом задачи). Возникает следующая, более специальная, постановка проблемы:

Специальная постановка проблемы. Симметричные инварианты зацеплений. Пусть функция $f = f(\omega)$ определена на множестве замкнутых 2-форм ω с компактным носителем в $\mathbb{R}^3$. Функция f называется *инвариантом* магнитных полей, если для любой замкнутой 2-формы ω и любого диффеоморфизма $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ выполнено $f(\varphi^*\omega) = f(\omega)$. Требуется найти как можно больше (функционально независимых) инвариантов магнитных полей.

Известен *инвариант спиральности* магнитного поля, или *инвариант Хопфа*:

$$\mathcal{H}(\omega) := \int_{\mathbb{R}^3} \omega \wedge \alpha = \int_{\mathbb{R}^3} \alpha \wedge \omega,$$

где α – любая 1-форма, для которой $d\alpha = \omega$ (такая 1-форма существует в силу леммы Пуанкаре).

Упражнение 4. Докажите, что инвариант спиральности $\mathcal{H}$ определен корректно, т.е. значение $\mathcal{H}(\omega)$ не зависит от выбора 1-формы α.

Проблема Г1. Найти новый инвариант магнитных полей, не являющийся функцией от инварианта $\mathcal{H}$ (т.е. не представимый в виде композиции $f \circ \mathcal{H}$, где $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$), либо доказать, что таких инвариантов нет.

Магнитное поле определяет заполнение пространства $\mathbb{R}^3$ (а точнее, области в $\mathbb{R}^3$, где $\omega \neq 0$) интегральными траекториями поля ядер 2-формы ω. При этом все траектории – это простые (т.е. не имеющие самопересечений), попарно не пересекающиеся гладкие ориентированные кривые в $\mathbb{R}^3$, причем некоторые из траекторий могут быть замкнутыми. Поэтому магнитное поле можно рассматривать как "распределенное (ориентированное) зацепление в пространстве $\mathbb{R}^3$". В.И.Арнольд (1973) доказал, что $\mathcal{H}(\omega)$ равно "усредненному коэффициенту зацепления" (см. ниже) магнитных линий (т.е. интегральных траекторий поля ядер 2-формы ω). Это приводит к идее о возможном соответствии между инвариантами магнитных полей и инвариантами зацеплений (т.е. "зацепленных" кривых в $\mathbb{R}^3$).

Зацеплением называется конечный набор $(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ простых, замкнутых, попарно не пересекающихся гладких кривых в $\mathbb{R}^3$. Если кривые ориентированы (т.е. на них фиксировано направление обхода), то зацепление называется ориентированным. При $k = 1$ зацепление называется *узлом*. *Инвариантом зацеплений* называется такая функция $f = f(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$, что для любого сохраняющего ориентацию диффеоморфизма $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ выполнено $f(\gamma_1, \dots, \gamma_k) = f(\varphi \circ \gamma_1, \dots, \varphi \circ \gamma_k)$. Инвариант $f = f(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ назовем *симметричным*, если для любой перестановки $\sigma \in \Sigma_k$ выполнено $f = f_\sigma$, где $f_\sigma(\gamma_1, \dots, \gamma_k) := f(\gamma_{\sigma(1)}, \dots, \gamma_{\sigma(k)})$.

Построим простейший инвариант ориентированных зацеплений – *коэффициент зацепления*. Мы покажем, что ему "соответствует" инвариант спиральности $\mathcal{H}$ магнитных полей.

Задача 3. Пусть (γ_1, γ_2) – ориентированное зацепление. Более точно, пусть $\gamma_1\colon [0; a] \to \mathbb{R}^3$ и $\gamma_2\colon [0; b] \to \mathbb{R}^3$ – гладкие кривые в $\mathbb{R}^3$, которые замкнуты и не пересекаются (т.е. $\gamma_1(0) =$

$\gamma_1(a)$, $\gamma_2(0) = \gamma_2(b)$, и $\gamma_1(t_1) \neq \gamma_2(t_2)$ для любой пары $(t_1, t_2) \in [0; a] \times [0; b]$). Определим *отображение Гаусса* $\Gamma\colon T^2 \to S^2$ двумерного тора T^2 в двумерную сферу S^2 формулой $\Gamma(t_1, t_2) := \frac{\gamma_1(t_1) - \gamma_2(t_2)}{|\gamma_1(t_1) - \gamma_2(t_2)|}$, $(t_1, t_2) \in [0; a] \times [0; b]$, где двумерный тор T^2 получен из прямоугольника $[0; a] \times [0; b]$ отождествлением противоположных сторон. *Коэффициентом зацепления* пары (γ_1, γ_2) называется степень отображения Γ, т.е. целое число

$$lk(\gamma_1, \gamma_2) := \deg \Gamma.$$

(а) Докажите, что lk симметричен: $lk(\gamma_1, \gamma_2) = lk(\gamma_2, \gamma_1)$.
(б) Докажите, что lk является инвариантом зацеплений (т.е. для любого сохраняющего ориентацию диффеоморфизма $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ выполнено $lk(\gamma_1, \gamma_2) = lk(\varphi \circ \gamma_1, \varphi \circ \gamma_2)$).
(в) Докажите *формулу Гаусса*:

$$(*) \qquad lk(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{1}{4\pi} \int_0^a \int_0^b \frac{(\gamma_1(t_1) - \gamma_2(t_2), \dot\gamma_1(t_1), \dot\gamma_2(t_2))}{|\gamma_1(t_1) - \gamma_2(t_2)|^{3/2}} dt_2 dt_1,$$

где $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \in \mathbb{R}$ – смешанное произведение тройки векторов $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3 \in \mathbb{R}^3$.

Задача 4. Для любой замкнутой 2-формы ω в $\mathbb{R}^3$ определим 1-форму α в $\mathbb{R}^3$ как несобственный интеграл

$$\alpha(\mathbf{r}_2) := -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{r}_2\}} \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, d\mathbf{r}_1, d\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^{3/2}} \wedge \omega(\mathbf{r}_1), \quad \mathbf{r}_2 \in \mathbb{R}^3,$$

где $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2$; $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, d\mathbf{r}_1, d\mathbf{r}_2)$ обозначает следующую 2-форму в $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$:

$$(x_1 - x_2)(dy_1 \wedge dz_2 - dz_1 \wedge dy_2) + (y_1 - y_2)(dz_1 \wedge dx_2 - dx_1 \wedge dz_2) + (z_1 - z_2)(dx_1 \wedge dy_2 - dy_1 \wedge dx_2).$$

Докажите, что $d\alpha = \omega$.

Из задачи 4 получаем интегральное представление инварианта спиральности $\mathcal{H}$ магнитного поля в виде несобственного интеграла

$$(**) \qquad \mathcal{H}(\omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \setminus \Delta} \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, d\mathbf{r}_1, d\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^{3/2}} \wedge \omega(\mathbf{r}_1) \wedge \omega(\mathbf{r}_2),$$

где $\Delta := \{(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2\}$ – "диагональ" в $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, интегрирование берется по множеству пар $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ вида $\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2$, $\omega(\mathbf{r})$ равно значению 2-формы ω в точке $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$.

Из сравнения формул $(*)$ и $(**)$ получаем следующий **"метод построения инвариантов магнитных полей по интегральным представлениям инвариантов зацеплений":** в интегральном представлении инварианта зацеплений $f = f(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ нужно заменить (для каждого $i = 1, \ldots, k$) интегрирование по параметру t_i кривой $\gamma_i = \gamma_i(t_i)$ интегрированием по пространству $\mathbb{R}^3$ с переменной $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^3$, а также заменить $\gamma_i(t_i)$ на $\mathbf{r}_i$, а каждую компоненту векторно-значной 1-формы $\dot\gamma_i(t_i) dt_i$ на соответствующую компоненту векторно-значной 3-формы $d\mathbf{r}_i \wedge \omega(\mathbf{r}_i)$.

Задача 5. Докажите, что применением указанного выше "метода построения инвариантов магнитных полей" к инвариантам зацеплений $f = f(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ и $f_\sigma = f_\sigma(\gamma_1, \ldots, \gamma_k) := f(\gamma_{\sigma(1)}, \ldots, \gamma_{\sigma(k)})$ будет "получен" один и тот же инвариант магнитных полей, где $\sigma \in \Sigma_k$ – любая перестановка.

Согласно задаче 5, инвариант зацеплений $f = f(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ и отвечающий ему симметричный инвариант $\frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} f_\sigma$ будут "определять" один и тот же инвариант магнитных полей. Значит, достаточно рассматривать лишь симметричные инварианты зацеплений.

Отметим, что известно много инвариантов (ориентированных) зацеплений, допускающих интегральное представление, аналогичное представлению $(*)$, например, μ-инварианты Милнора, интеграл Концевича для инвариантов Васильева конечного порядка, и др.

Проблема Г2. Найти симметричный инвариант зацеплений $f = f(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$, не выражающийся через $lk(\gamma_i, \gamma_j)$, $1 \le i < j \le k$, и представимый в интегральной форме, аналогичной представлению $(*)$ инварианта $lk = lk(\gamma_1, \gamma_2)$. Либо доказать, что таких инвариантов нет.

Другая специальная постановка проблемы. Гамильтонова динамика. Рассмотрим специальные магнитные поля (важные при изучении магнитного поля Солнца) – это такие замкнутые 2-формы ω в $\mathbb{R}^3$, носители которых содержатся в некотором полнотории $D^2 \times S^1$, где D^2 – замкнутый круг, S^1 – окружность, причем направляющие векторы магнитных линий имеют отличную от нуля составляющую вдоль S^1. Таким магнитным полям отвечают сохраняющие площади отображения $g\colon D^2 \to D^2$ круга D^2 в себя (называемые также *симплектическими* отображениями круга, где симплектическая 2-форма ω_0 на D^2 равна стандартной ориентированной форме площадей на круге). Пусть

$$G := \{g\colon D^2 \to D^2 \mid g^*\omega_0 = \omega_0\}$$

– множество всех сохраняющих площади отображений круга D^2 в себя (т.е. симплектических отображений круга в себя).

Упражнение 5. Докажите, что множество G симплектических отображений круга в себя является группой относительно операции композиция.

Функция $f\colon G \to \mathbb{R}$ называется *инвариантом* на группе G, если для любой пары отображений $g, h \in G$ выполнено $f(g \circ h \circ g^{-1}) = f(h)$. Требуется найти как можно больше (функционально независимых) инвариантов на группе G. Эта проблема из области гамильтоновой динамики является актуальной и нерешенной.

Так как 2-форма ω_0 замкнута, то по лемме Пуанкаре существует такая 1-форма α_0, что $d\alpha_0 = \omega_0$.

Упражнение 6. Докажите, что для любого диффеоморфизма $g \in G$ 1-форма $\alpha_0 - g^*\alpha_0$ является замкнутой, а потому, в силу леммы Пуанкаре, существует такая функция $H\colon D^2 \to \mathbb{R}$ (определенная с точностью до прибавления константы, и называемая *производящей функцией* симплектического отображения g), что $\alpha_0 - g^*\alpha_0 = dH$. Докажите, что $H|_{\partial D^2} = \mathrm{const}$, а потому функция H может быть выбрана однозначно условием $H|_{\partial D^2} = 0$.

Е.Калаби (1970) определил следующий инвариант $\mathcal{C}al\colon G \to \mathbb{R}$ на группе G (соответствующий инварианту спиральности $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\omega)$ на пространстве замкнутых 2-форм в $\mathbb{R}^3$):

$$\mathcal{C}al(g) := \int_{D^2} H\omega_0,$$

где функция H удовлетворяет условиям $\alpha_0 - g^*\alpha_0 = dH$ и $H|_{\partial D^2} = 0$, см. упражнение 6.

Задача 6. Инвариант Калаби $\mathcal{C}al\colon G \to \mathbb{R}$ определен корректно, т.е. его значение $\mathcal{C}al(g)$ на элементе $g \in G$ не зависит от выбора 1-формы α_0, по которой строится функция H.

Опишем другой подход к определению инварианта Калаби. Известно, что группа G линейно связна, а потому для каждого элемента $g \in G$ существует путь $g_t \in G$, $t \in [0; 1]$, $g_0 = \mathrm{id}$, $g_1 = g$.

Упражнение 7. Докажите, что для любого $t \in [0; 1]$ векторное поле $V_t := \frac{d}{dt} g_t$ на D^2 является *гамильтоновым векторным полем*, т.е. существует такая функция $H_t\colon D^2 \to \mathbb{R}$ (называемая *функцией Гамильтона* векторного поля V_t), что $\omega_0(\cdot, V_t) = dH_t$. Докажите, что любые две функции Гамильтона векторного поля V_t отличаются прибавлением константы. Докажите, что $H_t|_{\partial D^2} = \mathrm{const}$, а потому функцию Гамильтона H_t можно выбрать однозначно условием $H_t|_{\partial D^2} = 0$.

Задача 7. (Теорема Е.Калаби, 1970) Докажите следующую формулу для инварианта Калаби:

$$\mathcal{C}al(g) = \int_0^1 \left(\int_{D^2} H_t \omega_0 \right) dt,$$

где $H_t\colon D^2 \to \mathbb{R}$ – функция Гамильтона векторного поля $\frac{d}{dt} g_t$ на D^2, определенная однозначно условием $H_t|_{\partial D^2} = 0$ для каждого $t \in [0;1]$. В частности, правая часть этой формулы не зависит от выбора пути g_t, $t \in [0;1]$.

Упражнение 8. Инвариант Калаби $\mathcal{C}al\colon G \to \mathbb{R}$ является гомоморфизмом группы G в группу $\mathbb{R}$ (с операцией сложение).

А.Баняга (1978) доказал, что любой гомоморфизм $G \to \mathbb{R}$ представим в виде $f \circ \mathcal{C}al$ для некоторого гомоморфизма $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (это равносильно тому, что $\ker(\mathcal{C}al) = [G, G]$, коммутант группы G). Группу G мы снабдим C^1–топологией (как подпространство топологического пространства $C^1(D^2, D^2)$). Известны непрерывные (и даже липшицевы) инварианты на группе G, не являющиеся функциями от $\mathcal{C}al$ (т.е. не представимые в виде $f \circ \mathcal{C}al$ ни для какой функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$), а именно: *норма Хофера* (Х.Хофер 1993, Ф.Лалонд и Д.МакДафф 1995)

$$\rho(\mathrm{id}, g) := \inf_{g_t,\ t \in [0;1]} \int_0^1 \left(\max_{x \in D^2} |H_t(x)| \right) dt, \quad g \in G,$$

где нижняя грань берется по всем путям g_t, $t \in [0;1]$, из $\mathrm{id} = g_0$ в $g = g_1$, а также “спектральные инварианты” (Л.Полтерович 2001). Однако эти инварианты трудно вычислимы, так как они не представимы в интегральной форме, в отличие от инварианта Калаби.

Проблема Г3. Найти новый (т.е. не выражающийся через инвариант $\mathcal{C}al$) инвариант на группе G, представимый в интегральной форме или имеющий “более высокий порядок гладкости” (чем липшицевость), либо доказать, что таких инвариантов нет.

Функцию $f\colon G \to \mathbb{R}$ назовем C^q_r*–гладкой*, при $0 \le q, r \le \infty$, если f является C^q–гладкой функцией от компонент $g_1, g_2\colon D^2 \to \mathbb{R}$ отображения $g\colon D^2 \to D^2$ и от их частных производных до порядка r включительно.

Упражнение 9. Любая C^q_r-гладкая функция $f\colon G \to \mathbb{R}$ является $C^{q'}_{r'}$–гладкой при любых $q' \in [0; q]$ и $r' \in [r; \infty]$.

Задача 8. Докажите, что инвариант Калаби $\mathcal{C}al\colon G \to \mathbb{R}$ является C^∞_0–гладким.

Е.А.Кудрявцева доказала (с использованием важных результатов Дж.Мозера 1965, К.Бонатти и С.Кровизьера 2001 о группе сохраняющих объемы диффеоморфизмов), что любой C^1_1–гладкий инвариант на группе G выражается через $\mathcal{C}al$, т.е. имеет вид $f \circ \mathcal{C}al$ для некоторой функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Значит, согласно упражнению 9, любой C^1_0–гладкий или C^q_1–гладкий, $q \in [2; \infty]$, инвариант на G тоже выражается через $\mathcal{C}al$. Для C^0_1–гладких инвариантов аналогичное утверждение неверно, поскольку существуют непрерывные (и даже липшицевы) инварианты на G, не выражающиеся через $\mathcal{C}al$ (см. выше).

Проблема Г4. Найти новый (т.е. не выражающийся через инвариант $\mathcal{C}al$) C^1_r–гладкий инвариант на группе G, при каком-либо $r \in [2; \infty]$, либо доказать, что таких инвариантов нет.

Д. Устойчивость Солнечной системы

Эта актуальная проблема из области классической механики изучалась и изучается многими математиками: А.Пуанкаре (1899), Биркгоф, Ю.Мозер (1973), А.Вайнстейн, Красинский (1978), В.И.Арнольд (1981), А.Д.Брюно, Тхай, Е.А.Кудрявцева (1999), и др.