

# Лекция 11. Интеграл Концевича и формулы инвариантов Васильева

# Содержание

- 1 Предварительный интеграл Концевича
- 2 Значение  $Z(\infty)$  и нормализация
- 3 Инвариантность интеграла Концевича
  - Интегрирование голономии
    - Мультипликативный интеграл
    - Связность Книжника-Замолодчикова
- 4 Модуль Васильева
- 5 Упражнения
- 6 Исследовательские задачи

# Содержание

- 1 Предварительный интеграл Концевича
- 2 Значение  $Z(\infty)$  и нормализация
- 3 Инвариантность интеграла Концевича
  - Интегрирование голономии
    - Мультипликативный интеграл
    - Связность Книжника-Замолодчикова
- 4 Модуль Васильева
- 5 Упражнения
- 6 Исследовательские задачи

## Определение 1.1

Пусть  $\Delta = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \Delta_m$  — линейное пространство над  $\mathbb{C}$ , порожденное всевозможными хордовыми диаграммами, а  $\overline{\Delta}$  — пространство формальных степенных рядов  $\sum_m c_m a_m$ , где  $c_m \in \mathbb{C}$  — числовые коэффициенты, а  $a_m \in \Delta_m$  — элементы пространства хордовых диаграмм порядка  $m$ .

Представим пространство  $\mathbb{R}^3$  как декартово произведение комплексной плоскости  $\mathbb{C}^1$  с координатой  $z$  и прямой  $\mathbb{R}^1$  с координатой  $t$ .

Ориентированный узел  $K$  в  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_t$  небольшим возмущением  $\mathbb{R}^3$  (в классе изотопии узла) можно привести к виду, при котором координата  $t$  является *простой функцией Морса* на узле  $K$ . Это означает, что все критические точки функции  $t$  на узле  $K$  регулярны и что все критические точки имеют различные критические значения, см. рис. 1.

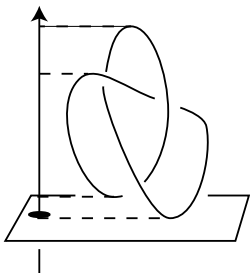


Рис. 1: Морсовский узел

### Замечание 1.2

Далее такие вложения мы будем называть *морсовскими узлами*.

### Определение 1.3

Предварительным интегралом Концевича узла  $K$  называется следующий элемент в  $\bar{\Delta}$ :

$$Z(K) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi i)^m} \int_{\substack{c_{\min} < t_1 < \dots < t_m < c_{\max} \\ t_j: \text{не критические}}} \sum_{P=\{(z_j, z'_j)\}} (-1)^{\downarrow} D_P \prod_{j=1}^m \frac{dz_j - dz'_j}{z_j - z'_j} \quad (1)$$

Мы считаем коэффициент при “пустой” хордовой диаграмме равным нулю.

Опишем формулу (1) более подробно.

Числа  $c_{min}$  и  $c_{max}$  представляют собой минимальное и максимальное значения функции  $t$  на узле  $K$ .

Областью интегрирования является  $n$ -мерный симплекс  $c_{min} < t_1 < \dots < t_m < c_{max}$ . Эта область разбивается на связанные компоненты. Здесь под  $z_i$  и  $dz_i$  понимаются функции от соответствующих переменных  $t_i$ .

Например, для тривиального узла на рис. 2 и  $m = 2$  область интегрирования состоит из 6 компонент, см. рис. 2.

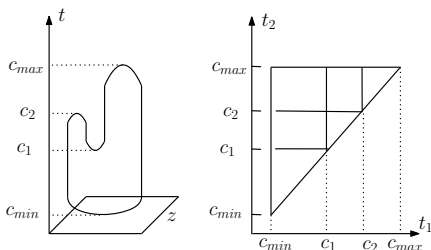


Рис. 2: Область интегрирования для интеграла Концевича

Количество слагаемых постоянно для каждой компоненты, но может меняться при переходе от одной компоненты к другой. Часть узла, лежащая внутри полосы между двумя соседними критическими уровнями, представляет из себя набор кривых; каждая из этих кривых однозначно параметризуется переменной  $t$ .

Фиксируем  $m$  и выберем  $m$  горизонтальных плоскостей

$\{t = t_i\}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , каждая из которых не содержит критических точек и лежит между минимальным и максимальным уровнями.

Далее мы будем брать сумму по всем неотрицательным целым  $m$ . В каждой плоскости  $\{t = t_i\} \subset \mathbb{R}^3$  выберем неупорядоченную пару  $(z_i, t_i)$ ,  $(z'_i, t_i)$  точек узла  $K$ . Обозначим через  $P = \{(z_i, z'_i)\}$  набор  $m$  таких пар. Зафиксируем спаривание  $P$ . Рассматривая узел как ориентированную окружность и соединяя хордами точки  $z_i, z'_i$  (из спаривания  $P$ ), мы получим хордовую диаграмму. Обозначим эту диаграмму через  $D_P$ .



Под интегралом находится сумма диаграмм, соответствующих различным спариваниям  $P$ . Коэффициенты при диаграммах получаются следующим образом. Выбор связной компоненты и спаривания  $P$  означает, что для каждого  $t_i$  задана пара точек на узле. Таким образом, для  $m$  плоскостей имеем  $m$  пар точек. На самом деле, после выбора спариваний диаграмма  $D_P$  однозначно определена, и интегрируются не хордовые диаграммы, а форма  $(-1)^{\downarrow} \wedge_{j=1}^m \frac{dz_j - dz'_j}{z_j - z'_j}$ . Полученный интеграл дает коэффициент при хордовой диаграмме  $D_P$ , после чего нужно привести подобные члены.

В приведенном выше примере связной компоненте

$\{c_{min} < t_1 < c_1, c_2 < t_2 < c_{max}\}$  соответствуют единственные пары точек на уровнях  $\{t = t_1\}$  и  $\{t = t_2\}$ . В этом случае, искомая сумма состоит из одного слагаемого. В компоненте

$\{c_{min} < t_1 < c_1, c_1 < t_2 < c_2\}$  имеем однозначный выбор на уровне  $\{t = t_1\}$ , однако плоскость  $\{t = t_2\}$  пересекает узел в четырех точках; таким образом, имеется  $C_4^2 = 6$  возможных спариваний  $(z_2, z'_2)$ , так что общее число спариваний равно шести.

В случае компоненты  $\{c_1 < t_1, t_2 < c_2\}$  есть 36 слагаемых, среди них наибольший интерес представляет диаграмма  $\otimes$ . В каждой части рис. 3 мы показываем одно спаривание и соответствующую хордовую диаграмму.

Несложно видеть, что во всех случаях, кроме  $\{c_1 < t_1 < t_2 < c_2\}$ , возникает диаграмма  $\odot$  с двумя непересекающимися хордами. Эта диаграмма равна нулю согласно одночленному соотношению. Таким образом, область интегрирования можно свести к симплексу  $\{c_1 < t_1 < t_2 < c_2\}$ .

Символ  $\downarrow$  для данного спаривания  $P$  означает число точек  $(z, t_i)$  или  $(z', t_i)$  в  $P$ , в которых координата  $t$  уменьшается при движении по узлу согласно его ориентации.

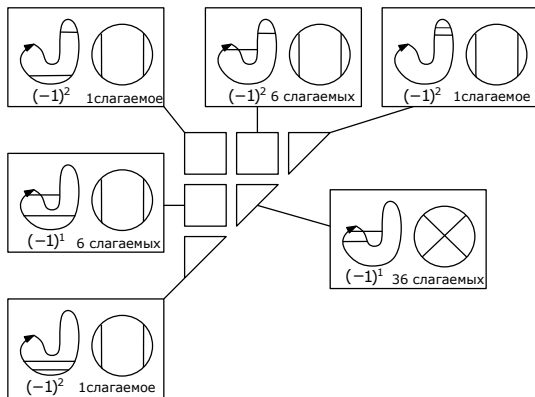


Рис. 3: Области интегрирования и диаграммы

Возникают следующие естественные вопросы:

- 1 Сходятся ли коэффициенты  $\bar{\Delta}$  в формуле (1)?
- 2 Является ли полученный элемент инвариантом узлов?
- 3 Как он связан с инвариантами Васильева?
- 4 Как считать этот интеграл?

Теорема 1.4 ([4], см. также [11])

*Все коэффициенты в формуле (1) конечны.*

## Определение 1.5

*Горизонтальной деформацией* называется изотопия морсовского вложения кривой в  $\mathbb{R}^3$ , которое не меняет взаимного расположения критических точек.

Горизонтальная деформация представима в виде композиции преобразований, изображенных на рис. 4.

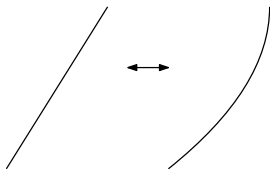


Рис. 4: Горизонтальная деформация

## Теорема 1.6 ([11])

Функция  $Z(K)$  инвариантна относительно горизонтальных деформаций узла, а также относительно преобразований на рис. 5, однако не инвариантна при преобразовании (\*) на рис. 6.

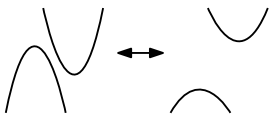


Рис. 5: Перемещение критических точек

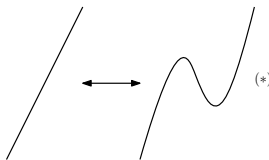


Рис. 6: Запрещенное преобразование

Обозначим узел, являющийся замыканием дуги на рис. 6, через  $T_{UD}$ .

Рассмотрим две реализации тривиального узла: простейшую (с одним максимумом и минимумом) и изображенную на рис. 7. Легко видеть, что интеграл  $Z(\bigcirc)$  для простейшей реализации равен одному (то есть диаграмме без хорд с коэффициентом 1). С другой стороны,  $Z(\infty)$  не равно  $1 = \bigcirc$ .

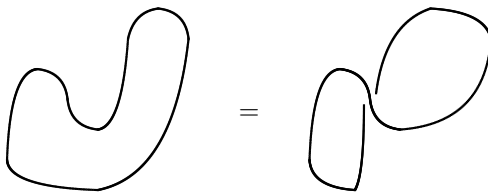


Рис. 7: Узел “ $\infty$ ”

Таким образом,  $Z$  не является инвариантом узлов.

С другой стороны, справедлива следующая теорема.

### Теорема 1.7

Если узел  $K'$  получается из узла  $K$  с помощью преобразования  $(*)$ , то  $Z(K') = Z(K) \cdot Z(\infty)$ .

**Доказательство.** Сначала заметим, что  $\infty$  получается из  $T_{UD}$  горизонтальной деформацией, так что  $Z(\infty) = Z(T_{UD})$ .

Рассмотрим связную сумму узла  $K$  с “маленьким” узлом  $\infty$ , чтобы интервал по координате  $t$ , соответствующий узлу  $T_{UD}$  не содержал критических точек узла  $K$ . В этом случае к узлу добавятся две критические точки — один максимум и один минимум, см. рис. 8.



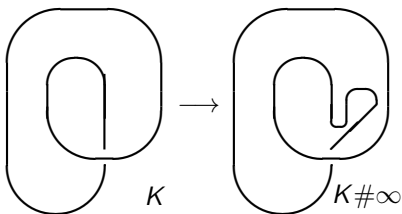


Рис. 8: Преобразование (\*)

Интеграл Концевича полученного узла равен интегралу Концевича узла  $K'$ , который получается горизонтальной изотопией из суммы  $K \# \infty$ . Сравнивая интеграл Концевича исходного узла и узла  $K$ , мы видим, что каждое слагаемое в интеграле для  $K$  соответствует (в интеграле для  $K'$ ) произведению этого слагаемого на интеграл Концевича для  $T_{UD}$ . Следовательно,  $Z(K') = Z(K) \cdot Z(\infty)$ .  $\square$

# Содержание

- 1 Предварительный интеграл Концевича
- 2 Значение  $Z(\infty)$  и нормализация
- 3 Инвариантность интеграла Концевича
  - Интегрирование голономии
    - Мультипликативный интеграл
    - Связность Книжника-Замолодчикова
- 4 Модуль Васильева
- 5 Упражнения
- 6 Исследовательские задачи

Таким образом, изменения предварительного интеграла  $Z(\cdot)$  при преобразовании  $(*)$  имеют простой вид: значение умножается на  $Z(\infty)$ . Пусть теперь  $K$  — морсовское вложение окружности  $S^1$  в  $\mathbb{R}^3$ , а  $c$  — число критических точек функции  $t$  на  $K$ .

Рассмотрим предварительный интеграл Концевича как формальный степенной ряд. Тогда этот ряд состоит из элементов градуированной алгебры, и его начальный элемент является единицей алгебры.

Тогда можно обратить ряд по формуле

$$(1 + a)^{-1} = 1 - a + a^2 - a^3 + \dots,$$

где  $a^i$  —  $i$ -я степень степенного ряда  $a$ .

## Определение 2.1

*Универсальным инвариантом Васильева–Концевича узла  $K$  называется следующий элемент пополненной алгебры хордовых диаграмм:*

$$I(K) = \frac{Z(K)}{Z(\infty)^{\frac{c}{2}-1}}. \quad (2)$$

### Замечание 2.2

Степень  $(\frac{\epsilon}{2} - 1)$  берется, чтобы выполнялось условие нормирования  $I(\bigcirc) = 1$ . В тривиальной диаграмме один максимум и минимум, так что  $\frac{\epsilon}{2} - 1 = 0$ .

### Замечание 2.3

Очевидно, что если формула (1) сходится, то сходится и формула (2) как формальное частное двух рядов.

Таким образом, получаем следующую теорему.

### Теорема 2.4

*Интеграл Концевича  $I(\cdot)$  является инвариантом узлов.*

**Доказательство.** В силу теоремы 1.7 интеграл  $Z(K)$  не зависит от расположения критических точек, а зависит только от их количества. Легко проверить, что два морсовских вложения задают один и тот же узел тогда и только тогда, когда одно из них можно преобразовать в другое посредством горизонтальных изотопий и движений на рис. 5 и 6.

Учитывая инвариантность  $Z$  относительно всех движений, кроме последнего, получаем утверждение теоремы.  $\square$

Осталось сформулировать и доказать самую важную теорему. Пусть  $W$  — весовая система<sup>1</sup> порядка  $m$ . Положим  $W(d) = 0$  для всех диаграмм  $d$  с числом хорд, отличным от  $m$ .

### Теорема 2.5 (Концевич, см. также [11])

*Инвариант  $W(I(\cdot))$  является инвариантом Васильева с символом  $W$ , т.е. инвариант*

$$V(W)(K) = W(I(K))$$

*имеет конечный порядок  $m$  и его символ равен  $V^{(m)} = W$ .*

Из этой теоремы следует вторая (сложная) часть теоремы Васильева–Концевича о существовании инварианта конечного порядка, соответствующего заданной весовой системе.

Докажем теоремы 1.4, 1.6 и 2.5.

---

<sup>1</sup>Напомним, что весовой системой называется (порядка  $n$ ) называется линейная функция на хордовых диаграммах порядка  $n$ , удовлетворяющая  $1T$ - и  $4T$ -соотношениям.

# Содержание

- 1 Предварительный интеграл Концевича
- 2 Значение  $Z(\infty)$  и нормализация
- 3 Инвариантность интеграла Концевича**
  - Интегрирование голономии
    - Мультипликативный интеграл
    - Связность Книжника-Замолодчикова
- 4 Модуль Васильева
- 5 Упражнения
- 6 Исследовательские задачи

### Замечание 3.1

Под  $Z_m(K)$  и  $I_m(K)$  мы понимаем слагаемое градуировки  $m$  в  $Z(K)$  и  $I(K)$  соответственно.

Докажем сначала теорему 1.4 о сходимости коэффициентов ряда (1).

**Доказательство.** Рассмотрим морсовский узел  $K$  в  $\mathbb{R}^3$ . Фиксируем  $m \in \mathbb{N}$  и выберем  $m$  плоскостей  $\{t = t_j\}$ , не проходящих через критические точки узла  $K$ .

Рассмотрим некоторую хордовую диаграмму  $D$ . Коэффициент при этой диаграмме получается интегрированием формы

$$\bigwedge_{j=1}^m \frac{dz'_j(t_j) - dz_j(t_j)}{z'_j(t_j) - z_j(t_j)}$$

по части  $m$ -мерного симплекса  $\{c_{min} < t_1 < \dots < t_m < c_{max}\}$ , соответствующей диаграмме  $D$ .



## Доказательство теоремы 1.4: продолжение

Рассмотрим сингулярные точки формы, т.е. точки, где  $z_j = z'_j$  для некоторого  $j$ . Интеграл от формы может расходиться только в окрестности таких точек. Рассмотрим пару точек  $z_j, z'_j$ , близкую к сингулярному положению.

Имеем две возможности:

- 1 Дуга между  $z_j$  и  $z'_j$  содержит концы  $z_k$  других хорд (рис. 9).

Тогда область интегрирования (где мы интегрируем  $\frac{dz'_j(t_j) - dz_j(t_j)}{z'_j(t_j) - z_j(t_j)}$ ) имеет малость более высокого порядка по сравнению с  $z_j - z'_j$ , так как критическая точка невырождена. Следовательно, эта часть интеграла (2) сходится.

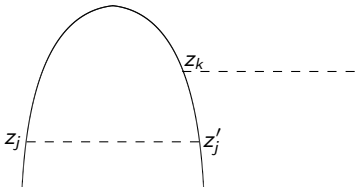


Рис. 9: Дуга между  $z_j$  и  $z'_j$  содержит концы  $z_k$  других хорд.

## Доказательство теоремы 1.4: продолжение

- ② Дуга между  $z_j$  и  $z'_j$  не содержит концов других хорд, см. рис. 10. Тогда хорда  $z_j z'_j$  в диаграмме  $D$  изолирована. Значит, диаграмма  $D$  равна нулю по 1Т-соотношению.

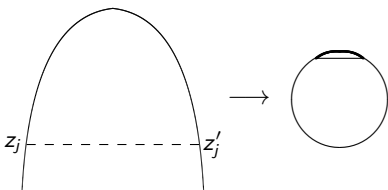


Рис. 10:

Таким образом, теорема доказана.  $\square$

# Содержание

- 1 Предварительный интеграл Концевича
- 2 Значение  $Z(\infty)$  и нормализация
- 3 Инвариантность интеграла Концевича**
  - Интегрирование голономии
    - Мультипликативный интеграл
    - Связность Книжника-Замолодчикова
- 4 Модуль Васильева
- 5 Упражнения
- 6 Исследовательские задачи

Для доказательства двух оставшихся теорем 1.6 и 2.5, нам придется интегрировать голономии и ввести так называемую *связность Книжника–Замолодчикова*. Сначала напомним некоторые конструкции.

### Определение 3.2

Пусть  $X$  — гладкое многообразие, а  $\mathcal{U}$  — ассоциативная топологическая алгебра с единицей (над полем  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ ).

Тогда  $\mathcal{U}$ -связностью  $\Omega$  на многообразии  $X$  называется 1-форма  $\Omega$  на  $X$  с коэффициентами в  $\mathcal{U}$ .

Кривизной связности  $\Omega$  называется 2-форма

$$F_{\Omega} = d\Omega + \Omega \wedge \Omega.$$

Связность называется *плоской*, если ее кривизна равна нулю.

### Определение 3.3

Пусть  $V : [a, b] \rightarrow X$  — гладкое отображение отрезка  $[a, b]$  в пространство  $X$ . Пусть  $\Omega$  —  $\mathcal{U}$ -связность на  $X$ .

Определим *голономию*  $h_{V, \Omega}$  формы  $\Omega$  вдоль пути  $V$  как решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} h_{V, \Omega}(t) = \Omega(V'(t)) \cdot h_{V, \Omega}(t), t \in [a, b],$$

с начальным условием  $h_{V, \Omega}(a) = 1$ .

### Замечание 3.4

Легко показать, что если связность  $\Omega$  плоская, то голономия зависит только от положения концов и гомотопического типа пути.

Этот факт аналогичен формуле Гаусса–Остроградского в коммутативном случае. При этом мультипликативный интеграл представляет собой экспоненту от интеграла для логарифмической функции. В некоммутативном случае появляется член  $\Omega \wedge \Omega$ .

# Содержание

- 1 Предварительный интеграл Концевича
- 2 Значение  $Z(\infty)$  и нормализация
- 3 Инвариантность интеграла Концевича**
  - Интегрирование голономии
    - Мультипликативный интеграл
    - Связность Книжника-Замолодчикова
- 4 Модуль Васильева
- 5 Упражнения
- 6 Исследовательские задачи

Решение уравнения (голономия), как правило, существует. Оно называется *мультипликативным интегралом* формы  $\Omega$ . Во многих случаях голономию можно посчитать по *итерационной формуле*:

$$h_{B,\Omega}(t) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{a \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_m \leq t} (B^*\Omega)(t_m) \dots (B^*\Omega)(t_1). \quad (3)$$

Для большей ясности рассмотрим следующую простую конструкцию.

### Пример 3.5

Пусть  $Y' = AY$  — дифференциальное уравнение с начальным условием  $Y(0) = 1$  в пространстве матриц размера  $n \times n$ .<sup>a</sup> Решение  $Y(t)$  можно представить в виде произведения “бесконечно большого” числа элементов “бесконечно близких к единице”. Естественно назвать это произведение мультипликативным интегралом от  $A$  и обозначить через

$$Y(x) = \int_0^x (E + A(t)dt).$$

Для вычисления  $Y(x)$  воспользуемся следующей формулой.

$$Y(x) = E + \int_0^x A(t_1)dt_1 + \int_0^x A(t_1) \int_0^{t_1} A(t_2)dt_2dt_1 + \dots \quad (4)$$

при условии, что ряд (4) сходится. Действительно, при дифференцировании ряда каждый его член равен предыдущему члену, умноженному на  $A(x)$ .

Члены ряда (4) можно рассматривать как интегралы по симплексам.

<sup>a</sup>Либо другой топологической алгебре.



### Замечание 3.6

В интересующих нас случаях этот ряд сходится.

Формула (3) полностью аналогична формуле (4).

Теория мультипликативного интеграла хорошо изложена в [19, 23, 26].

### Замечание 3.7

В случае сходимости очевидно, что эта формула дает решение нашего дифференциального уравнения. Начальное условие очевидно выполнено. Производная  $m$ -го интеграла дает  $(m - 1)$ -й интеграл с множителем  $\Omega(\dot{B})$ .

# Содержание

- 1 Предварительный интеграл Концевича
- 2 Значение  $Z(\infty)$  и нормализация
- 3 Инвариантность интеграла Концевича**
  - Интегрирование голономии
    - Мультипликативный интеграл
    - Связность Книжника-Замолодчикова
- 4 Модуль Васильева
- 5 Упражнения
- 6 Исследовательские задачи

Обозначим через  $\mathcal{D}_n^{KZ}$  множество диаграмм, состоящих из  $n$  направленных вверх стрелок (на рис. 11 они показаны жирными линиями) и конечного числа ребер, таких что:

- 1 конец каждого ребра либо лежит на стрелке, либо является вершиной валентности три (в двумя другими концами ребер);
- 2 каждая точка стрелки инцидентна не более чем одному ребру.

Такие диаграммы рассматриваются с точностью до комбинаторной эквивалентности.

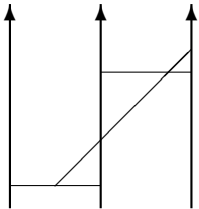


Рис. 11: Элемент  $\mathcal{A}^{KZ}$

Пусть  $\mathbb{C}$  — основное поле. Рассмотрим множество  $\mathcal{A}_n^{KZ} = \text{span}(\mathcal{D}_n^{KZ}) / \{STU\text{-соотношения}\}$ .  $STU$ -соотношением называется то же, что и в случае диаграмм Фейнмана, где части стрелок рассматриваются как части ориентированной окружности. Заметим, что  $STU$ -соотношение локально.

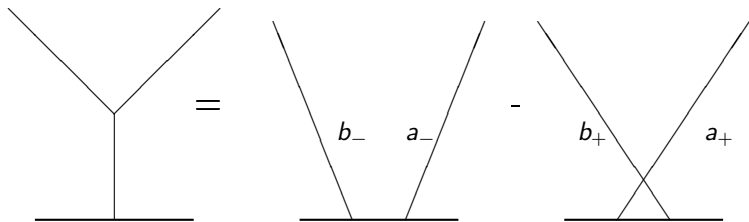


Рис. 12:  $STU$ -соотношение

При фиксированном  $n$ , множество  $\mathcal{A}_n^{KZ}$  обладает структурой алгебры: произведением диаграмм является диаграмма, полученная расположением одной из них над другой.

### Пример 3.8

Пример умножения в  $\mathcal{A}_3^{KZ}$  показан на рис. 13.

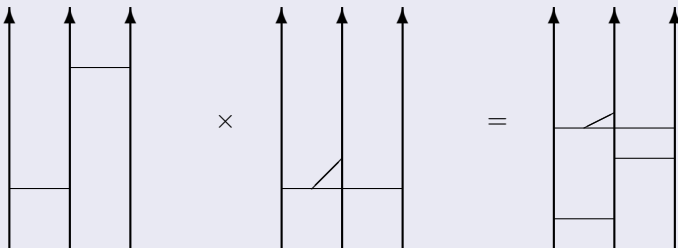


Рис. 13: Умножение в  $\mathcal{A}^{KZ}$

При фиксированном  $n$  алгебра  $\mathcal{A}_n^{KZ}$  является градуированной: порядок элемента равен половине общего количества вершин. Для  $1 \leq i, j \leq n$  обозначим через  $\Omega_{ij} \in \mathcal{A}_n^{KZ}$  элемент с одним ребром, соединяющим стрелки  $i$  и  $j$ .

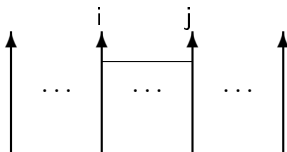


Рис. 14: Элемент  $\Omega_{ij}$

### Замечание 3.9

Легко видеть, что если  $\{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset$ , то  $\Omega_{ij}$  и  $\Omega_{kl}$  коммутируют, т.е.  $\Omega_{ij} \times \Omega_{kl} = \Omega_{kl} \times \Omega_{ij}$ .

Пусть  $X_n$  — конфигурационное пространство  $n$  попарно различных точек в  $\mathbb{C}^1$ . Пусть  $\omega_{ij}$  обозначает 1-форму на  $X_n$ :

$$\omega_{ij} = d(\ln(z_i - z_j)) = \frac{dz_i - dz_j}{z_i - z_j}.$$

Определим связность Книжника–Замолодчикова  $\Omega_n$  с коэффициентами в  $\mathcal{A}_n^{KZ}$  как  $\Omega_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \Omega_{ij} \omega_{ij}$  на  $X_n$ .

### Теорема 3.10

*Эта связность плоская. Более точно,  $\Omega_n \wedge \Omega_n = 0$  and  $d\Omega_n = 0$ .*

**Доказательство.** Последнее утверждение очевидно. В самом деле,  $d\omega_{ij} = d^2(\ln(z_i - z_j)) = 0$ .

Докажем первое утверждение. Рассмотрим элемент

$$\Omega_n \wedge \Omega_n = \sum_{i < j; k < l} \Omega_{ij} \Omega_{kl} \omega_{ij} \omega_{kl} \tag{5}$$

и множество  $\{i, j, k, l\}$ .

## Доказательство теоремы 3.10 продолжение

Если множество  $\{i, j, k, l\}$  состоит из двух или четырех элементов, то соответствующий член суммы равен нулю (в силу коммутативности). Следовательно, искомая сумма равна сумме по всем наборам  $i, j, k, l$ , состоящим из трех различных элементов. Рассмотрим, например, множество  $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3\}$  и соответствующие члены в сумме (5).

В этом случае имеем:

$$\sum_{\{i,j,k,l\}=\{1,2,3\}} \Omega_{ij}\Omega_{kl}\omega_{ij}\omega_{kl} = (\Omega_{12}\Omega_{23} - \Omega_{23}\Omega_{12})\omega_{12} \wedge \omega_{23} +$$

(циклические перестановки).

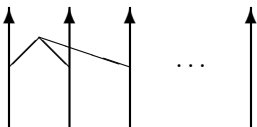
Используя  $STU$ -соотношение, мы видим, что  $-\Omega_{123} = \Omega_{12}\Omega_{23} - \Omega_{23}\Omega_{12}$  и что сумма равна

$$-\Omega_{123}(\omega_{12} \wedge \omega_{23} + \omega_{23} \wedge \omega_{31} + \omega_{31} \wedge \omega_{12}),$$

где  $\Omega_{123}$  — элемент, показанный на рис. 15.



## Доказательство теоремы 3.10 продолжение

Рис. 15: Элемент  $\Omega_{123}$ 

## Упражнение 1

Проверьте равенство  $-\Omega_{123} = \Omega_{12}\Omega_{23} - \Omega_{23}\Omega_{12}$ .

## Упражнение 2 (тождество В.И. Арнольда [7])

Покажите, что  $\omega_{12} \wedge \omega_{23} + \omega_{23} \wedge \omega_{31} + \omega_{31} \wedge \omega_{12} = 0$ .

Таким образом, если множество  $\{i, j, k, l\}$  состоит ровно из трех различных индексов, оно дает нулевой вклад в сумму. Мы рассмотрели все возможные случаи. Таким образом,  $\Omega_n \wedge \Omega_n = 0$ .  $\square$

### Замечание 3.11

Связность  $\Omega_n$  можно слегка модифицировать для алгебры  $\mathcal{A}_{nn}^{KZ}$ . Эта алгебра порождена диаграммами с  $2n$  стрелками (первые  $n$  стрелок ориентированы вверх, а последние  $n$  — вниз).  $STU$ -соотношения на таких диаграммах зависят от направления стрелки, к которой соотношение применяется.

Пусть  $\Omega_{nn} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} s_i s_j \Omega_{ij} \omega_{ij}$ , где  $s_i$  равно 1 при  $i \leq n$  и  $-1$  при  $i > n$ .

### Упражнение 3

Покажите, что связность  $\Omega_{nn}$  плоская.

# Доказательство теоремы 1.6

Теперь докажем теорему об инвариантности. Напомним теорему 1.6.

## Теорема (Теорема 1.6)

Функция  $Z(K)$  инвариантна при горизонтальных деформациях узла, а также при преобразованиях, изображенных на рис. 16, однако не инвариантна при преобразовании (\*) на рис. 17

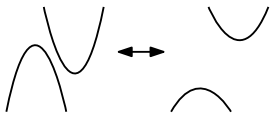


Рис. 16: Движение критических точек

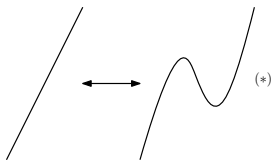


Рис. 17: Запрещенное преобразование

# Доказательство теоремы 1.6

**Доказательство.** Сначала докажем, что предварительный интеграл Концевича  $Z(K)$  инвариантен относительно преобразований, сохраняющих критические точки.

Дело в том, что интеграл Концевича от узла можно разложить в произведение похожих интегралов от *частей* данного узла; каждая из этих частей представляется элементом некоторой алгебры Книжника–Замолодчикова со стрелками, направленными вверх и вниз; после соединения элеметны образуют обычную хордовую диаграмму. Таким образом, произведение элементов из  $\mathcal{A}^{KZ}$  соответствует элементу в  $\bar{\Delta}$ .

Пусть  $c_{min} \leq a < b \leq c_{max}$ . Определим  $Z(K, [a, b])$  так же, как это было сделано в формуле (1), но взяв в качестве области интегрирования  $\{a < t_1 < \dots < t_n < b\}$ , и заменив хордовые диаграммы элементами алгебры Книжника–Замолодчикова.

# Доказательство теоремы 1.6: продолжение

Хотя  $Z(K, [a, b])$  не принадлежит  $\overline{\mathcal{A}^c} \subset \overline{\Delta}$ , соответствующий ряд (вычисленный для узла) сходится по тем же причинам, что и  $Z$ . Так как в интервале  $(a, b)$  нет критических точек, пересечение узла с полосой  $\mathbb{C} \times (a, b)$  является набором ориентированных кривых без горизонтальных касательных. Предположим, что число таких кривых равно  $2n$ . Очевидно, что  $n$  из них направлены вверх и  $n$  кривых — вниз. Фиксируем их нижние точки  $a_1, \dots, a_{2n}$  и соответствующие верхние точки  $b_1, \dots, b_{2n}$ , где первые  $n$  точек являются концами возрастающих кривых, а последние  $n$  — убывающих.

## Доказательство теоремы 1.6: продолжение

Теперь интеграл  $Z(K[a, b])$  можно представить как голономию связности  $\Omega_{nn}$  вдоль пути из  $(a_1, \dots, a_{2n})$  в  $(b_1, \dots, b_{2n})$  с помощью итерационной формулы (3). Действительно,  $m$ -й член итерационной формулы для  $\Omega_{nn}$  соответствует  $m$ -у члену интеграла Концевича, поскольку в обоих случаях мы интегрируем форму

$$\sum_{P=\{(z_j, z'_j)\}} (-1)^{\downarrow} \Omega_{jj'} \bigwedge_{j=1}^m \frac{dz_j - dz'_j}{z_j - z'_j}, \quad (6)$$

где  $(-1)^{\downarrow}$  соответствует знаку произведения  $s_j s'_j$ .

Напомним, что  $STU$ -соотношение на диаграммах Фейнмана эквивалентно  $4T$ -соотношению на хордовых диаграммах. Именно здесь (при проверке того, что связность Книжника–Замолодчикова плоская) мы используем  $4T$ -соотношение (в виде  $STU$ -соотношения).

## Доказательство теоремы 1.6: продолжение

Так как кривизна связности  $\Omega_{nn}$  равна нулю, интеграл (6) инвариантен относительно гомотопий путей интегрирования с фиксированными концами, т.е. при горизонтальных деформациях части узла, лежащей в полосе  $\mathbb{C} \times (a, b)$ .

Несложно показать, что для произвольных значений  $a < b < c$  (возможно, критических), мы имеем  $Z(K, [a, c]) = Z(K, [a, b]) \cdot Z(K, [b, c])$ . Отсюда заключаем, что интеграл  $Z(K)$ , являющийся произведением  $Z(K, [c_i, c_{i+1}])$ , где  $c_i, c_{i+1}$  — все пары “соседних” критических точек, инвариантен относительно горизонтальных деформаций на интервалах, не включающих критические точки.

Рассмотрим теперь случай, когда критические точки перемещаются при изотопии узла.

## Доказательство теоремы 1.6: продолжение

- Критические точки двигаются, но их взаимное расположение не меняется, см. рис. 18.

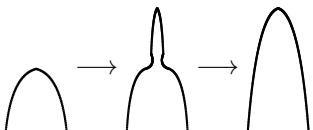


Рис. 18: Движение критических точек

- Порядок критических точек меняется, см. рис. 19.

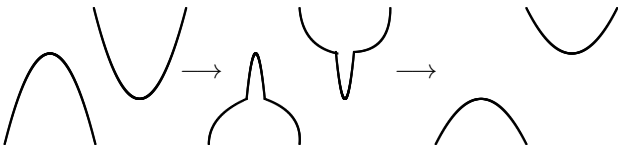


Рис. 19: Изменение расположения критических значений



# Доказательство теоремы 1.6: продолжение

Как показано на рис. 18 и 19, сначала можно применить преобразование, которое не меняет  $Z(K)$ , и получить узел с “иглой”. Покажем, что удаление этой иглы изменит элемент градуировки  $m$  в интеграле Концевича на некоторое малое  $\epsilon$ , зависящее от ширины иглы.

Действительно, узел  $K'$  получается из узла  $K$  добавлением вертикальной иглы около некоторого максимума (минимума). Очевидно, что разность  $Z(K) - Z(K')$  включает только члены, соответствующие диаграммам, у которых конец одной из хорд лежит на игле. Пусть ширина иглы равна  $\epsilon$ . Покажем, что  $Z_m(K) - Z_m(K') = O(\epsilon)$ .

## Доказательство теоремы 1.6: продолжение

Действительно, рассмотрим все хорды, один из концов которых лежат на игле. Если оба конца верхней хорды лежат на игле, то диаграмма равна нулю по  $1T$ -соотношению. Если нет хорд, у которых оба конца лежат на игла, то ситуация простая: сумма диаграмм на рис. 20 дает член порядка  $\epsilon$ : при интегрировании число  $\uparrow$  у левой и правой диаграмм различается на 1; таким образом, мы получаем сокращение с точностью до малых порядка  $\epsilon$ .

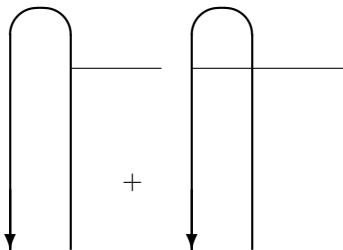


Рис. 20: Сокращение двух членов

# Доказательство теоремы 1.6: продолжение

Остается рассмотреть случай, когда под верхней хордой  $(z_i, z'_i)$ , один конец которой лежит на игле, расположено  $k$  хорд с обоими концами на игле. Пусть  $(z_{j_1}, z'_{j_1})$  — самая нижняя из этих хорд, а  $(z_{j_k}, z'_{j_k})$  — самая верхняя, см. рис. 21.

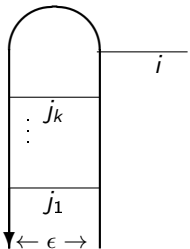


Рис. 21: Случай  $k$  хорд на игле

# Доказательство теоремы 1.6: продолжение

Можно считать, что  $(z_i, z'_i)$  — единственная хорда, у которой один конец лежит на игле. Добавление еще одной такой хорды приводит к умножению интеграла на конечное ненулевое число.

Пусть  $\delta_\alpha = |z_{j_\alpha} - z'_{j_\alpha}|$ . Тогда разница  $Z(K') - Z(K)$  ограничена некоторой константой, умноженной на выражение

$$\int_0^\epsilon \frac{d\delta_1}{\delta_1} \int_0^{\delta_1} \frac{d\delta_2}{\delta_2} \dots \int_0^{\delta_{k-1}} \frac{d\delta_k}{\delta_k} \int_{z_{j_k}}^{z'_{j_k}} \frac{dz_i - dz'_i}{z_i - z'_i}.$$

Интеграл имеет малость порядка  $\tilde{\epsilon}$ . Действительно, последний интеграл имеет малость порядка  $\delta_k$ . Далее, член  $\delta_k$  сокращается в предпоследнем интеграле, поэтому предпоследний интеграл имеет малость  $\delta_{k-1}$  и т.д. В итоге, малость всего интеграла равна  $\delta_1 \sim \epsilon$ . Произвольность выбора  $\epsilon$  влечет требуемую инвариантность.  $\square$

Таким образом, показано, что  $I(\cdot)$  является инвариантом узлов.

## Доказательство теоремы 2.5

Теперь докажем теорему 2.5 о том, что для любой весовой функции  $W$  композиция  $W(I(\cdot))$  является инвариантом Васильева с символом  $W$ .

### Теорема (Теорема 2.5)

*Инвариант  $W(I(\cdot))$  является инвариантом Васильева с символом  $W$ .*

**Доказательство.** Без ограничения общности можно считать, что рассматриваемые узлы являются морсовскими и, кроме того, их проекции на некоторую вертикальную плоскость (скажем,  $Oxz$ ) являются плоскими диаграммами узлов (в обычном смысле).

## Доказательство теоремы 2.5: продолжение

Пусть  $W$  — весовая система порядка  $m$ . Для доказательства теоремы нужно проверить, что для любой хордовой диаграммы  $D$  порядка  $m$  и любого морсовского вложения в  $\mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_t$  сингулярного узла  $K_D$ , соответствующего диаграмме  $D$ , имеет место равенство

$$I(K_D) = \bar{D} + \langle \text{члены порядка } \geq m \rangle,$$

где  $\bar{D}$  — класс эквивалентности хордовой диаграммы  $D$ , а интеграл  $I(K_D)$  определен как знакопеременная сумма значений  $I$ , вычисленная на  $2^m$  узлах, полученных разрешением узла  $K_D$ . Если два узла  $K_1$  и  $K_2$  в  $\mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_t$  совпадают везде, кроме малого участка, в котором ветви узла  $K_1$  образуют отрицательный перекресток (при проекции на вертикальную плоскость), а ветви  $K_2$  — положительный, то значения  $Z(K_2)$  и  $Z(K_1)$  различаются только на хордовых диаграммах, у которых есть вершина, лежащая на этих ветвях.

## Доказательство теоремы 2.5: продолжение

В силу соотношения Васильева сингулярный узел  $K_D$  соответствует альтернированной сумме  $2^m$  узлов, различающихся в малых окрестностях  $m$  сингулярных точек. Заметим, что знак в этой сумме определяется сомножителем  $(-1)^{\downarrow}$  в формуле (1).

Рассуждая как ранее, мы видим, что  $Z(K_D)$  имеет ненулевые коэффициенты только при тех хордовых диаграммах, у которых есть вершины в каждой из этих окрестностей. Таким образом, ненулевой коэффициент может быть только у диаграмм с не менее чем  $m$  хордами.

Из диаграмм порядка  $m$  коэффициент не равен нулю только при диаграмме  $K_D$ .

Вычислим этот коэффициент.

Каждой из  $m$  вершин соответствует разность интегралов дифференциальной формы  $\frac{dz_i - dz'_i}{z_i - z'_i}$ .

# Доказательство теоремы 2.5: продолжение

Эта разность равна интегралу  $\frac{dz}{z}$  вдоль пути, обходящего один раз вокруг нуля. По теореме Коши этот интеграл равен  $2\pi i$ . Так как всего есть  $m$  путей, значения перемножаются.

Полученный коэффициент  $(2\pi i)^m$  сократится со знаменателем в формуле (1). Таким образом,

$$Z(K_D) = \bar{D} + \langle \text{члены порядка } \geq m \rangle.$$

Учитывая, что  $I(K) = \frac{Z(K)}{Z(\infty)^{\frac{g}{2}-1}}$ , мы получаем

$$I(K_D) = \bar{D} + \langle \text{члены порядка } \geq m \rangle.$$

Следовательно,  $W(I(K_D)) = W(D)$ , а значит, инвариант Васильева  $W(I(\cdot))$  порядка  $m$  имеет символ  $W$ . Доказательство завершено.  $\square$



Вычисление интеграла Концевича является, однако, задачей технически сложной. Например, трудным является даже вычисление (предварительного) интеграла Концевича от тривиального узла  $\infty$ . Вид этого интеграла был предсказан Бар-Натаном, Гаруфалидисом, Розанским и Терстоном в [9] и окончательно установлен в [14]. Формула для интеграла (в форме диаграмм Фейнмана) выглядит так

$$Z(\infty) = \exp \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n} w_{2n} = 1 + \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n} w_{2n} \right) + \frac{1}{2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n} w_{2n} \right)^2 + \dots$$

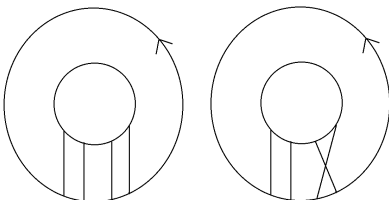
Здесь  $b_{2n}$  — обобщенные числа Бернулли, то есть коэффициенты ряда Тейлора:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{2n} x^{2n} = \frac{1}{2} \ln \frac{e^{x/2} - e^{-x/2}}{x/2},$$

а  $w_{2n}$  — так называемые “колеса”.

Колесо  $w_{2n}$  есть коэффициент  $\frac{1}{(2n)!}$ , умноженный на сумму  $(2n!)$  диаграмм Фейнмана. Каждая из этих диаграмм состоит из внешней окружности, внутренней окружности (рассматриваемой как цикл, составленный из внутренних ребер) и  $2n$  хорд, соединяющих фиксированные  $2n$  точки на первой окружности с фиксированными  $2n$  точками на второй. Эти точки можно соединить в соответствии с любой перестановкой из  $S_{2n}$ . Таким образом, есть  $(2n)!$  диаграмм, и мы берем от них среднее арифметическое.

Например, элемент  $w_4$  содержит восемь слагаемых, соответствующих диаграмме  $D_x$  (рис. 22 слева) и шестнадцать слагаемых, соответствующих диаграмме  $D_y$  (рис. 22 справа).

Рис. 22: Диаграммы  $D_x$  и  $D_y$ 

В терминах хордовых диаграмм колесо  $w_4$  представляется в виде:

$$w_4 = \text{diagram 1} - \frac{10}{3} \text{diagram 2} + \frac{4}{3} \text{diagram 3}.$$

Аналогично (на самом деле, еще более просто) можно найти выражения для  $w_2$  и  $w_2^2$ .

#### Упражнение 4

Проверьте формулу, представленную выше.

Окончательно, первые члены интеграла имеют вид:

$$Z(\infty) = 1 + \frac{1}{48} w_2 + \frac{1}{4608} w_2^2 - \frac{1}{5760} w_4 + \dots$$

или, в терминах хордовых диаграмм,

$$Z(\infty) = 1 - \frac{1}{24} \text{⊗} - \frac{1}{5760} \text{⊗} + \frac{1}{1152} \text{⊗} + \frac{1}{2880} \text{⊗} + \dots$$

Кроме того, Ле и Мураками [25] построили обобщение интеграла Концевича для так называемых *танглов* — одномерных многообразий, лежащих в полосе между двумя горизонтальными плоскостями и имеющими с этими плоскостями лишь конечное число общих точек. Тангл одновременно обобщает узлы и косы, а вычисление интеграла Концевича для случая кос много легче, чем в общем случае. На самом деле, неявно возникали в доказательстве инвариантности при вычислении интеграла  $Z[a, b]$  на некотором интервале  $[a, b]$ . Используя собственную технику, Ле и Мураками вычислили  $Z(\infty)$ .

# Содержание

- 1 Предварительный интеграл Концевича
- 2 Значение  $Z(\infty)$  и нормализация
- 3 Инвариантность интеграла Концевича
  - Интегрирование голономии
    - Мультипликативный интеграл
    - Связность Книжника-Замолодчикова
- 4 Модуль Васильева
- 5 Упражнения
- 6 Исследовательские задачи

Неизвестно, различают ли инварианты Васильева все изотопические классы узлов и зацеплений. Предположение о полноте инвариантов конечного порядка известно как *гипотеза Васильева*.

Введем в рассмотрение *модуль Васильева*, в котором два узла считаются равными, если у них совпадают значения всех инвариантов Васильева порядка, не превышающего некоторый фиксированный порядок. Тогда каждый узел может быть разложен в конечную сумму образующих модуля.

Дадим точное определение.

#### Определение 4.1

*Модулем Васильева* порядка  $n$  называется модуль над  $\mathbb{Z}$  (или  $\mathbb{Q}$ ), порожденный классами изотопии ориентированных и сингулярных узлов и имеющий следующие соотношения:

- 1  $\bigcirc = 0$ , где  $\bigcirc$  — тривиальный узел;
- 2 соотношение Васильева;
- 3  $K_m = 0$  для  $m > n$ , где  $K_m$  — произвольный сингулярный узел порядка  $m$ .

Справедлива следующая теорема.

### Теорема 4.2 (теорема о разложении)

*В модуле Васильева порядка  $n$ , каждый узел  $K$  представляется в виде:*

$$K = \sum_{i=1}^r v_i(K) K_i,$$

*где  $r$  — размерность пространства инвариантов Васильева порядка не более чем  $n$ ,  $v_i$  — инварианты Васильева порядка, меньшего или равного  $n$ , а  $K_i$  — некоторые фиксированные базисные узлы, не зависящие от узла  $K$ .*

Эта теорема следует непосредственно из определений.

### Определение 4.3

Для любого  $n$  таблицей актуальности инварианта Васильева порядка  $n$  называется множество его значений на базисных узлах.

Простейшее разложение в модуле Васильева [24] порядка два имеет вид:

$$K = V_2(K) \int \omega,$$

где  $V_2$  — второй коэффициент полинома Конвея.  
 Подробности см. в [16, 30, 31].



# Содержание

- 1 Предварительный интеграл Концевича
- 2 Значение  $Z(\infty)$  и нормализация
- 3 Инвариантность интеграла Концевича
  - Интегрирование голономии
    - Мультипликативный интеграл
    - Связность Книжника-Замолодчикова
- 4 Модуль Васильева
- 5 Упражнения
- 6 Исследовательские задачи

## Упражнения

- 1 Пусть  $\omega_{ij}$  — следующая 1-форма на  $X_n$ :

$$\omega_{ij} = d(\ln(z_i - z_j)) = \frac{dz_i - dz_j}{z_i - z_j}.$$

Покажите, что  $\omega_{12} \wedge \omega_{23} + \omega_{23} \wedge \omega_{31} + \omega_{31} \wedge \omega_{12} = 0$ .

- 2 Пусть  $\Omega_{nn} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} s_i s_j \Omega_{ij} \omega_{ij}$ , где  $s_i$  равно 1 при  $i \leq n$  и равно  $-1$  при  $i > n$ . Покажите, что связность  $\Omega_{nn}$  плоская.







# Содержание

- 1 Предварительный интеграл Концевича
- 2 Значение  $Z(\infty)$  и нормализация
- 3 Инвариантность интеграла Концевича
  - Интегрирование голономии
    - Мультипликативный интеграл
    - Связность Книжника-Замолодчикова
- 4 Модуль Васильева
- 5 Упражнения
- 6 Исследовательские задачи







# Исследовательские задачи:

- 1 Как выразить  $G_n^3$  и  $G_n^4$ -значные инварианты (а также другие инварианты, где сингулярные точки являются тройными, а не двойными) в терминах интегрирования голономии?
- 2 Интеграл Концевича для некоммутативных инвариантов конечного порядка.







## Литература I

-  V. O. Manturov, Knot theory: Second edition CRC press 560 April 4, 2018.
-  K. Murasugi, Knot Theory and Its Applications, Springer.
-  Vassiliev, V. A. (1990), Cohomology of knot spaces, in Theory of Singularities and its applications, *Advances in Soviet Mathematics*, **1**, pp. 23–70.
-  Kontsevich, M. (1993), Vassiliev's knot invariants, *Adv. in Soviet Math.* **16**(2) (1993), pp. 137–150.
-  Kontsevich, M. (1994), Feynman diagrams and low-dimensional topology, *First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992)*, *Progr. Math.*, **120**, Birkhauser, Basel, pp. 97–121.
-  Appel, K. I. and Haken, W. (1989), Every planar map is four colourable. *Contemp. Math.*, **98**, AMS, Providence.






## Литература II

-  Arnol'd V.I. (1969), Cohomology ring of the pure braid groups. *Mathematical Notes*, **5** (2), pp. 227–231.
-  Bleiler, S. (1984), A note on the unknotting number, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **96**, pp. 469–471.
-  Bar–Natan, D., Garoufalidis, S., Rozansky, L. and Thurston, D. (2003), Wheels, wheeling, and the Kontsevich integral of the unknot. *Israel Journal of Mathematics*, **119**, pp. 217–237.
-  Birman, J.S. and Lin X.–S. (1993), Knot polynomials and Vassiliev's invariants, *Inventiones Mathematicae*, **111**, pp. 225–270.
-  Bar–Natan, D. (1995), On the Vassiliev knot invariants, *Topology*, **34**, pp. 423–475.
-  Bar–Natan, D., Le, T. and Thurston, D. (2003), Two applications of elementary knot theory to Lie algebras and Vassiliev invariants, *Geom. Topol.*, **7**, pp. 1–31.

# Литература III





-  Bar–Natan, D. (1997), Lie algebras and the four colour theorem, *Combinatorica*, **17** (1), pp. 43–52.
-  Bar-Natan, D. (2005). Khovanov’s homology for tangles and cobordisms, *Geom. Topol.*, **9**, pp. 1443–1499.
-  Cassel, Ch. (1995), *Quantum groups* (New York: Springer–Verlag).
-  Chmutov, S., Duzhin, S. and Mostovoy, J. (2012), *Introduction to Vassiliev Knot Invariants*, Cambridge University Press, Cambridge.
-  Chmutov, S.V., Duzhin, S.V. and Lando, S.K. (1994), Vassiliev knot invariants I – III, *Advances in Soviet Mathematics*, **21**, pp. 117–147.
-  Chmutov, S.V. and Varchenko, A.N. (1997), Remarks on the Vassiliev knot invariants coming from  $sl_2$ , *Topology*, **36**, pp. 153–178.

# Литература IV







-  Dollard, J. D. and Friedman, Ch. N. (1979), *Product integration with applications to differential equations* (London: Addison–Wesley Publishing Company).
-  Garity, D.J. (2001), Unknotting numbers are not realized in minimal projections for a class of rational knots, *Rend. Inst. Mat. Univ. Trieste*, Suppl. 2., Vol. XXXII, pp. 59–72.
-  Jeong, M.J. and Park, C.Y. (2002), The critical properties for fractional chromatic Vassiliev invariants and knot polynomials. *Topology and Its Applications*, **124** pp. 505–521.
-  Kalfagianni, E. (1998), Finite type invariants of knots in 3–manifolds, *Topology*, **37**(3), pp. 673–707.
-  Manturov, O. V. (1986), Mul'tiplikativnyi integral (Multiplicative Integral), *Itogi nauki*, **22**, pp. 167–215 (in Russian).



## Литература V

-  Lando, S.K. (2004), Vassiliev knot invariants, Main constructions, In: Lando, S., Zvonkin, A., *Graphs on surfaces and their applications, Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, **141**, Springer-Verlag, Berlin, 455 pp.
-  Le, T.Q.T and Murakami, J. (1995), Representations of the category of tangles by Kontsevich's iterated integral, *Comm. Math. Phys.*, **168**, pp. 535–562.
-  Manturov, O. V. and Martynyuk, A.N, Ob odnom algoritme v teorii mul'tiplikativnogo integrala (On one algorithm in the multiplicative integral theory), *Izvestiya VUZov. Matematika*, N.5, pp. 26–33 (in Russian).
-  Milnor, J. and Moore, J. (1965), On the structure of Hopf algebras, *Annals of Mathematics*, **81**, pp. 211-264.

## Литература VI

-  Nakanishi, Y. (1983), Unknotting numbers and knot diagrams with the minimum crossings, *Math. Sem. Notes, Kobe Univ.*, **11**, pp. 257–258.
-  Onishchik, A.L. (1985), Hopfa Algebra, *Mathematical Encyclopaedia*, **5**, (Moscow, in Russian).
-  Tyurina, S.D. (1999), On formulas of Lannes and Viro–Polyak type for finite type invariants, *Mathematical notes*, **66** (3–4), pp. 525–530.
-  Tyurina, S.D. (1999), Diagrammatic formulae of Viro–Polyak type for finite type invariants, *Russian Math. Surveys*, **54**(3), pp. 187–188.
-  Vogel, P. (1995), *Algebraic structures on modules of diagrams*, Institut de Mathématiques de Jussieu, Prépublication, 32.
-  Vogel, P. (1999), The Universal Lie Algebra, Preprint.