

Лекция 10. Алгебра хордовых диаграмм

- 1 Основные структуры
- 2 Алгебры \mathcal{A}^c и \mathcal{A}^t хордовых диаграмм и диаграммы Фейнмана
 - Алгебра диаграмм Фейнмана
 - Изоморфизм между алгеброй хордовых диаграмм и алгеброй диаграмм Фейнмана
- 3 Копроизведение на диаграммах Фейнмана
 - Копроизведение на хордовых диаграммах
 - Копроизведение диаграмм Фейнмана
- 4 Представления алгебр Ли, хордовые диаграммы, и теорема о четырех красках
- 5 Упражнения
- 6 Исследовательские задачи

Содержание

- 1 Основные структуры
- 2 Алгебры \mathcal{A}^c и \mathcal{A}^t хордовых диаграмм и диаграммы Фейнмана
 - Алгебра диаграмм Фейнмана
 - Изоморфизм между алгеброй хордовых диаграмм и алгеброй диаграмм Фейнмана
- 3 Копроизведение на диаграммах Фейнмана
 - Копроизведение на хордовых диаграммах
 - Копроизведение диаграмм Фейнмана
- 4 Представления алгебр Ли, хордовые диаграммы, и теорема о четырех красках
- 5 Упражнения
- 6 Исследовательские задачи

В предыдущей лекции мы определили символы инвариантов Васильева на языке хордовых диаграмм.

Определение 1.1

Под *хордовой диаграммой* мы понимаем конечный трехвалентный граф, состоящий из ориентированного цикла (окружности) и неориентированных *хорд* (ребер, соединяющих различные точки цикла). *Порядком* хордовой диаграммы называется число хорд в ней.

Замечание 1.2

Хордовые диаграммы рассматриваются с точностью до изоморфизма графов, переводящих хорды в хорды, окружность в окружность, и сохраняющих ориентацию окружностей.

Замечание 1.3

Мы не будем явно указывать ориентацию окружности хордовой диаграммы, предполагая всегда, что она ориентирована против часовой стрелки.

Каждому сингулярному узлу сопоставим *хордовую диаграмму*, получаемую следующим образом. Посмотрим на узел как на образ в \mathbb{R}^3 стандартной ориентированной окружности S^1 , и соединим хордами прообразы, соответствующие одной точке в \mathbb{R}^3 .

Таким образом, любой инвариант порядка n задает функцию на множестве хордовых диаграмм с n хордами. Мы можем рассмотреть пространство формальных линейных комбинаций хордовых диаграмм с коэффициентами, скажем, в \mathbb{Q} , тогда символы инвариантов Васильева порядка n задают линейные функции на этом пространстве. (Функция, тождественно равная нулю, считается инвариантом нулевого порядка).

Возникает главный вопрос: *Какие функции на хордовых диаграммах могут играть роль символов инвариантов узлов?*

Одночленное соотношение

Простейшее наблюдение приводит к следующему факту. Если хордовая диаграмма $C = \textcircled{\cup}$ содержит малую изолированную хорду, то значение любого символа на такой диаграмме равно нулю. Данное соотношение называется $1T$ -соотношением (или *одночленным соотношением*).

Несложно также доказать *обобщенное $1T$ -соотношение*, где рассматриваются диаграммы $C = \textcircled{\dots}$ с хордой, которая не пересекается с другими хордами. Тогда символ любого инварианта Васильева на такой диаграмме принимает значение нуль. Доказательство оставляем в качестве упражнения.

Четырехчленное соотношение

Имеется другое соотношение, состоящее из четырех слагаемых, так называемое $4T$ -соотношение. Действительно, докажем следующую теорему.

Теорема 1.4 (Четырехчленное соотношение)

Для символа $v^{(n)}$ произвольного инварианта v порядка n выполняется следующее соотношение:

$$v^{(n)}(\text{diagram 1}) - v^{(n)}(\text{diagram 2}) - v^{(n)}(\text{diagram 3}) + v^{(n)}(\text{diagram 4}) = 0.$$

Соотношение означает, что для любых четырех диаграмм с n хордами, где $(n-2)$ хорды (не показанные на рисунке) у всех диаграмм совпадают, а другие две хорды имеют вид, как показано выше, то выполняется приведенное выше соотношение.

Доказательство теоремы 1.4

Рассмотрим четыре сингулярных узла S_1, S_2, S_3, S_4 порядка n , диаграммы которых совпадают вне некоторого малого диска, а их фрагменты s_1, s_2, s_3, s_4 выглядят следующим образом:

$$s_1 = \text{[diagram]}, s_2 = \text{[diagram]}, s_3 = \text{[diagram]}, s_4 = \text{[diagram]}.$$

Рассмотрим инвариант v порядка n и значения его символа на этих четырех узлах. Соотношения Васильева приводят к равенствам, показанным на рис. 1.

Доказательство теоремы 1.4, продолжение

$$\begin{aligned}
 V^{(n)}(\text{diagram 1}) &= V^{(n-1)}(\text{diagram 2}) - V^{(n-1)}(\text{diagram 3}) = a - b \\
 V^{(n)}(\text{diagram 4}) &= V^{(n-1)}(\text{diagram 5}) - V^{(n-1)}(\text{diagram 6}) = c - d \\
 V^{(n)}(\text{diagram 7}) &= V^{(n-1)}(\text{diagram 8}) - V^{(n-1)}(\text{diagram 9}) = c - a \\
 V^{(n)}(\text{diagram 10}) &= V^{(n-1)}(\text{diagram 11}) - V^{(n-1)}(\text{diagram 12}) = d - b
 \end{aligned}$$

Рис. 1: Одинаковые буквы соответствуют значениям $v^{(n-1)}$ для изотопных длинных узлов

Очевидно, что

$$(a - b) - (c - d) + (c - a) - (d - b) = 0.$$

Чтобы получить сингулярный узел, нужно замкнуть фрагменты s_1, s_2, s_3, s_4 . Есть два способа это сделать, см. рис. 2.

Доказательство теоремы 1.4, продолжение

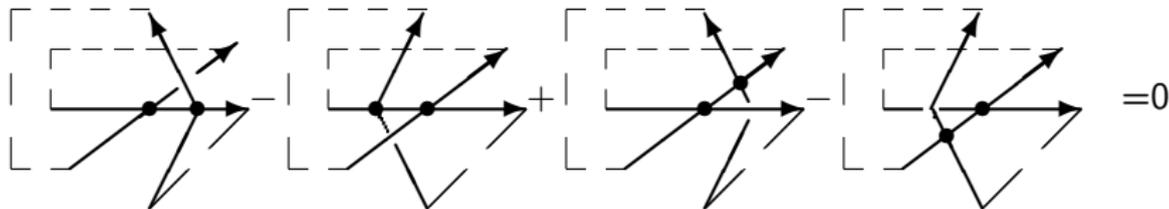
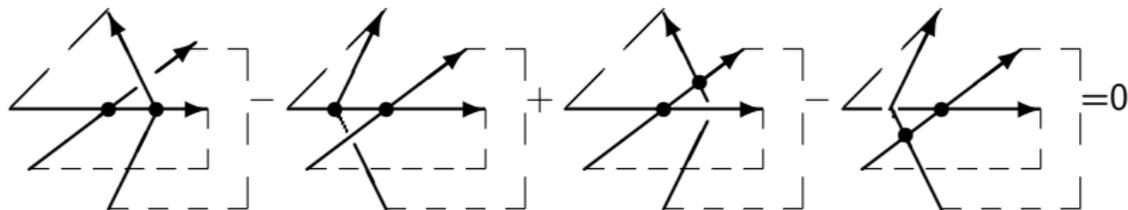


Рис. 2: Замыкание фрагментов приводит к 4T-соотношению

Доказательство теоремы 1.4, продолжение

Таким образом, диаграммы S_1, S_2, S_3, S_4 удовлетворяют соотношению

$$v^{(n)}(S_1) - v^{(n)}(S_2) + v^{(n)}(S_3) - v^{(n)}(S_4) = 0. \quad (1)$$

Каждая хордовая диаграммы, соответствующая S_1, S_2, S_3, S_4 имеет n хорд; $(n - 2)$ одинаковы у всех диаграмм, а две отличаются.

Так как порядок v равен n , символ инварианта v корректно определен на хордовых диаграммах порядка n . Таким образом, значения $v^{(n)}$ на диаграммах, соответствующих сингулярным узлам S_1, S_2, S_3, S_4 , суть значения n -й производной инварианта v на этих узлах.

Принимая во внимание полученные выше формулы и произвольность выбора остальных $(n - 2)$ сингулярных вершин на диаграммах S_1, S_2, S_3, S_4 , мы получаем утверждение теоремы.

Одночленное и четырехчленное соотношения можно рассматривать как на хордовых диаграммах, так и на двойственном пространстве функций на хордовых диаграммах (эти два пространства очевидным образом отождествляются). Для простоты мы будем использовать термины “ $1T$ –” и “ $4T$ –соотношения” в обоих случаях.

Определение 1.5

Линейная функция на хордовых диаграммах порядка n , удовлетворяющая $1T$ – и $4T$ –соотношениям, называется *весовой системой* (порядка n).

Обозначение: Пространство весовых систем порядка n обозначим через \mathcal{A}_n или Δ_n .

В предыдущей лекции мы рассматривали инварианты порядка не более двух. Ситуация здесь ясна: существует ровно одна нетривиальная (по модулю $1T$ –соотношения) хордовая диаграмма, которая определяет инвариант второго порядка. В размерности три имеем две диаграммы: . Оказывается, они линейно зависимы.

А именно, выпишем $4T$ -соотношение (неподвижная хорда изображена пунктирной линией):

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \circlearrowleft \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \\ \circlearrowright \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \circlearrowleft \\ \text{---} \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \\ \circlearrowright \\ \text{---} \end{array}.$$

Таким образом, $\begin{array}{c} \text{---} \\ \circlearrowleft \\ \text{---} \end{array} = 2 \begin{array}{c} \text{---} \\ \circlearrowleft \end{array}.$

Итак, если существует инвариант порядка три,¹ то его символ однозначно определяется значением на диаграмме $\begin{array}{c} \text{---} \\ \circlearrowleft \\ \text{---} \end{array}.$

Предположим, что есть такой инвариант V и $V'''(\begin{array}{c} \text{---} \\ \circlearrowleft \\ \text{---} \end{array}) = 1.$

¹В предыдущей лекции мы показали, что инвариант Васильева второго порядка с точностью до пропорциональности равен второму коэффициенту полинома Конвея.

Покажем, что этот инвариант различает правый и левый трилистники; см. рис. 3.²

$$\begin{aligned}
 & v(\text{right trefoil}) - v(\text{left trefoil}) = \\
 & v(\text{right trefoil}) - v(\text{right trefoil}) - v(\text{right trefoil}) + v(\text{left trefoil}) \\
 & = v''(\text{right trefoil}) - v''(\text{left trefoil}) = v'''(\text{right trefoil}) = 1
 \end{aligned}$$

Рис. 3: Инвариант Васильева порядка 3 различает трилистники

Существование такого инварианта будет доказано позднее.

²Заметим, что инвариант второго порядка показывает нетривиальность трилистника, но трилистников между собой не различает.

Рассмотрим теперь пространство Δ_4 .

Упражнение 1

Докажите следующие соотношения:

$$\text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3}, \quad \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} = 2 \cdot \text{Diagram 6}$$

$$\text{Diagram 7} = \text{Diagram 8} + \text{Diagram 9}, \quad \text{Diagram 10} = \text{Diagram 11} + \text{Diagram 12}$$

$$\text{Diagram 13} + \text{Diagram 14} = \text{Diagram 15} + \text{Diagram 16}$$

Упражнение 2

Докажите, что $\dim \Delta_4 = 3$ и что в качестве базиса можно взять диаграммы:

$$\left\{ \text{Diagram 17}, \text{Diagram 18}, \text{Diagram 19} \right\}.$$

Оказывается, что хордовые диаграммы, профакторизованные по $4T$ -соотношению (с $1T$ -соотношением или без него) образуют алгебру. А именно, имея две хордовые диаграммы C_1 и C_2 , разорвем их в точках $c_1 \in C_1$ и $c_2 \in C_2$ (не являющихся концами хорд) и соединим диаграммы в одну согласно ориентации. Полученную хордовую диаграмму будем считать произведением $C_1 \cdot C_2$. Очевидно, что данное определение зависит от выбора точек разрыва c_1 и c_2 ; так что различный выбор точек мог бы давать различные элементы в \mathcal{A}^c . Однако это не так из-за $4T$ -соотношения.

Теорема 1.6

Произведение хордовых диаграмм в \mathcal{A}^c корректно определено; т.е. не зависит от выбора начальных точек.

При доказательстве теоремы удобно перейти к *дуговым диаграммам*.

Определение 1.7

Дуговой диаграммой называется диаграмма, состоящая из ориентированной прямой и нескольких дуг, соединяющих различные точки этой прямой, причем любые две дуги не имеют общих концов.

Такие диаграммы рассматриваются с точностью до естественной эквивалентности, т.е. отображений диаграмм, переводящих прямую в прямую (с сохранением ориентации), а дуги — в дуги.

Очевидно, что, разрывая одну и ту же хордовую диаграмму в разных точках, можно получить различные дуговые диаграммы.

Рассмотрим $4T$ -соотношение для дуговых диаграмм, а именно, соотношение, которое получается из $4T$ -соотношения для хордовых диаграмм после разрывания диаграмм в одной и той же точке (отличной от конца хорды).

Оказывается, что две дуговые диаграммы A_1 и A_2 , полученные из одной хордовой диаграммы D разрыванием ее в разных точках, эквивалентны по модулю $4T$ -соотношения. Этого достаточно для доказательства теоремы 1.6. Очевидно, что диаграмму A_2 можно получить из A_1 “перебрасыванием крайнего конца дуги через бесконечность”. Таким образом, достаточно доказать следующую лемму.

Лемма 1.8

Пусть A_1, A_2 — две дуговые диаграммы, отличающиеся положением одной дуги: а именно, один из ее концов является самым правым концом в A_2 и самым левым концом дуги в A_1 ; другой конец дуги расположен одинаково в A_1 и A_2 . Тогда A_1 и A_2 эквивалентны по модулю четырехчленного соотношения.

Доказательство леммы 1.8

Пусть диаграммы A_1 и A_2 имеют порядок n . Обозначим общие для диаграмм A_1 и A_2 концы дуг через $X_1, X_2, \dots, X_{2n-1}$, считая их слева направо. Концы дуг делят прямую на $2n$ интервалов I_1, \dots, I_{2n} (занумерованных слева направо). Обозначим через D_j дуговую диаграмму, имеющую те же “неподвижные” концы дуг, что и A_1 и A_2 , и “подвижный” конец дуги, лежащий в интервале I_j . Тогда $A_1 = D_1, A_2 = D_{2n}$. Пусть второй конец “подвижной” дуги — это точка X_k . Тогда, очевидно, $D_k = D_{k+1}$, см. рис. 4. Теперь рассмотрим выражение

$$D_{2n} - D_1 = D_{2n} - D_{2n-1} + D_{2n-1} - D_{2n-2} + \dots \\ \dots + D_{k+2} - D_{k+1} + D_k - D_{k-1} + \dots D_2 - D_1.$$

В нем $4n - 4$ слагаемых. Легко видеть, что их можно разбить на $n - 1$ группы, каждая из которых образует $4T$ -соотношение с подвижной и одной неподвижной дугами.

Таким образом, $A_{2n} = A_1$. Теорема доказана.

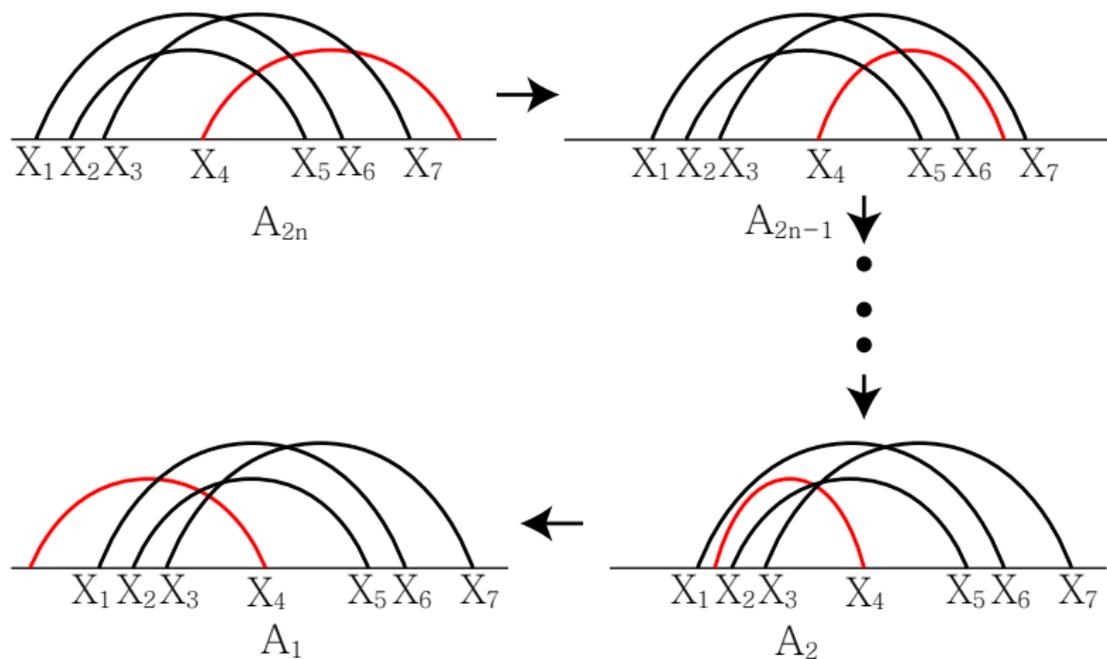


Рис. 4: Последовательность $D_{2n} \rightarrow D_{2n-1} \rightarrow \dots \rightarrow D_2 \rightarrow D_1$

Содержание

- 1 Основные структуры
- 2 Алгебры \mathcal{A}^c и \mathcal{A}^t хордовых диаграмм и диаграммы Фейнмана**
 - Алгебра диаграмм Фейнмана
 - Изоморфизм между алгеброй хордовых диаграмм и алгеброй диаграмм Фейнмана
- 3 Копроизведение на диаграммах Фейнмана
 - Копроизведение на хордовых диаграммах
 - Копроизведение диаграмм Фейнмана
- 4 Представления алгебр Ли, хордовые диаграммы, и теорема о четырех красках
- 5 Упражнения
- 6 Исследовательские задачи

Содержание

- 1 Основные структуры
- 2 Алгебры \mathcal{A}^c и \mathcal{A}^t хордовых диаграмм и диаграммы Фейнмана
 - Алгебра диаграмм Фейнмана
 - Изоморфизм между алгеброй хордовых диаграмм и алгеброй диаграмм Фейнмана
- 3 Копроизведение на диаграммах Фейнмана
 - Копроизведение на хордовых диаграммах
 - Копроизведение диаграмм Фейнмана
- 4 Представления алгебр Ли, хордовые диаграммы, и теорема о четырех красках
- 5 Упражнения
- 6 Исследовательские задачи

Диаграммы Фейнмана

Рассмотрим еще одну алгебру \mathcal{A}^t , на самом деле, изоморфную \mathcal{A}^c .

Определение 2.1

Диаграммой Фейнмана^a называется конечный граф валентности три, в котором выделен ориентированный цикл (окружность)^b. Все вершин, не лежащие на окружности, называются *внутренними* вершинами, а лежащие на окружности — *внешними* вершинами. В каждой внутренней вершине задан циклический порядок обхода инцидентных ребер.

^aТакже именуемой *китайской диаграммой* или *круговой диаграммой*.

^bЭта окружность называется также *петлей Вильсона*.

Замечание 2.2

При изображении диаграммы Фейнмана на плоскости мы предполагаем, что обход окружности и циклический порядок ребер во внутренних вершинах производится против часовой стрелки.

Определение 2.3

Степенью диаграммы Фейнмана называется половина от общего числа ее вершин.

Очевидно, что все хордовые диаграммы являются диаграммами Фейнмана; в этом случае два определения степени согласуются.

Рассмотрим формальную линейную комбинацию всех диаграмм Фейнмана степени n . Профакторизуем это пространство по STU -соотношению, изображенному на рис. 5.



Рис. 5: STU -соотношение

Обозначим полученное пространство через \mathcal{A}_n^t . Заметим, что из STU -соотношения следует $4T$ -соотношение на элементах из \mathcal{A}^c .

Содержание

- 1 Основные структуры
- 2 Алгебры \mathcal{A}^c и \mathcal{A}^t хордовых диаграмм и диаграммы Фейнмана
 - Алгебра диаграмм Фейнмана
 - Изоморфизм между алгеброй хордовых диаграмм и алгеброй диаграмм Фейнмана
- 3 Копроизведение на диаграммах Фейнмана
 - Копроизведение на хордовых диаграммах
 - Копроизведение диаграмм Фейнмана
- 4 Представления алгебр Ли, хордовые диаграммы, и теорема о четырех красках
- 5 Упражнения
- 6 Исследовательские задачи

Теорема 2.4

Существует естественный изоморфизм $f : \mathcal{A}_n^t \rightarrow \mathcal{A}_n^c$, являющийся тождественным на \mathcal{A}_n^c . Кроме того, STU -соотношение влечет следующие соотношения на \mathcal{A}^t :

- 1 Антисимметрия; см. рис. 6.
- 2 IHX -соотношение; см. рис. 7.

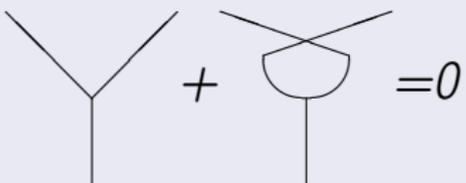
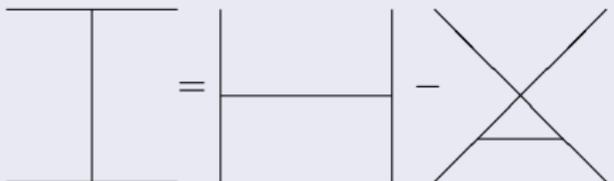


Рис. 6: Соотношение антисимметрии



Доказательство теоремы 2.4

Докажем сначала, что алгебры \mathcal{A}^t и \mathcal{A}^c изоморфны. Построим изоморфизм $f: \mathcal{A}^t \rightarrow \mathcal{A}^c$. Для элементов из $\mathcal{A}^c \subset \mathcal{A}^t$ определим f как тождественное отображение. Чтобы задать f на всех диаграммах Фейнмана, воспользуемся индукцией по числу x внутренних вершин. При $x = 0$ отображение определено.

Предположим, что f корректно определено для всех диаграмм Фейнмана порядка d . Пусть K — диаграмма Фейнмана порядка $d + 1$.

Очевидно, что найдется внутренняя вершина V в K , смежная с некоторой внешней вершиной по ребру v . Тогда применим STU-соотношение к этой вершине и получим две диаграммы порядка d . Однако эта операция неоднозначна: результат зависит от выбора вершины V и ребра v . Предположим, что есть две такие пары V, v и U, u , где $V \neq U, v \neq u$. Тогда результат операции корректно определен, как показывает двукратное применение STU-соотношения на рис. 8.

Доказательство теоремы 2.4

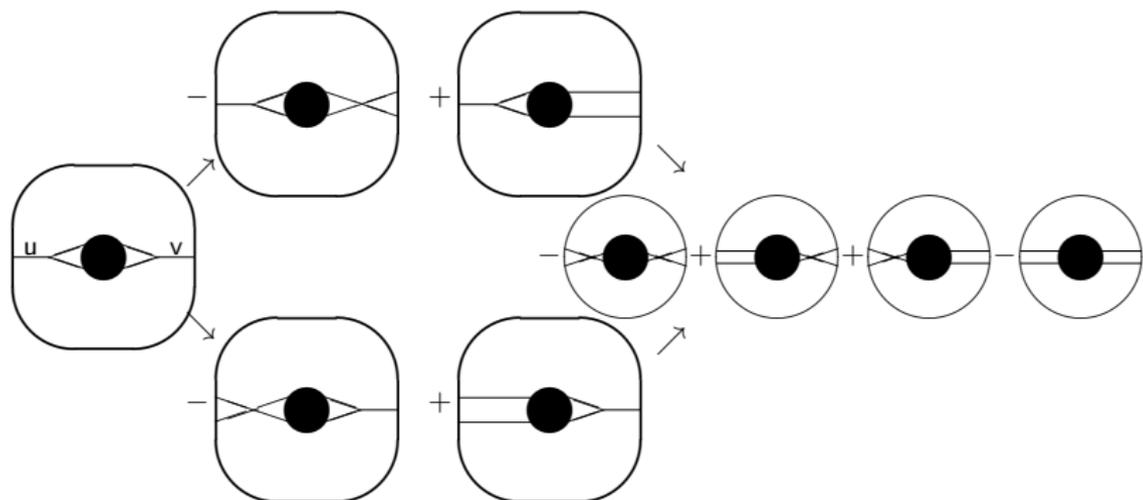


Рис. 8: Применяем STU-соотношение дважды

В случае, когда $U = V$ и $u \neq v$, можно взять другую пару. А именно, пару W, w , где W — внутренняя вершина, смежная с внешней вершиной по ребру w . Тогда операция дает для U, u тот же результат, что и для W, w а последний совпадает с результатом для U, v .

Наконец, рассмотрим случай, когда $U = V$, $u \neq v$ и U — единственная внутренняя вершина, смежная с внешней. Покажем тогда, что диаграмма равна нулю по модулю STU-соотношений. Зафиксируем область, содержащую все внутренние вершины, кроме U . Эта область соединяет с внешними вершинами только через вершину U и одну из хорд u, v . В этом случае есть два способа применить STU-соотношение. Каждый из них дает разность двух изоморфных диаграмм, то есть нуль, см. рис. 9.

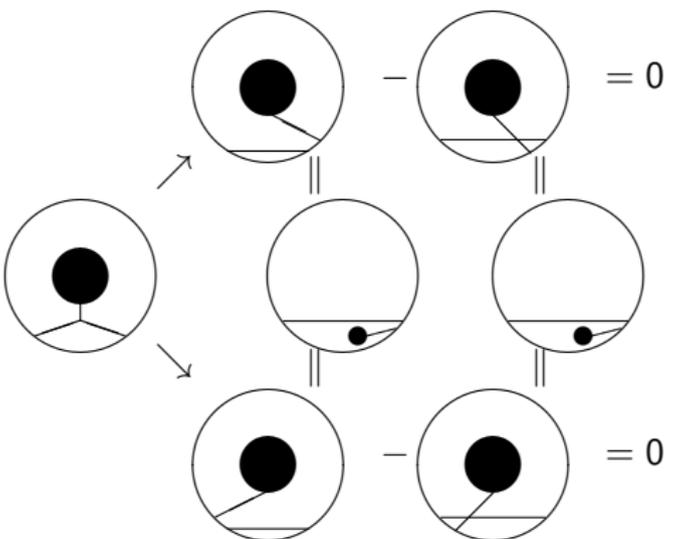


Рис. 9: STU-соотношение дает нуль

Теперь выведем из STU -соотношения соотношение антисимметричности.

Применяя STU -соотношение многократно, можно свести соотношение антисимметричности к случаю, когда одна из хорд, выходящих из заданной внутренней вершины, заканчивается во внешней вершине. Тогда соотношение антисимметричности проверяется непосредственно, см. рис. 10.

$$\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} = \text{Diagram 3} - \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} - \text{Diagram 6} = 0$$

Рис. 10: Вывод соотношения симметричности из STU -соотношения

Проверка INH -соотношения сводится к случаю, когда одна из четырех вершин (скажем, левая нижняя) является внешней. Этого можно добиться, рассматривая левую нижнюю вершину всех диаграмм, участвующих в INH -соотношении, и разрешая последовательно все внутренние вершины, находящиеся между заданной вершиной и окружностью.

В конце мы получим много троек диаграмм, для каждой из которых нужно проверить IHX -соотношение. Эта проверка показана на рис. 11.

$$\begin{aligned}
 & \left(\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} \right) = \left(\text{Diagram 4} - \text{Diagram 5} - \text{Diagram 6} + \text{Diagram 7} + \text{Diagram 8} - \text{Diagram 9} - \text{Diagram 10} \right) = \\
 & = \left(\text{Diagram 11} + \text{Diagram 12} + \text{Diagram 13} - \text{Diagram 14} + \text{Diagram 15} - \text{Diagram 16} - \right. \\
 & \left. - \text{Diagram 17} + \text{Diagram 18} - \text{Diagram 19} + \text{Diagram 20} + \text{Diagram 21} - \text{Diagram 22} \right) = 0
 \end{aligned}$$

Рис. 11: Вывод IHX -соотношения из STU -соотношения

Содержание

- 1 Основные структуры
- 2 Алгебры \mathcal{A}^c и \mathcal{A}^t хордовых диаграмм и диаграммы Фейнмана
 - Алгебра диаграмм Фейнмана
 - Изоморфизм между алгеброй хордовых диаграмм и алгеброй диаграмм Фейнмана
- 3 Копроизведение на диаграммах Фейнмана
 - Копроизведение на хордовых диаграммах
 - Копроизведение диаграмм Фейнмана
- 4 Представления алгебр Ли, хордовые диаграммы, и теорема о четырех красках
- 5 Упражнения
- 6 Исследовательские задачи

Содержание

- 1 Основные структуры
- 2 Алгебры \mathcal{A}^c и \mathcal{A}^t хордовых диаграмм и диаграммы Фейнмана
 - Алгебра диаграмм Фейнмана
 - Изоморфизм между алгеброй хордовых диаграмм и алгеброй диаграмм Фейнмана
- 3 Копроизведение на диаграммах Фейнмана
 - Копроизведение на хордовых диаграммах
 - Копроизведение диаграмм Фейнмана
- 4 Представления алгебр Ли, хордовые диаграммы, и теорема о четырех красках
- 5 Упражнения
- 6 Исследовательские задачи

Копроизведение на хордовых диаграммах

На алгебре хордовых диаграмм \mathcal{A}^c можно определить дополнительную структуру коалгебры и биалгебры. Копроизведение на \mathcal{A}^c вводится следующим образом.

Пусть C — хордовая диаграмма с n хордами. Обозначим множество хорд диаграммы C через \mathcal{X} . Определим $\Delta(C)$ как сумму

$$\sum_{s \in 2^{\mathcal{X}}} C_s \otimes C_{\mathcal{X} \setminus s},$$

где сумма берется по всем подмножествам s в \mathcal{X} , а C_s обозначает хордовую поддиаграмму, включающую все хорды диаграммы C , лежащие в s . По линейности копроизведение Δ продолжается на всю алгебру.

Теперь нужно проверить, что копроизведение корректно определено.

А именно, для любой четверки диаграмм

$$A = \text{---} \circlearrowleft \text{---}, B = \text{---} \circlearrowright \text{---}, C = \text{---} \circlearrowleft \text{---} \text{---}, D = \text{---} \circlearrowright \text{---} \text{---},$$

таких что $A - B + C - D = 0$ образует $4T$ -соотношение, необходимо проверить, что

$$\Delta(A) - \Delta(B) + \Delta(C) - \Delta(D) = 0.$$

Действительно, рассмотрим такие четыре диаграммы A, B, C, D .

Применим коумножение Δ . Мы видим, что слагаемые, где “выделенные” хорды находятся в разных подмножествах в \mathcal{X} , одни и те же для A и B , и одни и те же для C и D . Следовательно, такие слагаемые сокращаются. Если же обе хорды попадают в одно подмножество, мы получаем $4T$ -соотношение в одной части копроизведения и одну и ту же диаграмму — в другой. Таким образом, Δ корректно определено.

Дадим теперь формальное определение биалгебры.

Определение 3.1

Алгебра A с умножением μ , единичным отображением e , коумножением Δ и коединицей ϵ называется *биалгеброй*, если

- 1 e — гомоморфизм алгебр;
- 2 ϵ — гомоморфизм алгебр;
- 3 Δ — гомоморфизм алгебр.

Определение 3.2

Элемент x биалгебры B называется *примитивным*, если $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$.

Замечание 3.3

Алгебры \mathcal{A}^c и \mathcal{A}^t , на самом деле, являются алгебрами Хопфа, то есть биалгебрами с дополнительной структурой — антиподом [10, 16].

Очевидно, что для \mathcal{A}^c с естественными операциями e, ϵ и операциями умножения и коумножения операции Δ, ϵ и e являются гомоморфизмами. Отображение Δ инъективно: оно имеет пустое ядро, так как для любого $x \neq 0$, $\Delta(x)$ содержит слагаемое $x \otimes 1$. Таким образом, \mathcal{A}^c является биалгеброй.

Содержание

- 1 Основные структуры
- 2 Алгебры \mathcal{A}^c и \mathcal{A}^t хордовых диаграмм и диаграммы Фейнмана
 - Алгебра диаграмм Фейнмана
 - Изоморфизм между алгеброй хордовых диаграмм и алгеброй диаграмм Фейнмана
- 3 Копроизведение на диаграммах Фейнмана**
 - Копроизведение на хордовых диаграммах
 - Копроизведение диаграмм Фейнмана**
- 4 Представления алгебр Ли, хордовые диаграммы, и теорема о четырех красках
- 5 Упражнения
- 6 Исследовательские задачи

Определим копроизведение на алгебре диаграмм Фейнмана \mathcal{A}^t .

Замечание 3.4

Далее мы полагаем, что алгебра не факторизована по $1T$ -соотношению.

Как показано выше, алгебры \mathcal{A}^c и \mathcal{A}^t изоморфны. Таким образом, \mathcal{A}^t является биалгеброй. Опишем эту структуру подробно.

Пусть D — диаграмма Фейнмана и $V(D)$ — множество *связных компонент* диаграммы; т.е. связных компонент графа, который получается из D удалением окружности. Пусть $J \subset V(D)$ — подмножество в $V(D)$. Это подмножество задает диаграмму Фейнмана C_J , состоящую из окружности диаграммы D и связных компонент графа $V(D)$, принадлежащих J . Определим копроизведение $\tilde{\mu}(D)$ по правилу

$$\tilde{\mu}(D) = \sum_{J \subset V(D)} C_J \otimes C_{V(D) \setminus J}.$$

Пример 3.5

На рис. 12 показано копроизведение диаграммы Фейнмана.

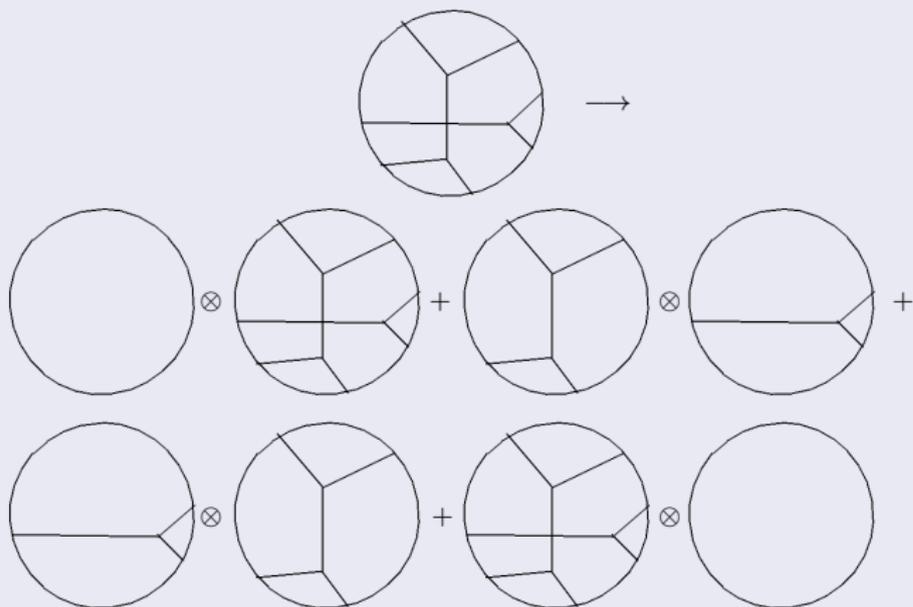


Рис. 12: Копроизведение диаграммы Фейнмана

Теорема 3.6

Копроизведение, определенное выше, совпадает с копроизведением на алгебре \mathcal{A}^c , т.е. $\mu \equiv \tilde{\mu}$.

Доказательство. Нам нужно показать, что для любой диаграммы Фейнмана D , ее копроизведение совпадает с линейной комбинацией копроизведений хордовых диаграмм, на которые разлагается D .

Докажем это индукцией по числу k внутренних вершин диаграммы. При $k = 0$ утверждение верно.

Предположим, что утверждение верно для всех диаграмм Фейнмана с k внутренними вершинами. Рассмотрим диаграмму D с $(k + 1)$ внутренней вершиной. Нужно показать, что $\mu(D) = \tilde{\mu}(D)$. Согласно STU -соотношению, диаграмма D представляется в виде разности $D_+ - D_-$, см. рис. 13; при этом связной компоненте диаграммы D соответствует либо одна компонента D_+ (и в D_-), либо две связные компоненты. В первом случае шаг индукции очевиден.

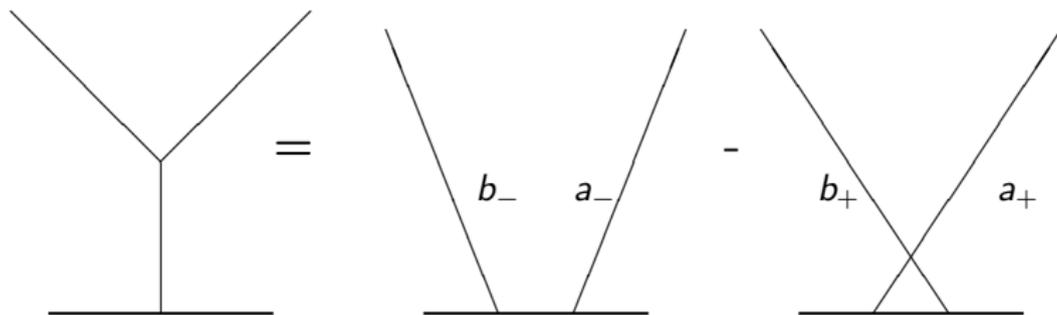


Рис. 13: Применяем STU-соотношение

Во втором случае обозначим через (a_+, b_+) и (a_-, b_-) компоненты диаграмм D_+ и D_- . Они получаются разрешением внутренней вершины диаграммы D . Каждая из диаграмм D_{\pm} имеет n внутренних вершин.

Таким образом, для них справедливо утверждение теоремы:
 $\mu(D_{\pm}) = \tilde{\mu}(D_{\pm})$. Выпишем теперь $\mu(D) = \mu(D_+) - \mu(D_-)$. В каждом копроизведении выберем члены, в которых компоненты (a_+, b_+) (соответственно, (a_-, b_-)) лежат по одну сторону от знака \otimes (члены, где компоненты попадают в разные множители, как легко увидеть, сокращаются). Очевидно, что такие члены, взятые вместе, дают $\tilde{\mu}(D)$ (в предыдущем смысле копроизведения).
Суммируя сказанное выше, мы получаем утверждение теоремы.

Содержание

- 1 Основные структуры
- 2 Алгебры \mathcal{A}^c и \mathcal{A}^t хордовых диаграмм и диаграммы Фейнмана
 - Алгебра диаграмм Фейнмана
 - Изоморфизм между алгеброй хордовых диаграмм и алгеброй диаграмм Фейнмана
- 3 Копроизведение на диаграммах Фейнмана
 - Копроизведение на хордовых диаграммах
 - Копроизведение диаграмм Фейнмана
- 4 Представления алгебр Ли, хордовые диаграммы, и теорема о четырех красках
- 5 Упражнения
- 6 Исследовательские задачи

Замечательная идея, связывающая теорию представлений алгебр Ли и теорию узлов, была популяризирована в работе [7]; см. также [9, 8, 12, 19, 20].

Идея: свертывать трехвалентные тензоры вдоль ребер графа.

Замечание 4.1

В данном разделе мы не будем учитывать $1T$ -соотношение. Мы будем работать только с $4T$ -соотношением (или STU -соотношением для диаграмм Фейнмана).

Более подробно, имея трехвалентный тензор и трехвалентный граф, мы можем сопоставить каждой вершине графа экземпляр этого тензора, а затем свернуть тензоры вдоль ребер графа. Для свертки нам понадобится некоторая метрика, согласованная с трехвалентным тензором. Здесь удобно рассмотреть полупростые алгебры Ли: можно взять трехвалентный тензор структурных констант C_{ijk} (с нижними индексами) и метрику Киллинга g_{ij} , которая в данном случае невырождена. В роли трехвалентных графов будут выступать диаграммы Фейнмана (с циклическим порядком ребер в вершинах). Замечательное наблюдение состоит в том, что STU -соотношение (как и INH -соотношение) на диаграммах Фейнмана соответствует тождеству Якоби в алгебрах Ли. Таким образом, полученные в результате свертки тензоров значения будут инвариантами относительно STU -соотношения.

Рассматриваемая ниже конструкция является частным случаем общей конструкции, так как использует присоединенное представление алгебры Ли. В общем случае нужно рассмотреть ориентированный цикл на диаграмме Фейнмана и произвольное представление R алгебры Ли G . Затем мы располагаем вдоль цикла элементы пространства представления таким образом, чтобы два соседних элемента отличались друг от друга действием элемента алгебры Ли, соответствующего ребру, исходящему из точки, разделяющей эти две дуги

Рассмотрим присоединенное представление алгебры Ли $SO(3)$. В этом случае подсчет сверток очень прост. А именно, имеются три элемента a, b, c со следующим правилом коммутирования:

$$[a, b] = c; [b, c] = a; [c, a] = b.$$

Определение 4.2

Плоской картой называется кубический граф, вложенный в плоскость \mathbb{R}^2 . Этот граф делит плоскость на клетки, которые называются *областями*).

Предположим, что мы хотим раскрасить области карты в четыре цвета. В качестве палитры возьмем группу $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ с четырьмя элементами $(0,0), (0,1), (1,0)$ и $(1,1)$.

Определение 4.3

Карта называется *раскрашиваемой в четыре цвета*, если можно сопоставить каждой области один из четырех цветов так, чтобы любые две соседние по ребру области были раскрашены в разные цвета.

Теорема о четырех красках утверждает, что каждая плоская карта (без петель) раскрашивается в четыре цвета.

Эта задача оставалась нерешенной на протяжении долгого времени. Первое доказательство [4] теоремы было технически сложным и состояло из большого числа комбинаторных построений. Ниже мы сформулируем некоторые достаточные условия для раскрашиваемости карты в четыре цвета [9].

Пусть у нас есть некоторая раскраска карты. Тогда мы можем раскрасить каждое ребро графа элементом группы $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, который есть сумма цветов примыкающих к ребру областей.

Очевидно, что карта является раскрашиваемой, если и только если ребра можно раскрасить в три цвета $(0,1)$, $(1,0)$ и $(1,1)$ так, чтобы любые два смежных ребра имели различные цвета. Таким образом, ребра должны быть *раскрашиваемы в три цвета*.

Каждую плоскую карту M будем рассматривать как диаграмму Фейнмана и сопоставим ей число, отвечающее присоединенному представлению алгебры Ли $SO(3)$. Обозначим это число через $I_3(M)$.

Теорема 4.4 (BN5)

Если $I_3(M) \neq 0$, то карта M раскрашивается в четыре цвета.

Доказательство. Используем базис a, b, c для вычисления $I_3(M)$. Так как $I_3(M) \neq 0$, существует по крайней мере одна расстановка образующих на ребрах графа, свертка которой дает ненулевой элемент. Принимая во внимание правила коммутирования в $SO(n)$, мы видим, что ребра будут раскрашиваемы в три цвета (если два смежных ребра имеют одинаковые цвета, то значение тензора в их общей вершине равно нулю). Следовательно, карта M будет раскрашиваема в четыре цвета. \square

Пусть дана хордовая диаграмма, вложенная в плоскость \mathbb{R}^2 . Тогда соответствующая карта будет раскрашиваема в четыре цвета. Действительно, окружность диаграммы делит плоскость на две части. Несложно заметить, что каждую из этих частей (внутреннюю и внешнюю) можно раскрасить в два цвета, см. рис. 14. Тогда всю диаграмму можно раскрасить в четыре цвета.

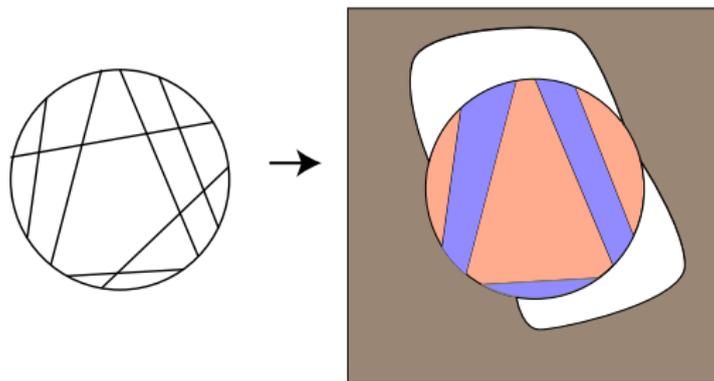


Рис. 14: Карта соответствующая вложенной хордовой диаграмму раскрашиваема в четыре цвета

Таким образом, можно поставить следующий вопрос. Рассмотрим карту (или плоскую диаграмму Фейнмана). Можно ли в ней распознать вложенную хордовую диаграмму? Другими словами, можно ли выбрать в карте набор ребер, образующих цикл, так, чтобы концы остальных ребер лежали на этом цикле?

Это знаменитая нерешенная проблема. Она была впервые поставлена У.Р. Гамильтоном, и искомый цикл называется *гамильтоновым циклом*. На сегодняшний день положительное решение проблемы получено для некоторых классов графов. Таким образом, положительное решение задачи о существовании гамильтонова цикла ведет к положительному решению задачи о четырех красках.

Однако доказанное выше условие Бар-Натана не является критерием. Существуют диаграммы Фейнмана D , для которых $I_3(D) = 0$, но при этом имеется гамильтонов цикл, а значит, диаграммы раскрашиваемы в четыре цвета. Дело в том, что при вычислении $I_3(D)$ слагаемые, соответствующие раскраскам в четыре цвета, могут входить в выражение с противоположными знаками и сократиться.

Содержание

- 1 Основные структуры
- 2 Алгебры \mathcal{A}^c и \mathcal{A}^t хордовых диаграмм и диаграммы Фейнмана
 - Алгебра диаграмм Фейнмана
 - Изоморфизм между алгеброй хордовых диаграмм и алгеброй диаграмм Фейнмана
- 3 Копроизведение на диаграммах Фейнмана
 - Копроизведение на хордовых диаграммах
 - Копроизведение диаграмм Фейнмана
- 4 Представления алгебр Ли, хордовые диаграммы, и теорема о четырех красках
- 5 Упражнения
- 6 Исследовательские задачи

Упражнения

- 1 Пусть в диаграмме $C = \textcircled{\text{-----}}$ есть хорда, не пересекающаяся с другими хордами. Покажите, что значение символа любого инварианта Васильева на данной диаграмме равно нулю.
- 2 Проверьте следующие соотношения:

$$\textcircled{\text{X}} = \textcircled{\text{Y}} + \textcircled{\text{Z}}, \quad \textcircled{\text{W}} + \textcircled{\text{V}} = 2 \textcircled{\text{U}},$$

$$\textcircled{\text{A}} = \textcircled{\text{B}} + \textcircled{\text{C}}, \quad \textcircled{\text{D}} = \textcircled{\text{E}} + \textcircled{\text{F}},$$

$$\textcircled{\text{G}} + \textcircled{\text{H}} = \textcircled{\text{I}} + \textcircled{\text{J}}.$$

- 3 Докажите, что $\dim \Delta_4 = 3$ и что следующие диаграммы образуют базис:

$$\left\{ \textcircled{\text{B}}, \textcircled{\text{A}}, \textcircled{\text{D}} \right\}.$$

Исследовательские задачи:

- 1 Построить некоммутативную (групповую) версию алгебры хордовых диаграмм.

$$V(L_+) = V(L_-) \cdot V(L_*).$$

- 2 Построить “алгебру Конвея” для инвариантов Васильева.
- 3 Построить фундаментальную группу сингулярного узла.

Литература I

-  V. O. Manturov, Knot theory: Second edition CRC press 560 April 4, 2018.
-  K. Murasugi, Knot Theory and Its Applications, Springer.
-  Vassiliev, V. A. (1990), Cohomology of knot spaces, in Theory of Singularities and its applications, *Advances in Soviet Mathematics*, **1**, pp. 23–70.
-  Kontsevich, M. (1993), Vassiliev's knot invariants, *Adv. in Soviet Math.* **16**(2) (1993), pp. 137–150.
-  Kontsevich, M. (1994), Feynman diagrams and low-dimensional topology, *First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992)*, *Progr. Math.*, **120**, Birkhauser, Basel, pp. 97–121.
-  Appel, K. I. and Haken, W. (1989), Every planar map is four colourable. *Contemp. Math.*, **98**, AMS, Providence.

Литература II

-  Bleiler, S. (1984), A note on the unknotting number, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **96**, pp. 469–471.
-  Birman, J.S. and Lin X.–S. (1993), Knot polynomials and Vassiliev's invariants, *Inventiones Mathematicae*, **111**, pp. 225–270.
-  Bar–Natan, D. (1995), On the Vassiliev knot invariants, *Topology*, **34**, pp. 423–475.
-  Bar–Natan, D., Le, T. and Thurston, D. (2003), Two applications of elementary knot theory to Lie algebras and Vassiliev invariants, *Geom. Topol.*, **7**, pp. 1–31.
-  Bar–Natan, D. (1997), Lie algebras and the four colour theorem, *Combinatorica*, **17** (1), pp. 43–52.
-  Cassel, Ch. (1995), *Quantum groups* (New York: Springer–Verlag).
-  Chmutov, S.V., Duzhin, S.V. and Lando, S.K. (1994), Vassiliev knot invariants I – III, *Advances in Soviet Mathematics*, **21**, pp. 117–147.

Литература III

-  Chmutov, S.V. and Varchenko, A.N. (1997), Remarks on the Vassiliev knot invariants coming from sl_2 , *Topology*, **36**, pp. 153–178.
-  Garity, D.J. (2001), Unknotting numbers are not realized in minimal projections for a class of rational knots, *Rend. Inst. Mat. Univ. Trieste*, Suppl. 2., Vol. XXXII, pp. 59–72.
-  Jeong, M.J. and Park, C.Y. (2002), The critical properties for fractional chromatic Vassiliev invariants and knot polynomials. *Topology and Its Applications*, **124** pp. 505–521.
-  Kalfagianni, E. (1998), Finite type invariants of knots in 3-manifolds, *Topology*, **37**(3), pp. 673–707.
-  Milnor, J. and Moore, J. (1965), On the structure of Hopf algebras, *Annals of Mathematics*, **81**, pp. 211–264.

Литература IV

-  Nakanishi, Y. (1983), Unknotting numbers and knot diagrams with the minimum crossings, *Math. Sem. Notes, Kobe Univ.*, **11**, pp. 257–258.
-  Onishchik, A.L. (1985), Hopfa Algebra, *Mathematical Encyclopaedia*, **5**, (Moscow, in Russian).
-  Vogel, P. (1995), *Algebraic structures on modules of diagrams*, Institut de Mathématiques de Jussieu, Prépublication, 32.
-  Vogel, P. (1999), *The Universal Lie Algebra*, Preprint.