

Лекция 9. Инварианты Васильева

С. Ким, В.О. Мантуров, И.М. Никонов

16 ноября 2021

Содержание

- 1 Сингулярные узлы и определение инвариантов конечного порядка
- 2 Инварианты порядка ноль и один
- 3 Пример инвариантов высших порядков
- 4 Символы инвариантов Васильева для полинома Конвея
- 5 Другие полиномы и инварианты Васильева
 - Полином Джонса
 - Полином Джонса от двух переменных
 - Полином Кауфмана от двух переменных
 - Производная произведения двух функций
- 6 Пример инварианта бесконечного порядка
- 7 Упражнения
- 8 Исследовательские задачи

Содержание

- 1 Сингулярные узлы и определение инвариантов конечного порядка
- 2 Инварианты порядка ноль и один
- 3 Пример инвариантов высших порядков
- 4 Символы инвариантов Васильева для полинома Конвея
- 5 Другие полиномы и инварианты Васильева
 - Полином Джонса
 - Полином Джонса от двух переменных
 - Полином Кауфмана от двух переменных
 - Производная произведения двух функций
- 6 Пример инварианта бесконечного порядка
- 7 Упражнения
- 8 Исследовательские задачи

Любой узел можно превратить в тривиальный заменой некоторых перекрестков. Замену перекрестков можно рассматривать как процесс непрерывной гомотопии в $\mathbb{R}^3$.

В процессе замены наибольший интерес представляет момент самопересечения узла: мы получаем так называемый *сингулярный узел*. Точнее, *сингулярный узел* порядка n — это погружение S^1 в $\mathbb{R}^3$ с n простыми точками самопересечения (т.е., точками, в которых трансверсально пересекаются две дуги).

Сингулярные узлы рассматриваются с точностью до изотопии. Изотопия сингулярных узлов определяется аналогично изотопии обычных узлов. Множество сингулярных узлов порядка n обозначается через $\mathcal{X}_n$ (при $n = 0$ множество $\mathcal{X}_0$ состоит из обычных узлов). Множество всех сингулярных узлов (включая $\mathcal{X}_0$) обозначается через $\mathcal{X}$.

Итак, при замене перекрестка классического узла в некоторый момент возникает сингулярный узел.

Пусть f — инвариант узлов. Определим его *производную* f' согласно следующему соотношению:

$$f'(\text{sing}) = f(\text{cl}_+) - f(\text{cl}_-), \quad (1)$$

Это соотношение выполняется для всех троек диаграмм, которые совпадают вне малого круга (две диаграммы задают классические узлы, а  соответствует сингулярному узлу).

Данное соотношение называется *соотношением Васильева*.

Очевидно, что инвариант f' корректно определен на сингулярных узлах, так как с сингулярным перекрестком можно связать его положительное и отрицательное разведения в $\mathbb{R}^3$. При изотопии сингулярного узла эти разведения также претерпевают изотопию.

Инварианту узлов $f : \mathcal{X}_0 \rightarrow A$,¹ можно сопоставить производные высших порядков. Для этого рассмотрим ту же формулу (1) применительно к двум сингулярным узлам порядка n и одному сингулярному узлу порядка $n + 1$ (n сингулярных перекрестков каждой из этих диаграмм лежат вне “видимой” части диаграммы). Таким образом, мы получаем инвариант на множестве $\mathcal{X}$. Этот инвариант называется *продолжением f на сингулярные узлы*.
Обозначение: $f^{(n)}$.

Пример 1.1

Посчитаем значение продолжения полинома Джонса на простейшем сингулярном узле порядка два. После двукратного применения соотношения Васильева получим:

$$\begin{aligned}
 v''(\text{diagram}) &= v'(\text{diagram}) - v'(\text{diagram}) \\
 &= v(\text{diagram}) - v(\text{diagram}) - v(\text{diagram}) + v(\text{diagram}) \\
 &= v(\text{diagram}) - v(\text{diagram}) = q + q^3 - q^4 - 1
 \end{aligned}$$

¹А может быть кольцом или полем; обычно мы будем иметь дело с $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$

Определение 1.2

Инвариант $f : \mathcal{X}_0 \rightarrow A$ называется *инвариантом (Васильева)* порядка $\leq n$, если его продолжение на сингулярные узлы порядка $(n + 1)$ тождественно равно нулю.

Обозначим через $\mathcal{V}_n$ пространство всех инвариантов Васильева порядка, не превосходящего n .

Определение 1.3

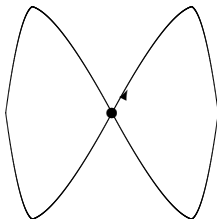
Инвариант Васильева порядка $\leq n$ имеет порядок n , если он не является инвариантом порядка, не превосходящего $n - 1$.

Содержание

- 1 Сингулярные узлы и определение инвариантов конечного порядка
- 2 Инварианты порядка ноль и один**
- 3 Пример инвариантов высших порядков
- 4 Символы инвариантов Васильева для полинома Конвея
- 5 Другие полиномы и инварианты Васильева
 - Полином Джонса
 - Полином Джонса от двух переменных
 - Полином Кауфмана от двух переменных
 - Производная произведения двух функций
- 6 Пример инварианта бесконечного порядка
- 7 Упражнения
- 8 Исследовательские задачи

По определению инвариант Васильева порядка ноль имеет одинаковые значения для узлов с одинаковой тенью, диаграммы которых различаются в одном перекрестке. Следовательно, значение инварианта совпадает для всех узлов с одинаковой тенью. Пусть K — диаграмма произвольного узла, а S — тень узла K . Существует диаграмма тривиального узла с тенью S . Значит, значение инварианта на K равно значению на тривиальном узле. Таким образом, инвариант является константой. Оказывается, что инвариантов первого порядка не существует.

Действительно, рассмотрим простейший сингулярный узел U , изображенный ниже.



Пусть S — тень узла с фиксированным сингулярным перекрестком. Следующее утверждение оставляем в качестве упражнения.

Следствие 2.1

Выбирая подходящие типы перекрестков в S , можно получить сингулярный узел, изотопный U .

Легко видеть, что для любого инварианта Васильева I , такого что $I'' = 0$ получаем $I'(U) = 0$. Действительно,

$$I'(U) = I(\bigcirc \bigcirc) - I(\bigcirc \bigcirc) = 0.$$

Теперь рассмотрим инвариант I порядка не выше одного. Пусть K — диаграмма ориентированного узла. Заменой перекрестков диаграмму K можно преобразовать в диаграмму тривиального узла. Таким образом, $I(K) = I(\bigcirc) + \sum \pm I'(K_i)$, где K_i — сингулярный узел с одной сингулярной точкой. Но каждый узел K_i можно преобразовать к диаграмме U путем замены типа перекрестков. Таким образом, $I'(K_i) = I'(U) + \sum \pm I''(K_{ij})$, где K_{ij} — сингулярный узел порядка два. По условию, $I'' \equiv 0$, значит, $I'(K_i) = 0$ и, следовательно, $I(K) = I(\bigcirc)$. Таким образом, инвариант I является константой. Итак, *не существует инвариантов порядка один.*

Содержание

- 1 Сингулярные узлы и определение инвариантов конечного порядка
- 2 Инварианты порядка ноль и один
- 3 Пример инвариантов высших порядков**
- 4 Символы инвариантов Васильева для полинома Конвея
- 5 Другие полиномы и инварианты Васильева
 - Полином Джонса
 - Полином Джонса от двух переменных
 - Полином Кауфмана от двух переменных
 - Производная произведения двух функций
- 6 Пример инварианта бесконечного порядка
- 7 Упражнения
- 8 Исследовательские задачи

Рассмотрим полином Конвея C и его коэффициенты c_n .

Теорема 3.1

Для любого натурального n функция c_n является инвариантом порядка не выше n .

Доказательство.

Действительно, сравним соотношения Конвея и Васильева:

$$C'(\text{cross}) = C(\text{diag1}) - C(\text{diag2}) = x \cdot C(\text{cup}) C(\text{cap}).$$

Таким образом, производная C делится на x ; аналогично, производная n -го порядка от C делится на x^n . Следовательно, после $n + 1$ -кратного дифференцирования функция c_n обращается в нуль.

□

$$c'_n(\text{cross}) = c_n(\text{diag1}) - c_n(\text{diag2}) = c_{n-1}(\text{cup}) C(\text{cap}).$$

Так мы получаем первый нетривиальный пример. Второй коэффициент c_2 полинома Конвея является инвариантом второго порядка (несложно проверить, что коэффициент не постоянный; а именно, его значение на трилистнике равно одному).

Однако, этот инвариант не различает левый и правый трилистники, как и полином Конвея. Далее мы построим инвариант порядка три, различающий трилистники.

Все коэффициенты полинома Конвея четного порядка являются инвариантами соответствующих порядков.

Содержание

- 1 Сингулярные узлы и определение инвариантов конечного порядка
- 2 Инварианты порядка ноль и один
- 3 Пример инвариантов высших порядков
- 4 Символы инвариантов Васильева для полинома Конвея**
- 5 Другие полиномы и инварианты Васильева
 - Полином Джонса
 - Полином Джонса от двух переменных
 - Полином Кауфмана от двух переменных
 - Производная произведения двух функций
- 6 Пример инварианта бесконечного порядка
- 7 Упражнения
- 8 Исследовательские задачи

Как мы видели, коэффициент c_n полинома Конвея является инвариантом порядка не выше n .

Пусть v — инвариант Васильева порядка n . По определению $v^{(n+1)} = 0$. Это означает, что для двух сингулярных узлов K_1, K_2 порядка n , диаграммы которых различаются в одном перекрестке (переход заменяется на проход), $v^{(n)}(K_1) = v^{(n)}(K_2)$. Таким образом, у сингулярных узлов порядка n можно делать замену перекрестков, не меняя значение $v^{(n)}$. Следовательно, значение $v^{(n)}$ не зависит от заузленности диаграммы, производимой классическими перекрестками, а зависит только от взаимного расположения сингулярных точек.

Определение 4.1

Функция $v^{(n)}$ называется *символом* инварианта v .

Определение 4.2

Под *хордовой диаграммой* мы понимаем конечный трехвалентный граф, состоящий из ориентированного цикла (окружности) и неориентированных *хорд* (ребер, соединяющих различные точки цикла). *Порядком* хордовой диаграммы называется число хорд в ней.

Замечание 4.3

Хордовые диаграммы рассматриваются с точностью до изоморфизма графов, переводящих хорды в хорды, окружность в окружность, и сохраняющих ориентацию окружностей.

Замечание 4.4

Мы не будем явно указывать ориентацию окружности хордовой диаграммы, предполагая всегда, что она ориентирована против часовой стрелки.

Предыдущие утверждения о сингулярных узлах можно переформулировать на языке хордовых диаграмм. А именно, каждому сингулярному узлу сопоставим *хордовую диаграмму*, получаемую следующим образом. Посмотрим на узел как на образ в $\mathbb{R}^3$ стандартной ориентированной окружности S^1 , и соединим хордами прообразы, соответствующие одной точке в $\mathbb{R}^3$. Таким образом, любой инвариант порядка n задает функцию на множестве хордовых диаграмм с n хордами. Мы можем рассмотреть пространство формальных линейных комбинаций хордовых диаграмм с коэффициентами, скажем, в $\mathbb{Q}$, тогда символы инвариантов Васильева порядка n задают линейные функции на этом пространстве.

Теперь ясно, что пространство $\mathcal{V}_n/\mathcal{V}_{n-1}$ отождествляется с пространством символов, которые можно рассматривать на языке диаграмм.

Покажем, что для четного n коэффициент c_n полинома Конвея имеет порядок ровно n . Более того, вычислим его символ, следуя [6].

Рассмотрим хордовую диаграмму D порядка n . “Удвоим” каждую хорду и сотрем малые дуги между параллельными хордами.

Построенный объект (ориентированная окружность без $2n$ малых дуг, но с n парами параллельных хорд) допускает обход вдоль самого себя. Действительно, начиная с произвольной точки на окружности, мы дойдем до начала некоторой хорды (после которой мы удалили малую дугу), затем повернем на хорду и идем вдоль нее. В конце хорды поворачиваем на дугу окружности (которая не была удалена) и т.д. Очевидно, что мы вернемся с начальной точке. Здесь имеем две возможности.

В первом случае мы обойдем весь объект; во втором — только его часть.

С помощью малого возмущения в $\mathbb{R}^3$ можно убрать самопересечения хорд. Тогда объект превратится в одномерное многообразие $m(D)$. Первый случай соответствует связному многообразию, а второй — несвязному.

Утверждение 4.5 ([6])

Значение n -й производной c_n на D равно единице, если $m(D)$ связно, и равно нулю в противном случае.

Доказательство.

Пусть L — сингулярный узел с хордовой диаграммой D . Уберем сингулярные вершины D , используя соотношение Васильева и скейн-соотношение Конвея:

$$C'(\text{с перекрестком}) = x \cdot C(\text{с двумя дугами}).$$

После n -кратного применения, мы получим, что значение n -й производной инварианта C на L (на D) равно значению C на диаграмме, полученной из D разведением сингулярных перекрестков, умноженному на x^n . Следовательно, коэффициент c_n в n -й производной полинома Конвея для сингулярного узла равен коэффициенту c_0 на полученной разведенной диаграмме.

Это значение не зависит от типа перекрестков: оно равно одному на тривиальном узле и нулю на тривиальном зацеплении с числом компонент, большим 1. Это завершает доказательство. $\square$

Оказывается, что узлы (как и зацепления с нечетным числом компонент) имеют только четные степени в полиноме Конвея: $c_n \equiv 0$ для нечетных n .

Этот факт можно доказать, используя предыдущее утверждение.

Пусть D — хордовая диаграмма с нечетным числом хорд n .

Предположим, что кривая $m(D)$, соответствующее D , имеет ровно одну компоненту. Приклеим диск к этой кривой. Получим ориентированное (докажите!) двумерное многообразие с вырезанным диском. Таким образом, эйлерова характеристика этого многообразия должна быть нечетной. С другой стороны, эйлерова характеристика равна $V - E + S = 2n - 3n + 1 = -n + 1$.

Предположение, что n нечетно, ведет к противоречию, завершающему доказательство.

Очевидно, что для четного n найдется хордовая диаграмма, для которой c_n отлично от нуля.

Упражнение 1

Покажите, что для каждого четного n значение n -й производной инварианта c_n на диаграмме, все хорды которой пересекаются, равно единице.

Из этого упражнения вытекает существование инвариантов Васильева произвольного четного порядка.

Таким образом, мы показали, что полином Конвея слабее инвариантов Васильева.

То же можно сказать про полином Александера, который получается из полинома Конвея простой заменой переменной.

Содержание

- 1 Сингулярные узлы и определение инвариантов конечного порядка
- 2 Инварианты порядка ноль и один
- 3 Пример инвариантов высших порядков
- 4 Символы инвариантов Васильева для полинома Конвея
- 5 Другие полиномы и инварианты Васильева**
 - Полином Джонса
 - Полином Джонса от двух переменных
 - Полином Кауфмана от двух переменных
 - Производная произведения двух функций
- 6 Пример инварианта бесконечного порядка
- 7 Упражнения
- 8 Исследовательские задачи

Если мы попытаемся применить формальное дифференцирование к коэффициентам других полиномов, то потерпим неудачу. Так, например, коэффициенты полинома Джонса сами не являются инвариантами Васильева. Дело в том, что полином Джонса от зацепления может содержать отрицательные степени переменной, так что при дифференцировании отрицательные степени сохраняются. В работе [8] дан критерий, когда коэффициенты полиномиального инварианта являются инвариантами Васильева. Там же показано, как построить полиномиальный инвариант по заданному инварианту Васильева.

Хотя не все полиномы можно получить из полинома Конвея (Александера) заменой переменной, инварианты Васильева оказываются более сильными, чем полиномиальные инварианты (за исключением, быть может, полинома Хованова). Результаты, описанные ниже, восходят к работе Бирман и Линя [4] (препринт 1991 года), см. также [5, 9].

Содержание

- 1 Сингулярные узлы и определение инвариантов конечного порядка
- 2 Инварианты порядка ноль и один
- 3 Пример инвариантов высших порядков
- 4 Символы инвариантов Васильева для полинома Конвея
- 5 Другие полиномы и инварианты Васильева**
 - Полином Джонса
 - Полином Джонса от двух переменных
 - Полином Кауфмана от двух переменных
 - Производная произведения двух функций
- 6 Пример инварианта бесконечного порядка
- 7 Упражнения
- 8 Исследовательские задачи

Рассмотрим сначала полином Джонса. Напомним, что полином Джонса удовлетворяет следующему скейн-соотношению:

$$q^{-1}V(\text{crossing}) - qV(\text{crossing}) = (q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})V(\text{cup})V(\text{cap}).$$

Сделаем замену переменной $q = e^x$. Получим:

$$e^{-x}V(\text{crossing}) - e^xV(\text{crossing}) = (e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})V(\text{cup})V(\text{cap}).$$

Выпишем теперь формальный степенной ряд по x для выражение выше и перенесем все члены, делящиеся на x , в правую часть.

В правой части мы получим сумму, делящуюся на x , а в левой части имеем производную полинома Джонса плюс добавок, делящийся на x :

$$V(\text{crossing}) - V(\text{crossing}) = x \langle \text{нечто} \rangle.$$

Повторяя рассуждение выше, мы видим, что после второго дифференцирования в правой части останутся только члены, делящиеся на x^2 .

Следовательно, после $(n + 1)$ дифференцирований, n -й член ряда, выражающего полином Джонса через x , обращается в нуль. Таким образом, все члены этого ряда являются инвариантами Васильева. Таким образом, справедлива теорема.

Теорема 5.1

Полином Джонса от одной переменной слабее инвариантов Васильева.

Содержание

- 1 Сингулярные узлы и определение инвариантов конечного порядка
- 2 Инварианты порядка ноль и один
- 3 Пример инвариантов высших порядков
- 4 Символы инвариантов Васильева для полинома Конвея
- 5 Другие полиномы и инварианты Васильева**
 - Полином Джонса
 - Полином Джонса от двух переменных**
 - Полином Кауфмана от двух переменных
 - Производная произведения двух функций
- 6 Пример инварианта бесконечного порядка
- 7 Упражнения
- 8 Исследовательские задачи

Полином Джонса от двух переменных

То же применимо к полиному Джонса (обозначаемому через $\mathcal{X}$) от двух переменных.

Выпишем его скейн-соотношение:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}\sqrt{q}}\mathcal{X}(\text{crossing}) - \sqrt{\lambda}\sqrt{q}\mathcal{X}(\text{crossing}) = \frac{q-1}{\sqrt{q}}\mathcal{X}(\text{cup})\mathcal{X}(\text{cap})$$

сделаем замену переменных $\sqrt{q} = e^x$, $\sqrt{\lambda} = e^y$ и выпишем разложение в ряд по x и y .

В правой части мы получим нечто, делящееся на x , а в левой части — производную полинома Джонса плюс нечто, делящееся на $x + y$. Таким образом, получаем

$$\mathcal{X}(\text{crossing}) - \mathcal{X}(\text{crossing}) = x\langle \text{нечто} \rangle + y\langle \text{нечто} \rangle.$$

Следовательно, после $(n+1)$ дифференцирований все члены степени $\leq n$ по x и y исчезнут.

Следовательно, справедлива теорема.

Теорема 5.2

Полином Джонса от двух переменных слабее инвариантов Васильева.

Так как полином HOMFLY-PT получается из полинома Джонса заменой переменных, получаем следующую теорему.

Теорема 5.3

Полином HOMFLY-PT слабее инвариантов Васильева.

Содержание

- 1 Сингулярные узлы и определение инвариантов конечного порядка
- 2 Инварианты порядка ноль и один
- 3 Пример инвариантов высших порядков
- 4 Символы инвариантов Васильева для полинома Конвея
- 5 Другие полиномы и инварианты Васильева**
 - Полином Джонса
 - Полином Джонса от двух переменных
 - Полином Кауфмана от двух переменных**
 - Производная произведения двух функций
- 6 Пример инварианта бесконечного порядка
- 7 Упражнения
- 8 Исследовательские задачи

Полином Кауфмана от двух переменных

Наиболее сложным и интересным случаем является полином Кауфмана от двух переменных, так как этот полином не удовлетворяет соотношению Конвея. Этот полином зависит от степеней выражений z , a и $\frac{a-a^{-1}}{z}$.

Чтобы представить полином Кауфмана в виде ряда из инвариантов Васильева, нужно выразить эти функции с помощью рядов от положительных степеней двух переменных.

Напомним, что полином Кауфмана от двух переменных определяется формулой²

$$Y(L) = a^{-w(L)} D(L),$$

где D — функция на неориентированных диаграммах узлов, удовлетворяющая соотношениям:

$$D(L) - D(L') = z(D(L_A) - D(L_B)); \quad (2)$$

$$D(\bigcirc) = \left(1 + \frac{a - a^{-1}}{z}\right); \quad (3)$$

$$D(X \# \bigcirc) = aD(X), D(X \# \bigcirc) = a^{-1}D(X), \quad (4)$$

где диаграммы $L = \bigcirc$, $L' = \bigcirc$, $L_A = \bigcirc$, $L_B = \bigcirc$
 совпадают вне малой окрестности перекрестка.

²Здесь мы обозначаем ориентированные и неориентированные диаграммы одной буквой L .

Перепишем соотношение (2) для Y . Получим:

$$a^{-1}Y(\text{diagram 1}) - aY(\text{diagram 2}) = z(Y(\text{diagram 3}) - Y(\text{diagram 4})) \cdot \langle \text{степень от } a \rangle. \quad (5)$$

Сделаем замену переменных: $p = \ln(\frac{a-1}{z})$. Тогда $z, a, \frac{a-a^{-1}}{z}$ выражаются как многочлены и ряды с положительными степенями z и p . А именно:

$$z = z,$$

$$a = ze^p + 1 = z(1 + p + \dots) + 1,$$

$$a^{-1} = 1 - z(1 + p + \dots) + z^2(1 + p + \dots)^2 + \dots,$$

$$\frac{a - a^{-1}}{z} = a^{-1}(a + 1)e^p$$

Каждая из правых частей равенств выражается как ряд с положительными степенями переменных p и z .

Таким образом, значение полинома Кауфмана от двух переменных на каждом узле можно выразить через положительные степени p и z . С другой стороны, учитывая что $a = 1 + z\langle \text{нечто} \rangle_1$ and $a^{-1} = 1 + z\langle \text{нечто} \rangle_2$, мы можем вывести из (5) и (4), что

$$Y' = z\langle \text{нечто} \rangle.$$

Таким образом, все члены в нашем двойном ряде, имеющие степень не выше n по переменной z , исчезают после $(n+1)$ дифференцирований. Следовательно, все они являются инвариантами Васильева.

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 5.4

Полином Кауфмана от двух переменных слабее инвариантов Васильева.

Содержание

- 1 Сингулярные узлы и определение инвариантов конечного порядка
- 2 Инварианты порядка ноль и один
- 3 Пример инвариантов высших порядков
- 4 Символы инвариантов Васильева для полинома Конвея
- 5 Другие полиномы и инварианты Васильева**
 - Полином Джонса
 - Полином Джонса от двух переменных
 - Полином Кауфмана от двух переменных
 - Производная произведения двух функций
- 6 Пример инварианта бесконечного порядка
- 7 Упражнения
- 8 Исследовательские задачи

Покажем теперь, как вычислить производную от произведения двух функций.

Для функций f и g , заданных на диаграммах узлов, можно формально определить производные f' и g' на диаграммах сингулярных узлов порядка один и, далее, производные высших порядков.

Рассмотрим функцию $f \cdot g$ и диаграмму сингулярного узла K порядка n . Под *разбиением* будем понимать выбор i сингулярных вершин из n вершин узла K . Выберем разбиение s . Пусть K_{1s} — диаграмма, полученная из K разведением $(n - i)$ не выбранных вершин отрицательно, а K_{2s} — диаграмма, полученная разведением выбранных i вершин из s положительно.

Лемма 5.5

Пусть K — хордовая диаграмм порядка n . Тогда имеет место формула Лейбница:

$$(fg)^{(n)}(K) = \sum_{i=0}^n \sum_s f^{(i)}(K_{1s}) g^{(n-i)}(K_{2s}).$$

Доказательство леммы 5.5

Доказательство.

Используем индукцию по n .

Проверим базу индукции (случай $n = 1$). Пусть дан сингулярный узел первого порядка. Рассмотрим его диаграмму и сингулярную вершину A в ней. выпишем соотношение Васильева:

$$\begin{aligned}
 (fg)'(\text{diagram}) &= f(\text{diagram})g(\text{diagram}) - f(\text{diagram})g(\text{diagram}) \\
 &= g(\text{diagram})(f(\text{diagram}) - f(\text{diagram})) + f(\text{diagram})(g(\text{diagram}) - g(\text{diagram})) \\
 &= f'(\text{diagram})g(\text{diagram}) + g'(\text{diagram})f(\text{diagram}). \quad (6)
 \end{aligned}$$

Равенство (6) следует из определения f' и g' . Таким образом, мы доказали теорему при $n = 1$. Заметим, что формула применима также к функциям на *сингулярных* узлах, если сингулярные вершины не участвуют в соотношении, то есть лежат вне рассматриваемой окрестности.

Доказательство леммы 5.5

Рассмотрим теперь сингулярный узел K порядка n и выберем сингулярную вершину A диаграммы узла K . Значение $(fg)^{(n)}$ на K равно разности значений $(fg)^{(n-1)}$ на двух сингулярных узлах K^1 и K^2 порядка $n-1$, которые получаются соответственно с помощью положительного и отрицательного разведения в вершине A .

По предположению индукции имеем:

$$(fg)^{(n-1)}(K^i) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_s f^{(i)}(K_{1s}^i) g^{(n-1-i)}(K_{2s}^i), \quad (7)$$

где s пробегает все разбиения порядка $(n-1)$.

Доказательство леммы 5.5

Следовательно:

$$\begin{aligned}
 (fg)^{(n)}(K) &= (fg)^{(n-1)}(K^1) - (fg)^{(n-1)}(K^2) \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_s \left[f^{(i)}(K_{1s}^1) g^{(n-1-i)}(K_{2s}^1) - f^{(i)}(K_{1s}^2) g^{(n-1-i)}(K_{2s}^2) \right] \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_s \left[f^{(i)}(K_{1s}^1) g^{(n-1-i)}(K_{2s}^1) - f^{(i)}(K_{1s}^2) g^{(n-1-i)}(K_{2s}^1) \right. \\
 &\quad \left. + f^{(i)}(K_{1s}^2) g^{(n-1-i)}(K_{2s}^1) - f^{(i)}(K_{1s}^2) g^{(n-1-i)}(K_{2s}^2) \right] \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_s \left[f^{(i+1)}(K_{1s}) g^{(n-1-i)}(K_{2s}^1) - f^{(i)}(K_{1s}^2) g^{(n-i)}(K_{2s}) \right] \\
 &= \sum_{i=0}^n \sum_s f^{(i)}(K_{1s}) g^{(n-i)}(K_{2s}).
 \end{aligned}$$



Следствие 5.6

Пусть f и g — две функции, заданные на диаграммах узлов (не обязательно являющиеся инвариантами узлов), такие что $f^{(n+1)} \equiv 0$, $g^{(k+1)} \equiv 0$. Тогда $(fg)^{(n+k+1)} \equiv 0$.

В частности, произведение инвариантов Васильева порядков n и k является инвариантом Васильева порядка не больше $(n + k)$.

Доказательство следствия оставляем в качестве упражнения.

Замечание 5.7

Следствие 5.6 связано с несколькими замечательными структурами: алгеброй хордовых диаграмм, весовыми системами, алгебрами Хопфа и теоремой Милнора–Мура. Мы познакомимся с ними в последующих лекциях.

Содержание

- 1 Сингулярные узлы и определение инвариантов конечного порядка
- 2 Инварианты порядка ноль и один
- 3 Пример инвариантов высших порядков
- 4 Символы инвариантов Васильева для полинома Конвея
- 5 Другие полиномы и инварианты Васильева
 - Полином Джонса
 - Полином Джонса от двух переменных
 - Полином Кауфмана от двух переменных
 - Производная произведения двух функций
- 6 Пример инварианта бесконечного порядка
- 7 Упражнения
- 8 Исследовательские задачи

До сих пор мы имели дело либо с инвариантами конечного порядка, либо с инвариантами, которые можно свести к инвариантам Васильева.

Теперь приведем пример инварианта, имеющего бесконечный порядок [4].

Определение 6.1

Числом заузленности $U(K)$ (ориентированного) зацепления K называется минимальное число $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, такое что K можно преобразовать в тривиальное зацепление прохождением n раз через сингулярное зацепление. Другими словами, n — минимальное число замен перекрестков, которые могут преобразовать некоторую диаграмму K в диаграмму тривиального зацепления.

По определению, инвариант равен нулю только для тривиальных зацеплений.

Теорема 6.2

Инвариант U имеет бесконечный порядок.

Доказательство. Выберем произвольное $i \in \mathbb{N}$. Мы приведем пример сингулярного узла, для которого $U^{(i)} \neq 0$. Фиксируем целое число $m > 0$ и рассмотрим узел K_{4m} с $4m$ сингулярными вершинами, изображенный на рис. 1.

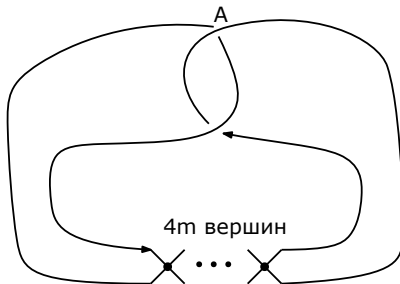


Рис. 1: Сингулярный узел, для которого $U^i \neq 0$.

Доказательство теоремы 6.2

По определению производной значение $U^{(4m)}$ на этом узле равно знакопеременной сумме $2^{(4m)}$ слагаемых; каждое из которых есть значение U на узле, полученном некоторым разрешением всех сингулярных вершин диаграммы K_{4m} .

Заметим, что для каждого из этих узлов число заузливания U не превосходит единицы: заменяя перекресток A , мы получим тривиальный узел. С другой стороны, узел, полученный из K_{4m} разрешением всех вершин, тривиален тогда и только тогда, когда число положительных разрешений равно числу отрицательных разрешений (то есть оба равны $2m$).

Доказательство теоремы 6.2

В случае q положительных и $4m - q$ отрицательных перекрестков получаем знак $(-1)^q$.

Таким образом, $U^{(4m)}(K_{4m})$ равно

$$U^{(4m)}(K_{4m}) = 2[C_{4m}^0 - C_{4m}^1 + \dots - C_{4m}^{2m-1}].$$

Эта сумма, очевидно, отрицательна: $U^{(4m)}(K_{4m}) \neq 0$. Таким образом, при $m > \frac{i}{4}$ получаем $U^{(i)} \neq 0$. Значит, инвариант U не является инвариантом порядка, не большего i . Так как i выбирается произвольно, инвариант U не является инвариантом конечного порядка. $\square$

Замечание 6.3

Возможно, U выражается через инварианты конечного порядка.

Содержание

- 1 Сингулярные узлы и определение инвариантов конечного порядка
- 2 Инварианты порядка ноль и один
- 3 Пример инвариантов высших порядков
- 4 Символы инвариантов Васильева для полинома Конвея
- 5 Другие полиномы и инварианты Васильева
 - Полином Джонса
 - Полином Джонса от двух переменных
 - Полином Кауфмана от двух переменных
 - Производная произведения двух функций
- 6 Пример инварианта бесконечного порядка
- 7 Упражнения
- 8 Исследовательские задачи

Упражнения I

- 1 Покажите, что каждый инвариант порядка ≤ 1 — константа.
- 2 Рассмотрим сингулярный узел U , изображенный на рис. 2.

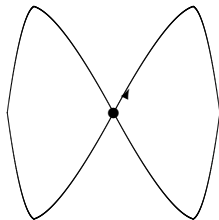


Рис. 2: Простейший сингулярный узел

Пусть S — тень узла с одной сингулярной вершиной. Докажите, что можно выбрать тип не сингулярных перекрестков в S , чтобы полученная диаграмма была изотопна U .

- 3 Покажите, что полином Кауфмана от двух переменных слабее инвариантов Васильева.

Упражнения II

- 4. Выразите коэффициенты полиномов HOMFLY и Кауфмана через инварианты Васильева.
- 5. Покажите, что произведение инвариантов f и g порядков m и n соответственно является инвариантом порядка не более, чем $m + n$.

Исследовательские задачи:

- Построить теорию некоммутативных инвариантов Васильева.
- Категорифицировать инварианты Васильева.
- Построить инварианты Васильева для заузленных поверхностей.
- Распознают ли инварианты Васильева тривиальный узел?
- Распознают ли инварианты Васильева обратимость узлов? То есть существует ли узел K , такой что K и обратный узел $-K$ различаются некоторым инвариантом Васильева?

Литература I

-  Мантуров В. О. Теория узлов, Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005 г.
-  K. Murasugi, Knot Theory and Its Applications, Springer.
-  Bleiler, S. (1984), A note on the unknotting number, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **96**, pp. 469–471.
-  Birman, J.S. and Lin X.–S. (1993), Knot polynomials and Vassiliev's invariants, *Inventiones Mathematicae*, **111**, pp. 225–270.
-  Bar–Natan, D. (1995), On the Vassiliev knot invariants, *Topology*, **34**, pp. 423–475.
-  Chmutov, S.V., Duzhin, S.V. and Lando, S.K. (1994), Vassiliev knot invariants I – III, *Advances in Soviet Mathematics*, **21**, pp. 117–147.

Литература II

-  Garity, D.J. (2001), Unknotting numbers are not realized in minimal projections for a class of rational knots, *Rend. Inst. Mat. Univ. Trieste*, Suppl. 2., Vol. XXXII, pp. 59–72.
-  Jeong, M.J. and Park, C.Y. (2002), Vassiliev invariants and knot polynomials. *Topology and Its Applications*, **124** pp. 505–521.
-  Kalfagianni, E. (1998), Finite type invariants of knots in 3-manifolds, *Topology*, **37**(3), pp. 673–707.
-  Nakanishi, Y. (1983), Unknotting numbers and knot diagrams with the minimum crossings, *Math. Sem. Notes, Kobe Univ.*, **11**, pp. 257–258.