

Лекция 9. Теорема Маркова и L -движения

В.О.Мантуров и И.М.Никонов

09 ноября 2021

Содержание

- 1 L движения
 - Процесс заплетения: теорема Александра
- 2 Теорема Маркова согласно Ламброду-Рурку
- 3 Теорема Маркова согласно Мортону
 - Формулировка. Определения. Прошивания.
 - Теорема Маркова и прошивания
- 4 Исследовательские задачи

Теорема Маркова

Сформулируем основную теорему.

Теорема 0.1 (Теорема Маркова)

Замыкания кос A и B изотопны, если и только если можно получить B из A цепочкой следующих преобразований (движений Маркова):

- 1 сопряжением $b \rightarrow a^{-1}ba$ посредством произвольной косы a с тем же числом нитей, что и b ,
- 2 движением $b \rightarrow b\sigma_n^{\pm 1}$, где b — коса из n нитей, так что полученная коса состоит из $n + 1$ нитей,
- 3 преобразование, обратное преобразованию 2).

Движения Маркова

Необходимость этих двух движений очевидна. Изотопии между соответствующими частями замыканий кос изображены на рис. 1. На рис. 1.b возникает первое движение Рейдемейстера. Этого движения не бывает при изотопии кос.

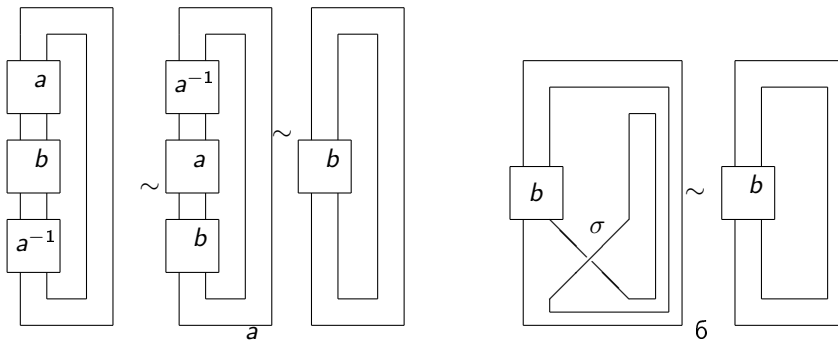


Рис. 1: Два типа движений Маркова

Введение

Мы будем доказывать теорему Маркова с использованием L -движений. Изначально L -движения появились в работе Ламбропулу и Рурка [LR], после чего они интенсивно использовались в теории виртуальных кос и многих других групп кос (Ламбропулу, Кауфман и др.)

Основная идея метода L -движений состоит в следующем. По теореме Александера по зацеплению можно построить косу. Мы используем для этого L -движения. Анализируя неоднозначность применения таких движений, мы будем получить движения Маркова.

L-движения на косах: определение

Определение 1.1

L -движение на косах представляет собой разрезание одной дуги и вытягивание концов на бесконечность (параллельно оси Oy) таким образом, чтобы либо все новые образовавшиеся перекрестки новой нити были проходами, либо все были переходами, см. рис. 2.

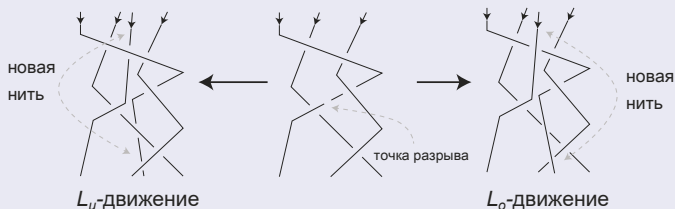


Рис. 2: L -движения

L -движения и изотопии порождают эквивалентность на косах, которую мы назовем L -эквивалентностью. Наша цель — показать, что классы L -эквивалентности на косах находятся во взаимно однозначном соответствии с классами изотопии ориентированных зацеплений S^3 , где биекция получается посредством “замыкания” косы, приводящего к зацеплению. В качестве следствия, мы получаем, что L -эквивалентность — это то же, что и обычная эквивалентность Маркова; тем самым мы получаем *классическую теорему Маркова*.

Доказательства основаны на каноническом процессе превращения комбинаторной ориентированной диаграммы зацепления на плоскости (с дополнительной структурой) в незамкнутую косу. Наше заплетение, как и L -движения основано на строительных кирпичиках комбинаторной изотопии — *треугольных движениях*, или Δ -движениях.

Мы используем бесконечность как точку отсчета для заплетения. Выбор бесконечности в качестве точки отсчета упрощает доказательство теоремы Маркова.

Точка отсчета

Рассмотрим следующие два комбинаторные движения на диаграммах:

- 1 Δ -движение: мы заменяем дугу двумя дугами, образующими треугольник, с согласованной ориентацией.
- 2 Подразбиение: Вводится/удаляется новая вершина на дуге диаграммы.

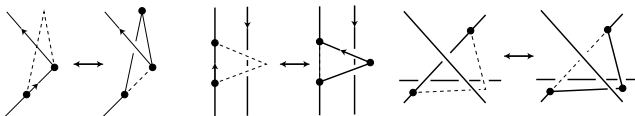


Рис. 3: Движения Рейдемейстера

Подразбиения

Подразбиения можно рассматривать как частный случай Δ -движений. Мы будем называть отношение эквивалентности, порожденное такими движениями, *комбинаторной изотопией*, или просто *изотопией*.

Комбинаторное понятие изотопии эквивалентно понятию изотопии в гладкой категории (Оставляем это в качестве упражнения).

Определение L -движений

Определение 1.2 (L -движения)

Пусть D — диаграмма зацепления/коса и пусть P — произвольная точка на дуге диаграммы D , такая что P не находится на одной вертикали с каким-либо перекрестком или с другими вершинами (заметим, что точка P сама может быть вершиной). Затем применим следующую операцию: вырежем дугу в точке P , выравняем концы подходящих дуг по вертикали с помощью малой изотопии и добавим к концам два вертикальных отрезка, лежащие на вертикальной прямой, содержащей точку P . Обе новые дуги ориентированы вниз и обе проходят либо *ниже*, либо *выше* всех других дуг диаграммы. Таким образом, имеются два L -движения: *нижнее L -движение*, или L_u -движение, и *верхнее L -движение*, или L_o -движение.

Это дает следующее алгебраическое выражение для движений L_0 и L_u -соответственно.

$$\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \sim \sigma_i^{-1} \dots \sigma_n^{-1} \alpha_1 \sigma_i^{-1} \dots \sigma_{n-1}^{-1} \sigma_n^{\pm 1} \sigma_{n-1} \dots \sigma_i \alpha_2 \sigma_n \dots \sigma_i$$

$$\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \sim \sigma_i \dots \sigma_n \alpha_1 \sigma_i \dots \sigma_{n-1} \sigma_n^{\pm 1} \sigma_{n-1}^{-1} \dots \sigma_i^{-1} \alpha_2 \sigma_n^{-1} \dots \sigma_i^{-1}$$

где α_1, α_2 — элементы из B_n .

Таким образом, L -движения выражаются через движения Маркова.

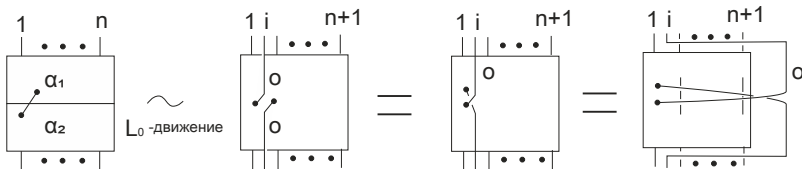


Рис. 4:

Теорема Маркова с одним движением

Теорема 1.3

Замыкание кос $C: B \mapsto Cl(B)$ индуцирует биекцию между множеством классов L -эквивалентности кос и множеством типов изотопии (ориентированных) диаграмм зацеплений.

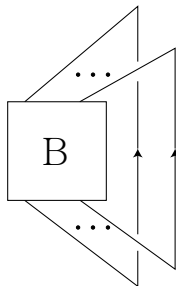


Рис. 5: Замыкание косы B

Процесс заплетения

Мы определим обратное отображение к $\mathcal{C}$ посредством канонического *процесса заплетения*, который превращает ориентированную диаграмму зацепления (с некоторой дополнительной структурой) в косу. Отметим, что мы работаем только с ориентированными диаграммами. Пусть D — диаграмма зацепления, не имеющая горизонтальных дуг, и рассмотрим дуги на диаграмме D , которые имеют наклон вверх относительно ориентации; мы назовем такие дуги *противоположными дугами*. Чтобы получить косу из такой диаграммы, нам нужно:

- 1 сохранять дуги, идущие вниз;
- 2 удалять произвольные дуги и создавать вместо них нити кос.

Подвижный треугольник

Определение 1.4

Пусть ребро QP диаграммы зацепления направлено вверх.

Подвижным треугольником для направленного вверх ребра QP диаграммы зацепления называется прямоугольный треугольник $T(P)$ с гипотенузой QP и лежащий ниже гипотенузы. Треугольник $T(P)$ имеет тип o (тип u), если QP является переходом (соотв., проходом).

Подвижные треугольники называются *смежными*, если их гипотенузы имеют общую вершину.

Лемма 1.5

Пусть дана диаграмма зацепления D . Тогда найдется подразбиение D' диаграммы D , для которого (для подходящего выбора расположения над/под для свободных дуг, ориентированных вверх)) выполняется условие треугольника: никакие несмежные подвижные треугольники одного типа не пересекаются.

Общие диаграммы и общее Δ -движение

Определение 1.6

Общая диаграмма — это диаграмма зацепления с точками подразделения и подвижными треугольниками, размещенными в общем положении по отношению к функции высоты, такая что выполняются следующие условия:

- 1 отсутствуют горизонтальные дуги,
- 2 никакие две раздельные точки подразделения не находятся на одной вертикальной линии, под 'раздельными' мы понимаем точки подразделения, не являющиеся концами одного ребра.
- 3 любые два несмежных подвижных треугольника удовлетворяют условию треугольника и, если они пересекаются, то имеют общую внутренность (а не одну точку).

Определение 1.7

Общее Δ -движение — это Δ -движение между двумя общими диаграммами.

Лемма 1.8

Изотопия между общими диаграммами зацеплений может быть реализована с использованием только Δ -движений.

Доказательство. Если после нескольких Δ -движений во время изотопии появляется горизонтальная дуга или вершины попадают на одну вертикальную линию, то мы удалим их, заменив одну из вершин по близкую к ней точку, чтобы новая точка не давала вырождений или нарушала условие 3 во всех диаграммах цепи изотопий. Если два несмежных подвижных треугольника соприкасаются и нарушается условие 3 (рис. 6), мы поступаем, как описано выше.

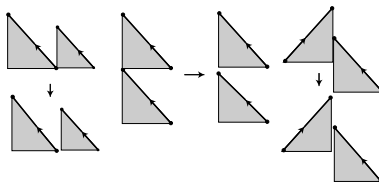


Рис. 6:

Доказательство леммы 1.8 (продолжение)

Оставшиеся возможности изображены на рис. 7; их можно убрать.
Доказательство завершено.

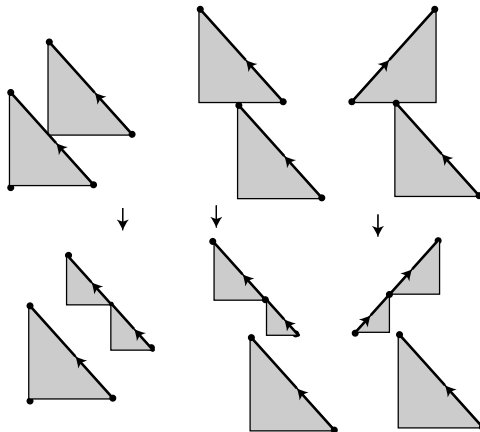


Рис. 7:

Теорема Александера

Следствие 1.9 (Теорема Александера)

Любая ориентированная диаграмма зацепления изотопна замыканию косы.

Доказательство.

Возьмем подразбиение диграммы, которое является общей диаграммой, и применим L -движения ко всем ребрам, направленным вверх. □

В связи с локальной природой Δ -движений мы можем считать, что для данной диаграммы зацепления мы применили L -движения для всех ребер, направленных вверх, за исключением ребер, лежащим в рассматриваемой области внутри косы.

Очевидно, что две косы, отличающиеся на конечную последовательность L -движений, имеют изотопные замыкания.

Поэтому операция замыкания C из классов L -эквивалентности кос в множество изотопических типов диаграмм зацеплений корректно определена. Чтобы показать, что C является биекцией, мы используем наш процесс заплетения для построения обратной функции B . А именно, для диаграммы D определим $B(D)$ как косу, полученную в результате работы заплетающего алгоритма. Нам нужно показать, что B — корректно определенная функция из изотопических классов диаграмм зацеплений в классы L -эквивалентности кос, поэтому нужно проверить, что с точностью до L -эквивалентности $B(D)$ не зависит от выбора, возникающего в процессе заплетения, и от Δ -движений между диаграммами зацеплений.

Лемма 2.1

Если добавить на восходящую дугу α дополнительную точку подразбиения P и пометить две новые восходящие дуги α_1 и α_2 так же, как и α , то соответствующие косы будут L -эквивалентны.

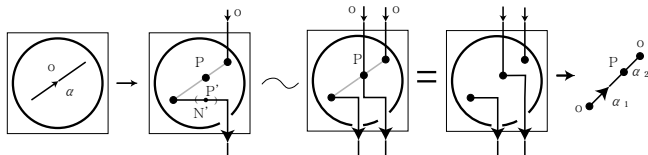


Рис. 8:

Лемма 2.2

Когда мы встречаем свободную дугу сверху, для которой имеется свобода выбора типа 'и' или 'о', то результирующая коса не зависит — с точностью до L -эквивалентности — от этого выбора.

Следствие 2.3

Если у нас есть последовательность перекрывающихся подвижных треугольника на свободных восходящих дугах, так что возникает свободный выбор типа для всей цепи, то по леммам 2.1 и 2.2, этот выбор не меняет – с точностью до L -эквивалентности – итоговую косу.

Следствие 2.4

Если при добавлении точки подразбиения на восходящей дуге появляется возможность для замены метки новой получающейся восходящей дуги, так что условие треугольника продолжает выполняться, то по леммам 2.1 и 2.2, получающиеся косы L -эквивалентны.

Следствие 2.5

Если заданы два подразбиения S_1 и S_2 диаграммы, удовлетворяющие условию треугольника для подходящих меток, то получающиеся косы L -эквивалентны.

Лемма 2.6

Если две диаграммы отличаются на Δ -движение, то соответствующие им косы L -эквивалентны.

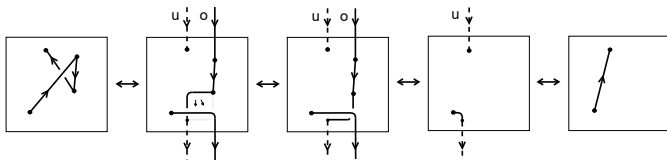


Рис. 9: Первое движение Рейдемейстера

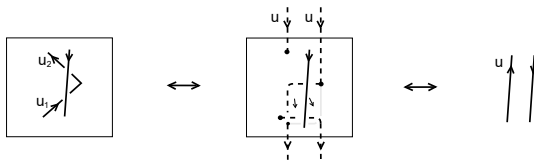


Рис. 10: Второе движение Рейдемейстера

Содержание

- 1 L движения
 - Процесс заплетения: теорема Александра
- 2 Теорема Маркова согласно Ламброду-Рурку
- 3 Теорема Маркова согласно Мортону
 - Формулировка. Определения. Прошивания.
 - Теорема Маркова и прошивания
- 4 Исследовательские задачи

В предыдущем разделе мы изучили доказательство теоремы Маркова, предложенное С. Ламбропулу и С. Рурком.

Теперь мы познакомимся с другим доказательством теоремы Маркова, принадлежащим Х. Мортону [Mor1]. Доказательство Мортонна основывается на оригинальной идее *прошивания* — альтернативном способе представления зацепления в виде замыкания косы (помимо представления Александра и Вожеля).

Замечание 3.1

Мы будем рассматривать каждое замыкание косы как набор кривых, лежащих внутри цилиндра и не пересекающих его ось; *ось* косы — это замыкание кривой, внутри цилиндра совпадающей с осью цилиндра.

Определение 3.2

Пусть K — ориентированное зацепление в $\mathbb{R}^3$. Пусть L — незаузленная кривая. Скажем, что K *заплетается вокруг* L или что $K \cup L$ является *зацеплением-косой*, если K и L представляют замыкание некоторой косы и ее ось соответственно (т.е. K лежит внутри полнотория $S^1 \times D$, где координата S^1 возрастает, а L — ось полнотория), см. рис. 11.

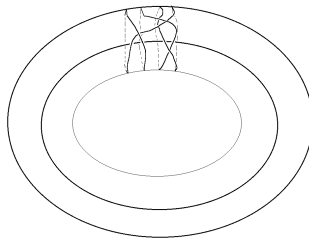


Рис. 11: Представление косы в полнотории

Имея плоскую диаграмму замыкания косы, мы можем получить соответствующее зацепление-косу прошиванием диаграммы по некоторой окружности, см.рис. 12.

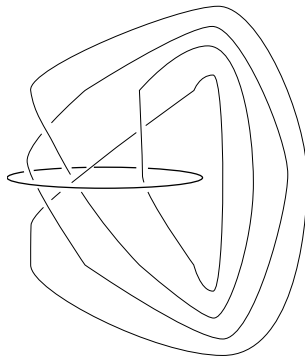


Рис. 12: Прошитое замыкание косы

Пусть K — плоская диаграмма ориентированного зацепления. Рассмотрим некоторую кривую L на плоскости проекции P зацепления K , такую что кривая L пересекает проекцию зацепления K трансверсально и не проходит через перекрестки диаграммы K .

Определение 3.3

Выбор переходов в диаграмме зацепления K — это два множества $S = \{s_1, \dots, s_k\}, F = \{f_1, \dots, f_k\}$ точек на ребрах K (точки не должны совпадать с перекрестками), такие что при движении вдоль зацепления K согласно ориентации, точки из S чередуются с точками из F ; кроме того, каждый интервал $[s, f]$ не содержит проходов, а каждый интервал $[f, s]$ не содержит переходов, т.е. дуги $[s, f]$ проходят над дугами $[f, s]$.

Определение 3.4

Скажем, что кривая L , проекция которой на плоскость зацепления K не имеет самопересечений *прошивает* K согласно выбору переходов (S, F) , если она разделяет множества S и F , при этом дуги зацепления K , выходящие из области, содержащей S , проходят над L , а дуги, выходящие из области, содержащей F , проходят под L , см. рис. 13.

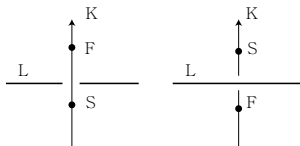


Рис. 13: Пересечения с разделяющей кривой L

Замечание 3.5

Мы не требуем, чтобы дуга, пересекающая L , содержала элементы множеств S или F .

Для заданной диаграммы зацепления K и кривой L , отделяющей точки множеств S от точек множества F , мы можем расставить проходы и переходы в точках пересечения между K и L так, чтобы новая кривая L' , полученная из L , прошивала зацепление K .

Докажем следующую теорему.

Теорема 3.6

Если L прошивает зацепление K , то K заплетается вокруг L .

Доказательство. Фиксируем выбор переходов (S, F) для диаграммы зацепления K и некоторую кривую L , разделяющую множества S и F . Выпрямим кривую L в плоскости диаграммы P с помощью гомеоморфизма P на себя: мы потребуем, чтобы преобразованная кривая L была прямой линией в некоторой области D , содержащей K ; L должна замыкаться вне D (например, как большая полуокружность). Следовательно, точки из S лежат по одну сторону от этой линии, а точки из F — по другую. Такое преобразование показано на рис. 14.

Доказательство теоремы 3.6 (продолжение)

Изменим теперь точку зрения и будем рассматривать P как плоскость Oxz , а L — как ось Oz , которую мы замыкаем вдали от начала координат.

Будем рассматривать теперь прямую L (без ее “бесконечной круговой части”) как ось цилиндрических координат. Тогда плоскость P разбивается на две полуплоскости; одна из них задается уравнением $\{\theta = 0\}$, а другая — уравнением $\{\theta = \pi\}$. Здесь полуплоскость $z = 0, x > 0$ считается имеющей координату $\theta = 0$; точки над этой полуплоскостью рассматриваются как точки с положительными координатами.

Построим теперь зацепление, изотопное зацеплению K , следующим образом. Расположим все нижние дуги K (т.е. все отрезки $[f, s]$) на полуплоскостях $\{\theta = -\varepsilon\}$ и $\{\theta = \pi + \varepsilon\}$, а также все дуги на верхних полуплоскостях $\{\theta = \varepsilon\}$ и $\{\theta = \pi - \varepsilon\}$, где ε достаточно мало.

Таким образом, мы рассмотрим малые отрезки над точками, принадлежащими к S или F таким образом, чтобы каждый отрезок проектировался в точку на Oxz .

Доказательство теоремы 3.6 (продолжение)

Представим дуги, где K пересекается с L , вертикальными дугами. Таким образом, мы сделали полярную координату θ зацепления K неубывающей (возрастающей или постоянной).

На рис. 15 и 16 мы показываем, как построить узел с неубывающей полярной координатой. Этот узел изотопен узлу, изображенному на рис. 14.

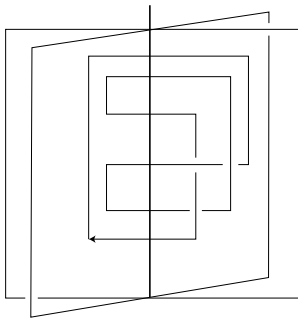


Рис. 15: Диаграмма зацепления, пересекающая L

Доказательство теоремы 3.6 (продолжение)

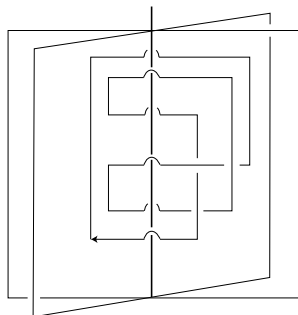


Рис. 16: Полярная координата возрастает при движении вдоль зацепления

После небольшой деформации полученного зацепления мы можем сделать эту координату строго монотонной.

Таким образом, мы преобразовали зацепление (полученное зацепление мы по-прежнему будем обозначать через K); это зацепление будет задавать косу относительно L . $\square$

Теорема 3.7

Каждое замыкание K любой косы B допускает прошивание некоторой кривой L таким образом, что K является косой относительно L .

Доказательство. Пусть $D^2 \times I$ — цилиндр. Рассмотрим B как косу, соединяющую точки, лежащие на верхнем основании цилиндра, с точками на нижнем основании. Замкнем теперь точки на нижнем основании следующим образом. Соединим нижние точки с верхними линиями, идущими горизонтально по основаниям и в некоторый момент вертикально, см. рис. 17.

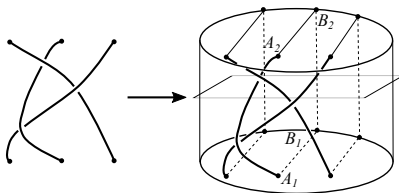


Рис. 17: Коса и заплетенное зацепление

Доказательство теоремы 3.7 (продолжение)

Применим теперь изотопию, которая выпрямляет нити и является гомеоморфизмом на верхнем основании цилиндра. Таким образом мы получим зацепление, которое допускает простую прошивку, строящуюся так. Пусть h_0 — уровень высоты нижнего основания, а h_1 — верхнего. Обозначим множество нижних концов косы B через A_1 , а множество верхних концов — через A_2 .

Предположим, что уровни h_0 и h_1 содержат некоторые дополнительные множества вершин B_1 и B_2 , с помощью которых мы строим замыкание косы. Более точно, точки из A_1 соединены нитями с точками из A_2 , а точки из B_1 соединены параллельными линиями с точками из B_2 . Теперь рассмотрим окружность, лежащую в плоскости уровня $h = \frac{h_1+h_2}{2}$ и отделяющую линии A_1A_2 от отрезков B_1B_2 .

Спроектируем диаграмму на основание цилиндра и возьмем множества A_1 в качестве S и A_2 в качестве F .

Легко видеть, что в этом случае проекция окружности на самом деле является прошиванием зацепления. $\square$

Теорема

Теоремы 3.6 и 3.7 вместе дают теорему Александера; доказательства этих теорем дают конкретный алгоритм (отличный от алгоритмов Александера и Вожеля) как представлять каждое зацепление в виде замыкания косы.

Напомним теорему Маркова.

Теорема 3.8 (Теорема Маркова)

Замыкания кос A и B изотопны, если и только если B может быть получено из A последовательностью следующих движений (называемых движениями Маркова):

- 1 сопряжение $b \rightarrow a^{-1}ba$ произвольной косой a с тем же числом нитей, что и b ,
- 2 движение $b \rightarrow b\sigma_n^{\pm 1}$, где b — коса из n нитей; полученная коса имеет $n+1$ нить (движение стабилизации),
- 3 обратное к движению 2 (стабилизация).

Переформулируем теперь *сложную* часть теоремы Маркова.
Для этих целей мы отметим некоторые определения.

Определение 3.9

Скажем, что две заплетающиеся диаграммы кос $K \cup L$ и $K' \cup L'$ являются *просто марковски эквивалентными*, если существует изотопия второй из них, переводящая L' в L , а K' совпадающее с K везде, кроме одной дуги. Зацепление K содержит дугу α , а K' содержит дугу α' с теми же концами, причем:

- 1 Полярные координаты дуги α постоянны, и монотонно растут для дуги α' .
- 2 дуги α, α' ограничивают диск, пересекающий L трансверсально в одной точке.

Определение 3.10

Две заплетенные диаграммы *марковски эквивалентны*, если одну из них можно получить из другой с помощью последовательности изотопий и простых движений Маркова.

Лемма 3.11

Если зацепления $K \cup L$ и $K' \cup L'$ просто марковски эквивалентны, то они представляют прошитое замыкание кос, изотопных некоторым косам $\beta \in Br(n)$ и $\beta \sigma_n^{\pm 1} \in Br(n+1)$.

Доказательство. Предположим, что полярная координата точек дуги α равна θ_0 . Рассмотрим дугу α_0 . Без ограничения общности можно считать, что координаты почти везде равны θ_0 , что в малой окрестности L' дуга α_0 делает петлю, и что эта петля соответствует n -й (последней) нити косы α . Мы можем произотопировать косы K и K' в окрестности $\{\alpha = \theta_0 \pm \varepsilon\}$ таким образом, чтобы конечные точки дуг α и α_0 лежали в малой окрестности L' . Остальная часть доказательства леммы очевидна. $\square$

Упражнение 3.12

Покажите, что замыкания двух кос из n нитей изотопны в классе замыканий кос из n нитей, если и только если косы сопряжены.

Лемма 3.11 вместе с упражнением 3.12 позволяет нам переформулировать сложную часть теоремы Маркова в следующем виде:

Теорема 3.13 (теорема Маркова)

Пусть β и γ — две косы, замыкания B и Γ которых изотопны как ориентированные зацепления. Прошьем эти замыкания и построим заплетенные зацепления B' и Γ' . Тогда B' и Γ' марковски эквивалентны.

Лемма 3.14

Рассмотрим диаграмму ориентированного зацепления K на плоскости P и зафиксируем выбор переходов (S, F) . Тогда прошивания K различными кривыми L и L' , разделяющими множества S и F марковски эквивалентны.

Доказательство. Основная идея состоит в следующем. Сначала рассмотрим случай, когда кривые L и L' изотопны в дополнении $P \setminus (S \cup F)$. В этом случае одну из кривых можно преобразовать в другую с помощью движений, каждое из которых задает марковскую эквивалентность.

В общем случае мы используем дополнительное движение, при котором две дуги кривой L переходят через точку из S (или F). Это движение также является марковской эквивалентностью (это будет видно из определения).

Доказательство леммы 3.14 (продолжение)

Изложим доказательство более подробно.

Случай а).

Предположим, что L и L' изотопны в $P \setminus (S \cup F)$. Тогда $K \cup L$ и $K \cup L'$ связаны последовательностью преобразований первого и второго типов, показанных на рис. 18.

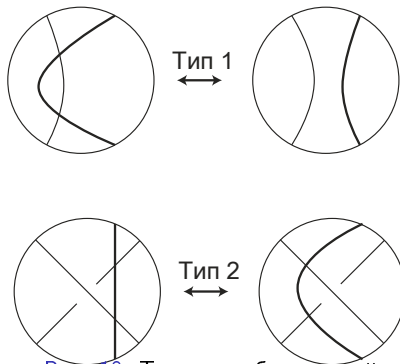


Рис. 18: Типы преобразований

Доказательство леммы 3.14 (продолжение)

Первый тип представлен либо вторым движением Рейдемейстера, либо “цепляющее” движение, которое добавляет пару перекрестков альтернированным образом. Как мы покажем ниже, это движение является простой марковской эквивалентностью.

Преобразования второго типа являются изотопиями во всех случаях, кроме показанного на рис. 19.

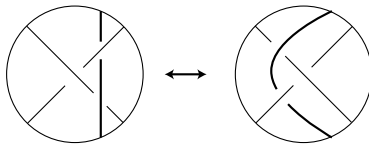


Рис. 19: Неизотопное преобразование типа II

Доказательство леммы 3.14 (продолжение)

В этом случае первую прошивку можно преобразовать во вторую с помощью последовательности движений первого типа и изотопий, см. рис. 20.

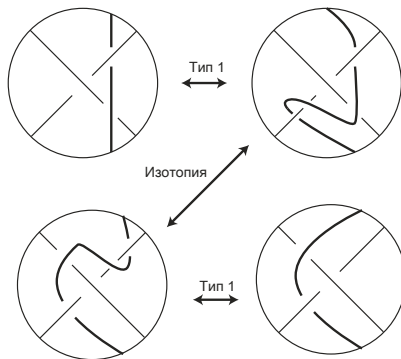


Рис. 20: Преобразование типа II сводится к преобразованиям типа I

Доказательство леммы 3.14 (продолжение)

Стоит заметить, что проходы диаграммы K под кривой L чередуются с переходами K над L при движении вдоль зацепления K . Остается показать, что два прошивания, получаемые одно из другого с помощью преобразований первого типа, марковски эквивалентны. Таким образом, часть зацепления K , изображенная на рис. 20 принадлежит либо верхней, либо нижней ветви. При построении прошивания мы можем предполагать, что обе части зацепления K , лежащие по одну сторону от L , находятся на одном уровне p_L (либо $\{\theta = \pi \pm \epsilon\}$, либо $\{\theta = \pm \epsilon\}$ в зависимости от стороны перехода).

Доказательство леммы 3.14 (продолжение)

Соединим их с помощью дуги, показанной на рис. 21.

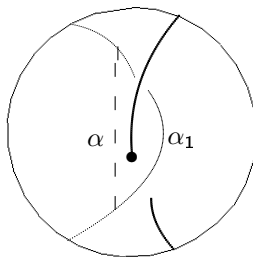


Рис. 21: Преобразование типа I является простой марковской эквивалентностью

Теперь дуги α и α' ограничивают диск. Таким образом, мы получили простую марковскую эквивалентность двух прошиваний.

Доказательство леммы 3.14 (продолжение)

Случай в).

В общем случае заметим, что если кривая M' в P , разделяющая множества S и F , может быть преобразована в кривую M посредством перебрасывания двух дуг кривой M' через точку S или F (см. рис. 22), то M и M' задают изотопные зацепления.

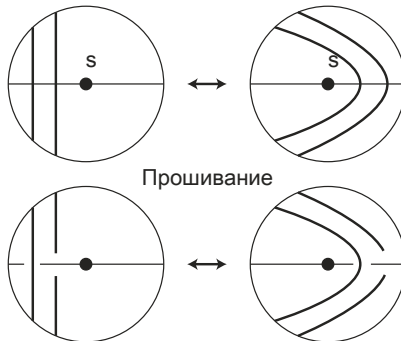


Рис. 22: Перемещение двух дуг

Доказательство леммы 3.14 (продолжение)

Такую изотопию “криволинейной” линии L (или, эквивалентно, движение точек из множеств S и F) можно разделить на несколько шагов. Между шагами мы применяем дискретные движения, меняющие комбинаторный тип расположения кривой L по отношению к множествам S и F . Таким образом, можно рассмотреть дискретный набор таких расположений, так что между двумя соседними расположениями происходит элементарное преобразование.

Доказательство леммы 3.14 (продолжение)

Без ограничения общности предположим следующее.

Пусть S и F состоят из точек $\{(-1, a_i)\}$ и $\{(1, a_i)\}$ для некоторых $a_1, \dots, a_k$, соответственно. Пусть L лежит на оси Oy , замыкаясь с помощью большой полуокружности так, что внутренность L содержит F . Можно считать, что K параллельно Ox вблизи каждой точки $s_1, \dots, s_k$.

Пусть L' — простая замкнутая кривая, разделяющая S и F и ограничивающая область, которая содержит множество F . Без ограничения общности можно считать, что кривая L' пересекает лучи $y = a_j, x < -1$ трансверсально, см. рис.23.

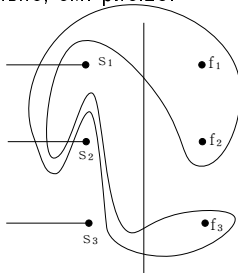


Рис. 23: Кривая L'

Доказательство леммы 3.14 (продолжение)

Занумеруем эти точки пересечений по убыванию абсциссы. На каждом луче число пересечений четно. Сгруппируем их попарно: $(1, 2), (3, 4), \dots$. Для этого сначала изотопируем L' внутри $P \setminus (S \cup F)$, чтобы между точками одной пары не было перекрестков диаграммы K .

Доказательство леммы 3.14 (продолжение)

Теперь будем сдвигать кривую L' вправо так, чтобы после выполнения преобразований все точки лежали в левой части относительно кривой L . Разделим такое преобразование на моменты, когда L' не содержит точки из S и когда содержит. В первом случае преобразование является марковской эквивалентностью из случая а). Во втором случае предположим, что точки пересечения на L' с каждым лучом исчезают парами, т.е. кривая L' последовательно переходит дважды над одной точкой s_j . Это движение также является марковской эквивалентностью, см. рис. 22.

Таким образом, прошивка с помощью кривой L' марковски эквивалентна прошивке с помощью кривой, лежащей по правую сторону относительно всех точек s_j . Эта кривая изотопна L в $P \setminus (S \cup F)$, т.е. прошивка с помощью такой кривой марковски эквивалентна прошивке с помощью L , см. случай а). Следовательно, прошивка с помощью L' марковски эквивалентна прошивке с помощью L . Доказательство леммы завершено.

Лемма 3.15

Для заданного выбора переходов (S, F) диаграммы зацепления K и точки s в K , не принадлежащей F , существует выбор переходов $(\bar{S}, \bar{F})$, такой что $s \in \bar{S}$, $S \subset \bar{S}$, $F \subset \bar{F}$.

Доказательство. Идея доказательства очень проста: мы добавляем элементы S или F там, где мы хотим компенсировать соответствующие элементы F или S . Если s лежит на верхней дуге для (S, F) , то выберем точку f непосредственно перед s относительно ориентации K ; тогда интервал $[f, s] \subset K$ не содержит переходов. В случае, когда s лежит на нижней дуге, добавим f после s ; тогда $[s, f] \subset K$ не содержит переходов.

Теорема 3.16

Любые два прошивания $K \cup L$ и $K \cup L'$ одной диаграммы K марковски эквивалентны.

Доказательство. Пусть даны выбор переходов (S, F) с прошиванием $K \cup L$ и выбор переходов (S', F') с прошиванием $K \cup L'$. По лемме 3.15 существует выбор переходов (S'', F'') , такой что $(S, F), (S', F') \subset (S'', F'')$, и два прошивания для данного выбора переходов, первое из которых марковски эквивалентно $K \cup L$, а второе — $K \cup L'$. По лемме 3.14 эти два прошивания марковски эквивалентны. Таким образом, начальные два прошивания марковски эквивалентны, что завершает доказательство.

Теорема 3.17

Любые две плоские диаграммы изотопных зацеплений имеют марковски эквивалентные прошивания.

Доказательство. Нам достаточно показать, как построить марковски эквивалентные прошивания для диаграмм, связанных одним движением Рейдемейстера.

По теореме 3.16 мы можем брать любой выбор переходов на этих диаграммах. Идея состоит в подходящем выборе переходов и прошивания для каждого движения Рейдемейстера.

Доказательство теоремы 3.17 (продолжение)

Без ограничения общности для первых двух движений можно разделяющие кривые вне малых дисков, где происходит движение (в случае Ω_1 мы выбираем одну вершину s внутри диска, в случае Ω_2 все точки (S, F) лежат снаружи диска).

Мы показали, что диаграммы зацеплений, связанные движением Ω_1 или Ω_2 , имеют марковски эквивалентные прошивания.

Для Ω_3 мы можем взять одну вершину s и одну вершину f внутри диска, а все другие вершины — снаружи диска, см. рис. 24.

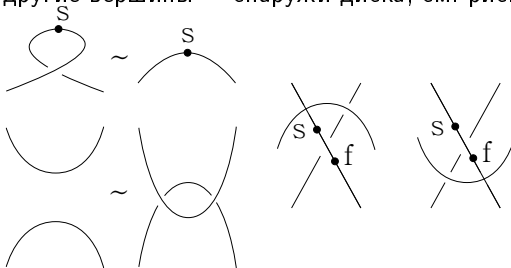


Рис. 24: Выбор переходов для движений Рейдемейстера

Доказательство теоремы 3.17 (продолжение)

На рис. 25 показано, что прошивания диаграмм, связанных движением Ω_3 , изотопны, а значит, марковски эквивалентны (мы рассматриваем только один случай, другие случаи Ω_3 , ориентаций и расположений L и K разбираются аналогично).

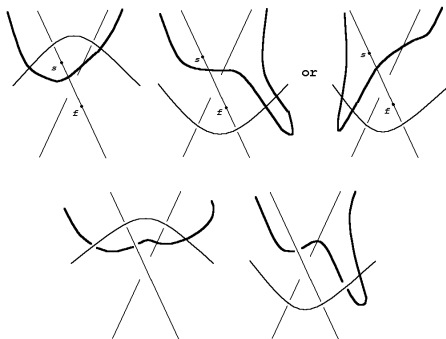


Рис. 25: Изотопные прошивания диаграмм, отличающихся на движение Ω_3

Доказательство теоремы 3.17 (продолжение)

В верхней части рис. 25, показано, как кривую L можно преобразовать с учетом движения Ω_3 . В нижней части мы показываем, как данное преобразование реализуется на уровне проходов-переходов между L и K . $\square$

Доказательство теоремы Маркова

Теперь мы готовы доказать сложную часть теоремы Маркова.

Доказательство теоремы Маркова. Пусть $K \cup L$, $K' \cup L'$ — два заплетенных зацепления, причем K и K' изотопны как зацепления. По теореме 3.7, зацепление $K \cup L$ является прошиванием диаграммы K , а зацепление $K' \cup L'$ — прошиванием K' . По теореме 3.17 можно выбрать марковски эквивалентное прошивание для первой и второй диаграмм. По теореме 3.16 марковски эквивалентно $K \cup L$, а второе — $K' \cup L'$.

Следовательно, прошивание $K \cup L$ марковски эквивалентно $K' \cup L'$, что завершает теорему Маркова.

Теперь покажем, как работает теорема Маркова.

Как известно, для любых взаимно простых чисел p и q торические узлы типа (p, q) и (q, p) изотопны. Покажем, как с помощью движений Маркова получить из косы, представляющей трилистник $(2, 3)$, косу, представляющую трилистник $(3, 2)$.

Пример 3.18

Первая коса имеет две нити и равна σ_1^{-3} ; вторая (на трех нитях) равна $\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}$. Выпишем движения Маркова, преобразующие первую косу во вторую:

$$\begin{aligned} \sigma_1^{-3} &\xrightarrow{\text{2-е движение}} \sigma_1^{-3}\sigma_2^{-1} \xrightarrow{\text{сопряжение}} \sigma_1^{-2}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1} \\ &= \sigma_1^{-1}(\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}) \xrightarrow{\text{изотопия}} \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}. \end{aligned}$$

Упражнения

- 1 Покажите, что замыкания двух кос из n нитей изотопны в классе замыканий кос из n нитей тогда и только тогда, когда косы сопряжены.
- 2 Найдите движения Маркова, доказывающие изотопность следующих торических узлов:
 - 1 $T(2, 2n + 1)$ и $T(2n + 1, 2)$
 - 2 $T(3, 4)$, $T(4, 3)$.
 - 3 $T(p, q)$, $T(q, p)$.

Исследовательские задачи:

Как построить косы, плетеное замыкание которой совпадает с заданным зацеплением, с помощью L -движений?

Аналог теоремы Маркова для трехмерных многообразий?

Какие инварианты трехмерных многообразий можно получить с помощью L -движений?

Какие инварианты зацеплений можно извлечь из конструкции Мортонна?

References I

-  V. O. Manturov, Knot theory: Second edition CRC press 560 April 4, 2018.
-  Morton, H.R. (1986), Threading knot diagrams, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **99**, pp. 247-260,
-  K. Murasugi, Knot Theory and Its Applications, Springer.
-  S. Lambropoulou, C. Rourke, *Markov's theorem in 3-manifolds*, arXiv:math/0405498v1 [math.GT] 26 May 2004.