

Лекция 7. Группа кос

С. Ким, В.О. Мантуров, И.М. Никонов

1 ноября 2021

Содержание

1 Четыре определения группы кос

- Геометрическое определение
- Топологическое определение
- Алгебро-геометрическое определение
- Алгебраическое определение
- Эквивалентность четырех определений

2 Замыкания кос и теорема Александера

- Теорема Александера
- Алгоритм Вожеля

3 Представление Бурау

4 Упражнения

5 Исследовательские задачи

Геометрическое определение

Рассмотрим прямые $\{y = 0, z = 1\}$ и $\{y = 0, z = 0\}$ в \mathbb{R}^3 и выберем m точек $(1, 0, \epsilon), \dots, (m, 0, \epsilon)$, $\epsilon = 0, 1$ на каждой прямой.

Определение 1.1

Коса из m нитей — это набор m непересекающихся гладких путей, соединяющих выбранные точки первой прямой с выбранными точками второй прямой (в произвольном порядке) так, что проекция каждого из путей на ось Oz является диффеоморфизмом. Эти гладкие пути называются *нитями косы*.

Пример косы изображен на рис. 1.

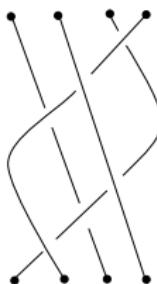


Рис. 1: Коса

Определение 1.2

Две косы B_0 и B_1 считаются *равными*, если они *изотопны*, т.е. существует непрерывное семейство кос $B_t, \{t \in \{0, 1\}\}$, начинающееся с косы B_0 и завершающееся косой B_1 .

Определение 1.3

Множество всех кос из m нитей образует группу. Групповая операция состоит в приставлении одной косы над другой и перемасштабировании координаты z . Единичным элементом, или единицей этой группы является коса, состоящая из вертикальных параллельных нитей. Обратным элементом к заданной косе является ее зеркальное отражение, см. рис. 2.

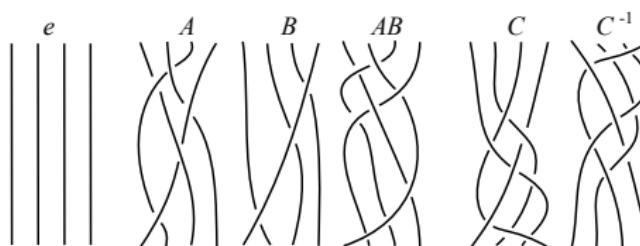


Рис. 2: Единица и операции группы кос

Определение 1.4

Артинова группа кос из m нитей — это группа кос с операцией, определенной выше.

Обозначение: $Br(m)$.

Можно рассмотреть косы, нити которых соединяют точки с одинаковыми координатами x .

Определение 1.5

Такие косы называются *крашенными*. Крашеные косы образуют подгруппу в группе кос. [Art1]

Обозначение: $PB(m)$.

Замечание 1.6

Каждая коса β задает перестановку σ_β по формуле $\sigma_\beta(i) = j$, если коса соединяет точку $(i, 0, 0)$ с $(j, 0, 1)$. Более того, данное сопоставление является гомоморфизмом групп ϕ из $B(m)$ в S_m .

Заметим, что $\ker(\phi) = PB(m)$.

Топологическое определение

Определение 1.7

Неупорядоченным конфигурационным пространством порядка m топологического пространства X является пространство (снабженное естественной топологией) всех неупорядоченных наборов из m попарно различных точек X .

Обозначение: $B(X, m)$.

Аналогично можно определить *упорядоченное конфигурационное пространство порядка m* .

Обозначение: $F(X, m)$.

Теперь пусть $X = \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}^1$.

Определение 1.8

Группа кос из m нитей определяется как фундаментальная группа $\pi_1(B(X, m))$.

Определение 1.9

Группа $\pi_1(F(X, m))$ называется *группой крашенных кос из m нитей*.

Алгебро-геометрическое определение

Рассмотрим множество всех полиномов степени m от одной комплексной переменной z со старшим коэффициентом, равным одному.

Очевидно, что это множество (с естественной топологической структурой) изоморфно \mathbb{C}^n : коэффициенты многочлена можно рассматривать как комплексные координаты.

Теперь удалим множество Σ_m всех многочленов с кратными корнями (хотя бы одним). Получим множество $\mathbb{C}^m \setminus \Sigma_m$.

Определение 1.10

Группа кос из m нитей — это группа $\pi_1(\mathbb{C}^m \setminus \Sigma_m)$.

Алгебраическое определение

Определение 1.11

Группа кос из m нитей — это группа, заданная копредставлением с $(m - 1)$ образующими $\sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}$ и следующими соотношениями

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$$

для $|i - j| \geq 2$ и

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$$

для $1 \leq i \leq m - 2$.

Данные соотношения называются *соотношениями Артина*.

Определение 1.12

Слова из букв σ 's и σ^{-1} рассматриваются как *слова в группе кос*.

Теорема 1.13

Четыре определения группы кос $Br(m)$, данные выше, эквивалентны.

Доказательство Самая простая часть доказательства — эквивалентность топологического и алгебро-геометрического определений. Действительно, очевидно, что пространство многочленов степени m без кратных корней и старшим коэффициентом, равным 1, гомеоморфно m -конфигурационному пространству для \mathbb{C}^1 . Значит, их фундаментальные группы изоморфны.

Докажем теперь эквивалентность геометрического и топологического определений. Как мы знаем, фундаментальная группа не зависит от выбора базовой точки в связном пространстве. Значит, в качестве базовой точки A в неупорядоченном m -конфигурационном пространстве можно взять набор $(1, 2, \dots, m)$. Рассмотрим пространство \mathbb{R}^3 как произведение $\mathbb{C}^1 \times \mathbb{R}^1$.

С каждой замкнутой петлей, выходящей из A и лежащей в $B(\mathbb{C}^1, m)$, свяжем набор кривых в \mathbb{R}^3 следующим образом. Каждая кривая представляет движение точки в комплексной плоскости \mathbb{C}^1 с течением времени t , где t — вещественный параметр, см. рис. 3.

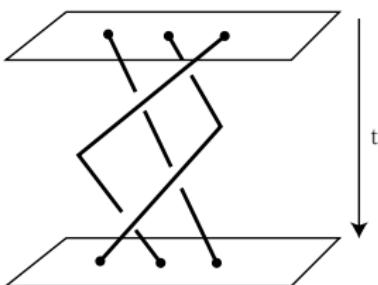


Рис. 3: Коса в трехмерном пространстве

Таким образом, каждой топологической косе мы однозначно сопоставили геометрическую косу. Очевидно, что двум гомотопным (равным) топологическим косам отвечают изотопные (равные) геометрические косы. Итак, осталось доказать эквивалентность геометрического и алгебраического определений. Для этого введем понятие *плоской диаграммы косы*, аналогичное понятию *плоской диаграммы зацепления*.

Чтобы увидеть, что это такое, спроектируем косу на плоскость Oxz . В случае общего положения мы получим диаграмму, которую можно описать следующим образом.

Определение 1.14

А *Плоская диаграмма косы* (из t нитей) — это граф, лежащий в прямоугольнике $[1, t] \times [0, 1]$, снабженный следующей структурой и имеющий следующие свойства:

- ❶ Точки $(i, 0)$ и $(i, 1)$, $i = 1, \dots, t$, являются вершинами валентности один; другие точки вида $(x, 0)$ и $(x, 1)$ не принадлежат графу.
- ❷ Все другие вершины графа (перекрестки) имеют валентность четыре; противоположные ребра в таких вершинах образуют угол π .
- ❸ Универсальные кривые, то есть линии, составленные из ребер графа путем перехода от ребра к противоположному ребру и идущие от точки с ординатой 1 к точке с ординатой 0, монотонны по координате z .
- ❹ Каждая вершина валентности 4 снабжена структурой проход–переход.



Так же, как и для плоских диаграмм зацеплений, определяется изотопия диаграмм кос.

Очевидно, что любой изотопический класс геометрической косы можно представить плоской диаграммой. Более того, с помощью малой деформации можно добиться, чтобы все перекрестки косы имели разные ординаты.

Несложно увидеть, что каждый элемент геометрической группы кос можно разложить в произведение следующих образующих σ_i : элемент σ_i для $i = 1, \dots, m - 1$ состоит из $m - 2$ дуг, соединяющих $(k, 1)$ и $(k, 0)$, $k \neq i, k \neq i + 1$, и двух дуг $(i, 0) - (i + 1, 1)$, $(i + 1, 0) - (i, 1)$, где последняя дуга идет над первой, см. рис. 4.

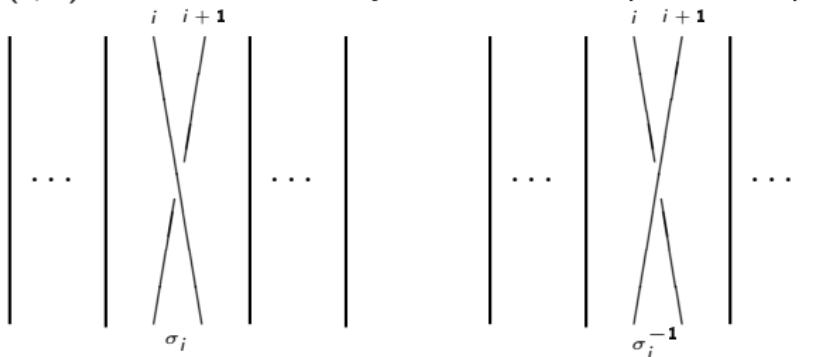


Рис. 4: Образующие группы кос

Разные диаграммы кос могут соответствовать одной косе. Таким образом, мы получаем соотношения на образующие $\sigma_1, \dots, \sigma_m$.

Предположим, что даны две равные геометрические косы B_1 и B_2 . Опишем процесс их изотопии в терминах плоских диаграмм. На малом промежутке времени изотопия либо не меняет порядок перекрестков по ординате, либо в какой-то момент ординаты двух перекрестков совпадают; в последнем случае диаграмма перестает быть регулярной.

Нас интересуют моменты, когда меняется алгебраическое строение диаграммы. Легко видеть, что так происходит только в трех случаях (остальные можно свести к этим трем). В первом случае (см. рис. 5.а) пара перекрестков имеет совпадающие ординаты. Во втором случае (см. рис. 5.б) две нити касаются.

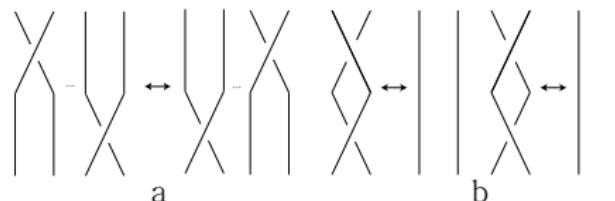


Рис. 5: Наглядное описание изотопии диаграммы косы 1

В третьем случае (рис. 6) возникает тройная точка пересечения.

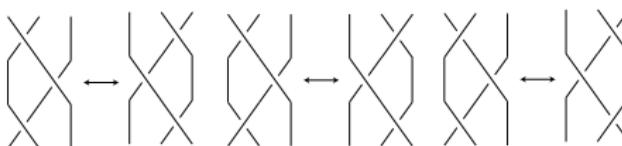


Рис. 6: Наглядное описание изотопии диаграммы косы 2

Легко видеть, что первый случай приводит к соотношению $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, |i - j| \geq 2$ (это соотношение называется *дальней коммутативностью*) или эквивалентным ему соотношениям $\sigma_i^{\pm 1} \sigma_j^{\pm 1} = \sigma_j^{\pm 1} \sigma_i^{\pm 1}, |i - j| \geq 2$, во втором случае получаем $a a^{-1} = 1$ (или $a^{-1} a = 1$), а в третьем случае мы имеем одно из следующих трех соотношений:

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1},$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i^{-1} = \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^{-1}.$$

Очевидно, что из первого соотношения можно вывести другие два. Это простое наблюдение мы оставляем слушателю в качестве упражнения. Доказательство теоремы завершено.

Замыкания кос

Определение 2.1

Замыканием косы b называется зацепление $C(b)$, которое получается из b соединением нижних концов косы с верхними, как показано на рис. 7.

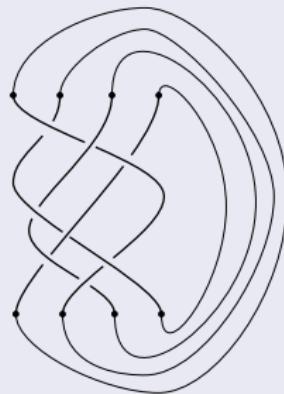


Рис. 7: Замыкание косы

Очевидно, что изотопные косы порождают изотопные зацепления.

Замечание 2.2

Замыкания кос имеют естественную ориентацию: все нити косы ориентируются сверху вниз.

Некоторые косы порождают узлы, а некоторые — зацепления. Чтобы найти число компонент в соответствующем зацеплении, нужно воспользоваться следующим простым наблюдением. Есть естественный эпиморфизм группы кос на группу перестановок $\Sigma: Br(n) \rightarrow S_n$, заданное правилом $\sigma_i \mapsto s_i$, где s_i — транспозиция $(i \ i+1)$ в группе перестановок.

Рассмотрим косу B . Очевидно, что для чисел p , принадлежащих одной орбите под действием элемента $\Sigma(B)$ на множестве $\{1, \dots, n\}$, верхние точки косы с координатами $(p, 0)$ принадлежат одной компоненте зацепления.

Следовательно, мы получаем такое утверждение.

Утверждение 2.3

Число компонент в замыкании косы $Cl(B)$ равно числу орбит действия элемента $\Sigma(B)$.



Ясно, что не изотопные косы могут порождать изотопные зацепления. Мы вернемся в этому вопросу позже.

Интересным вопросом является определение минимального числа нитей косы, замыканием которой является данное зацепление L . Обозначим это число через $Braid(L)$.

Интересная теорема на этот счет принадлежит Дж. Бирман и У. Менаско.

Теорема 2.4

Для любых узлов K_1 и K_2 справедливо равенство

$$Braid(K_1 \# K_2) = Braid(K_1) + Braid(K_2) - 1.$$

На рис. 8 мы показываем, что если узел K_1 можно представить как замыкание косы из n нитей, а узел K_2 — как замыкание косы из m нитей, то $K_1 \# K_2$ является замыканием косы из $(n + m - 1)$. Это доказывает неравенство “ \leq ”.

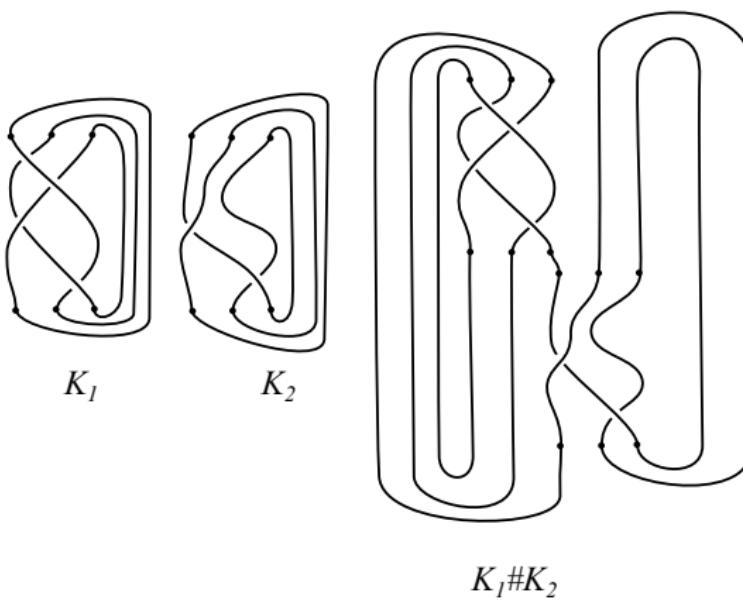


Рис. 8: Представление связной суммы с помощью кос

Доказательство обратного неравенства “ \geq ” можно найти в [ВМ].

Теорема Александера

Теорема 2.5 (теорема Александера [Ale])

Каждое зацепление является замыканием некоторой косы.

Мы дадим два доказательства этой теоремы: оригинальное доказательство Александера и доказательство Вожеля, которое дает быстрый алгоритм построения соответствующей косы.

Определение 2.6

Полигональное зацепление — это зацепление, составленное из отрезков, как на рис. 9.

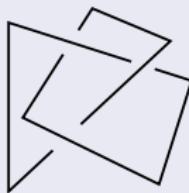


Рис. 9: Полигональное зацепление

Доказательство Александера

Мы докажем теорему для полигональных зацеплений.

Рассмотрим диаграмму L ориентированного полигонального зацепления и точку O в плоскости P диаграммы (но вне диаграммы L). Скажем, что L заплетается вокруг O если любое ребро L ориентировано против часовой стрелки, если смотреть от точки O .

Определение 2.7

Для заданных L и O , будем называть ребра, ориентированные против часовой стрелки, *положительными*; остальные ребра будут *отрицательными*.

Доказательство Александера (продолжение)

Если существует точка O , вокруг которой заплется диаграмма зацепления, то утверждение теоремы Александера становится вполне очевидным: просто разрежем диаграмму вдоль луча, выходящего из O и “выпрямим диаграмму”, см. рис. 10.

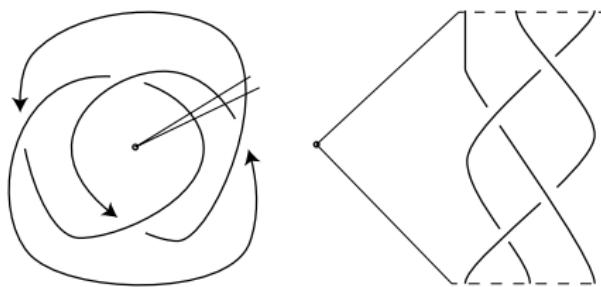


Рис. 10: Построение косы из заплетенной диаграммы

Таким образом, чтобы доказать теорему в общем случае, достаточно перестроить заданную произвольную диаграмму зацепления в диаграмму, заплатающуюся вокруг некоторой точки O .

Доказательство Александера: трюк Александера

Сначала зафиксируем точку O . Далее применим следующий трюк Александера. Возьмем некоторое отрицательное ребро AB нашего полигонального зацепления и выберем точку C на плоскости проекции P так, чтобы треугольник ABC содержал O . Заменим AB на ребра AC и CB . Оба ребра, очевидно, будут положительны, см. рис. 11.

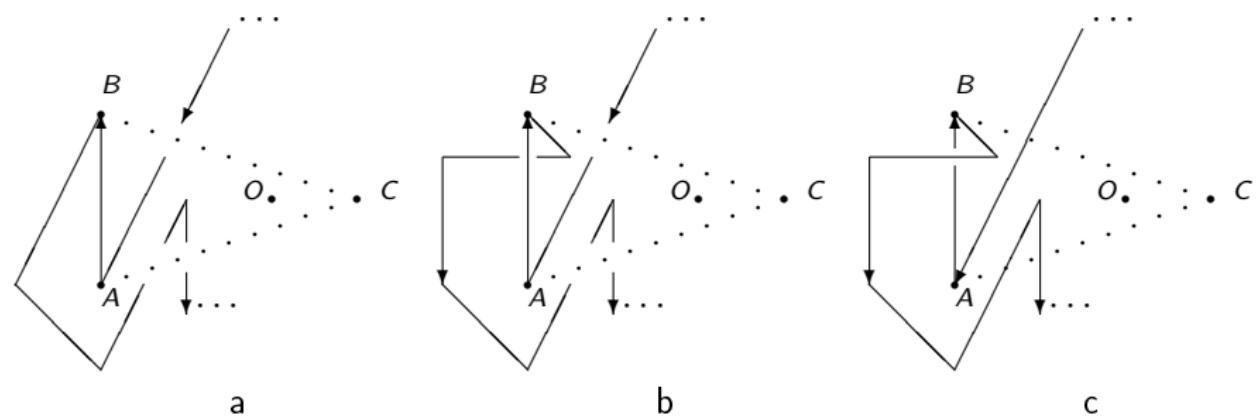


Рис. 11: Трюк Александера

Доказательство Александера : трюк Александера

Мы будем повторять эту операцию, пока диаграммы не станет заплетаться вокруг O , что завершит доказательство.

Опишем эту конструкцию более подробно. В случае, когда отрицательное ребро AB не содержит перекрестков, трюк Александера реализуется напрямую, см. рис. 11.а. Действительно, разобьем ребро AB на два ребра и протащим их над O , см. рис. 12.

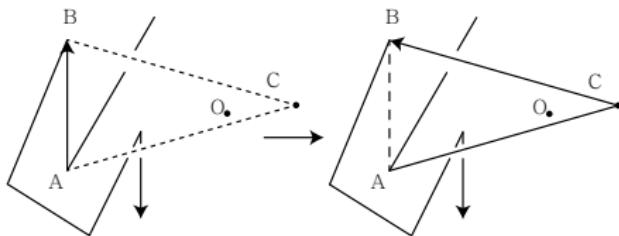


Рис. 12: Случай 11.а.

Доказательство Александера : трюк Александера (продолжение)

То же самое можно сделать, когда AB содержит один переход через другое ребро; см. рис. 11.b.

Наконец, содержит AB один проход под другим ребром, мы можем протащить новые ребра под диаграммой, см. рис. 11.c.

Замечание 2.8

Описанное выше доказательство теоремы Александера содержит конкретный алгоритм построения косы из зацепления. Однако этот алгоритм очень медленный. Ниже мы изложим более быстрый алгоритм для построения косы по зацеплению.

Алгоритм Вожеля

Мы опишем алгоритм, предложенный Пьером Вожелем [?].
Начнем с определения.

Определение 2.9

Ориентированная коса является **заплетенной**, если существует точка, вокруг которой заплется данная диаграмма.

Заплетенную диаграмму легко представить в виде замыкания косы.

Замечание 2.10

Очевидно, что свойство заплетенности диаграммы не зависит от структуры перекрестков. Можно сказать, что мы будем работать только с тенями зацеплений. В дальнейшем мы не будем использовать информацию о проходах и переходах перекрестков.

Пусть дана диаграмма D ориентированного зацепления L .

Определим операцию *сглаживания перекрестков*, просто “сглаживая” каждый перекресток согласно ориентации, как на рис. 13.

Результатом операции является набор окружностей Зейферта.

Обозначим это сглаживание через σ .

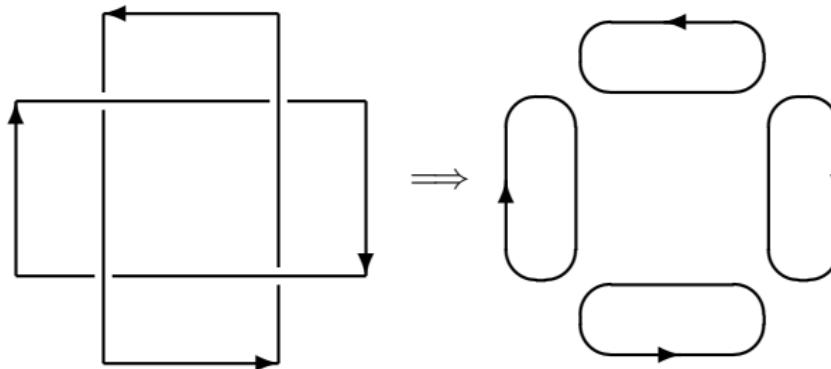


Рис. 13: Сглаживание перекрестков и окружности Зейферта

Определение 2.11

Скажем, что все окружности Зейферта плоской диаграммы *образуют гнезда*, если они индуцируют одну и ту же ориентацию на плоскости и ограничивают систему вложенных дисков.

Очевидно, что если все окружности Зейферта плоской диаграммы образуют гнездо, то эта диаграмма является заплетенной. Более того, в этом случае число нитей у косы совпадает с числом окружностей Зейферта.

Зафиксируем некоторую диаграмму D и рассмотрим ее тень. Тень делит сферу (одноточечную компактификацию плоскости) на двумерные клетки, называемые *гранями*. Внешняя грань содержит бесконечную точку.

Определение 2.12

Грань S называется *неупорядоченной*, если у нее есть два ребра a, b , принадлежащих разным окружностям Зейферта A_1, A_2 , которые индуцируют одну ориентацию на S , и *упорядоченной* в противном случае.

В первом случае скажем, что окружности Зейферта A_1, A_2 образуют неупорядоченную грань.

Применим движение Ω_2 ребрам A_1, A_2 , образующим неупорядоченную грань, как показано на рис. 14. В этом случае множество граней становится “более упорядоченным”.

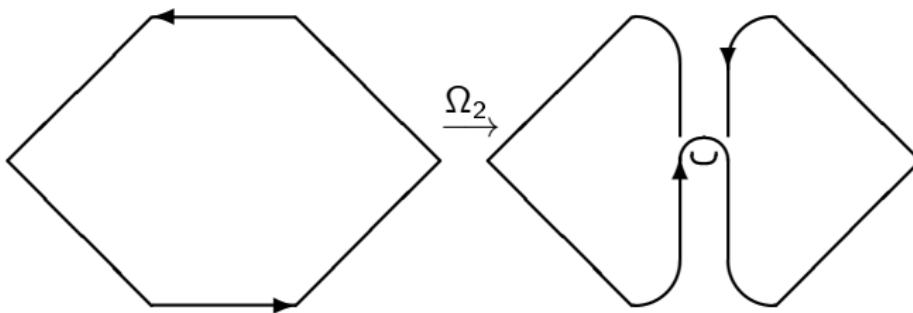


Рис. 14: Редукция неупорядоченной грани

Утверждение 2.13

Если все ребра грани Σ принадлежат двум окружностям Зейферта, то эта грань упорядочена.

Доказательство.

Действительно, рассмотрим ребра этой грани. Легко видеть, что все ребра, принадлежащие одной окружности Зейферта имеют одинаковую ориентацию.

Рассмотрим два соседних ребра, принадлежащих разным окружностям Зейферта. Тогда они имеют противоположные ориентации. Таким образом, любые два ребра грани, принадлежащие разным окружностям Зейферта, имеют разную ориентацию.

Следовательно, грань упорядочена.

Утверждение 2.14

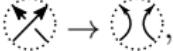
Если диаграмма D зацепления L не имеет неупорядоченных граней, что ее можно преобразовать в заплетенную диаграмму с помощью замены бесконечности.

Доказательство. Рассмотрим диаграмму D без неупорядоченных граней. Возьмем некоторую грань. Любые два соседних ребра этой грани либо имеют одну ориентацию (и значит, принадлежать одной окружности Зейферта), либо имеют противоположные ориентации (и принадлежат разным окружностям Зейферта). Если мы объединим соседние ребра, принадлежащие одной окружности Зейферта, в одно “длинное” ребро, то мы получим некоторый многоугольник M (или целую окружность Зейферта).

Доказательство (продолжение)

Ориентации ребер многоугольника M чередуются. Таким образом, число ребер многоугольника четно (или равно одному в случае окружности Зейферта). Так как грань упорядочена, то все ребра принадлежат не более, чем двум окружностям. Следовательно, каждая окружность Зейферта, образующая ребро многоугольника M смежна либо с одной, либо с двумя окружностями (лежащими по разные стороны от M). В противном случае имелась бы неупорядоченная грань примыкающая к трем различным окружностям Зейферта. Завершение доказательства предлагается слушателю в качестве простого упражнения.

Алгоритм Вожеля (продолжение)

Алгоритм Вожеля работает следующим образом. Сначала сгладим перекрестки по правилу:  \rightarrow  \rightarrow  Далее, используя движение Ω_2 , избавимся от неупорядоченных граней. Наконец, если окружности Зейферта не образуют гнездо, поменяем бесконечность. Опишем алгоритм более подробно.

Сначала сгладим все перекрестки диаграммы. Мы получим несколько окружностей Зейферта. Обозначим число этих окружностей через s . Некоторые пары окружностей могут образовывать неупорядоченные грани. Построим граф, вершинами которого являются окружности Зейферта; две вершины соединяются ребром, если существует неупорядоченная грань, которая инцидентна соответствующим двум окружностям. Удалим из графа вершину, соответствующую “внешней” окружности Зейферта. Обозначим полученный график через Γ_1 . Обозначим оставшуюся $s - 1$ окружность через A_1, A_2, \dots, A_{s-1} так, чтобы A_i образовывала неупорядоченную грань с одной из предыдущих окружностей. Такая нумерация найдется, если график Γ_1 связан. В несвязном случае применим данный алгоритм к каждой компоненте, в этом случае алгоритм будет работать еще быстрее.

Алгоритм Вожеля (продолжение)

Произведем следующую операцию. Рассмотрим неупорядоченную грань, образованную окружностями A_1 и A_2 , и применим движение Ω_2 , как показано выше. Вместо окружностей A_1 и A_2 мы получим две окружности Зейферта, одна из которых лежит в другой. Кроме того, они не образуют неупорядоченных граней, см. рис. 15.

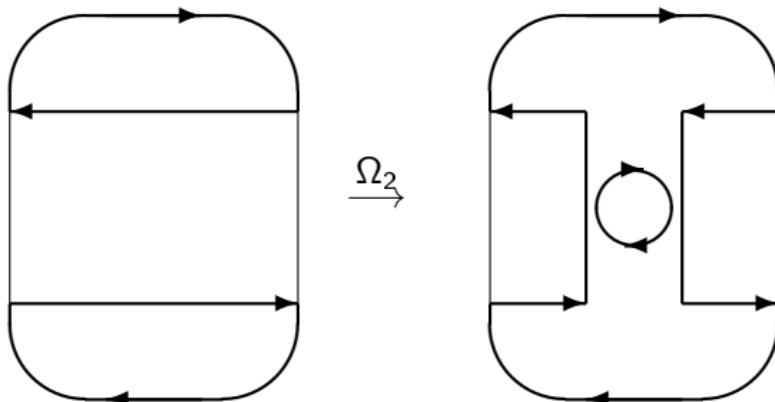


Рис. 15: Удаление неупорядоченной грани

Алгоритм Вожеля (продолжение)

Обозначим внешнюю окружность через A_1 и внутреннюю через A_2 .

Если “прежняя A_2 ” образовывала неупорядоченную грань с окружностью A_3 , то новая окружность A_1 также образуют неупорядоченную грань с A_3 (обозначение которой не меняется).

Применим движение Ω_2 к окружностям A_1 и A_3 и снова поменяем обозначения: внешнюю окружность обозначим через A_1 , а внутреннюю — через A_3 и т.д. Наконец, (после $s - 2$ операций Ω_2) мы получим одну внешнюю окружность A_1 , которая не будет порождать неупорядоченных граней. Теперь зафиксируем A_1 , и применим ту же процедуру к парам $(A_2, A_3), (A_2, A_4)$, и т.д. После этого сделаем то же для $A_3, A_i, i > 3$, и так далее. После применения $\frac{(s-1)(s-2)}{2}$ вторых движений Рейдемайстера и (возможно) изменения бесконечной точки мы получим множество окружностей

A_1, A_2, \dots, A_{s-1} , где каждая окружность лежит внутри предыдущей и никакие две окружности не образуют неупорядоченной грани.

Покажем, что оставшаяся окружность, которую мы “удалили” в самом начале, тоже не образует неупорядоченных граней.

Действительно, так как эта окружность содержит внешнюю грань, она может образовывать неупорядоченную грань только с A_1 , но такого быть не может. После этого, поменяем бесконечную точке (если необходимо). Таким образом, после C_{s-2}^2 операций (в связном случае; в несвязном операций еще меньше) мы получим заплетенную диаграмму.

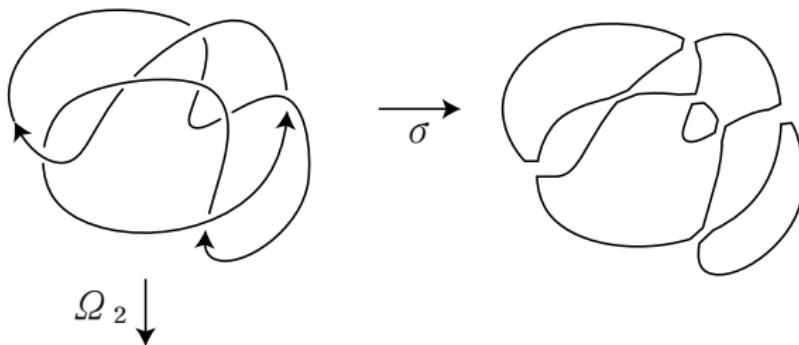
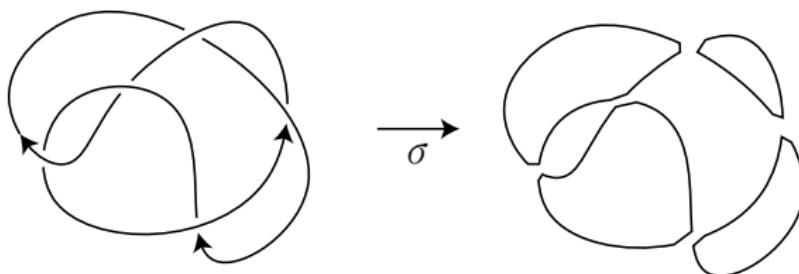
Итак, мы доказали следующую теорему.

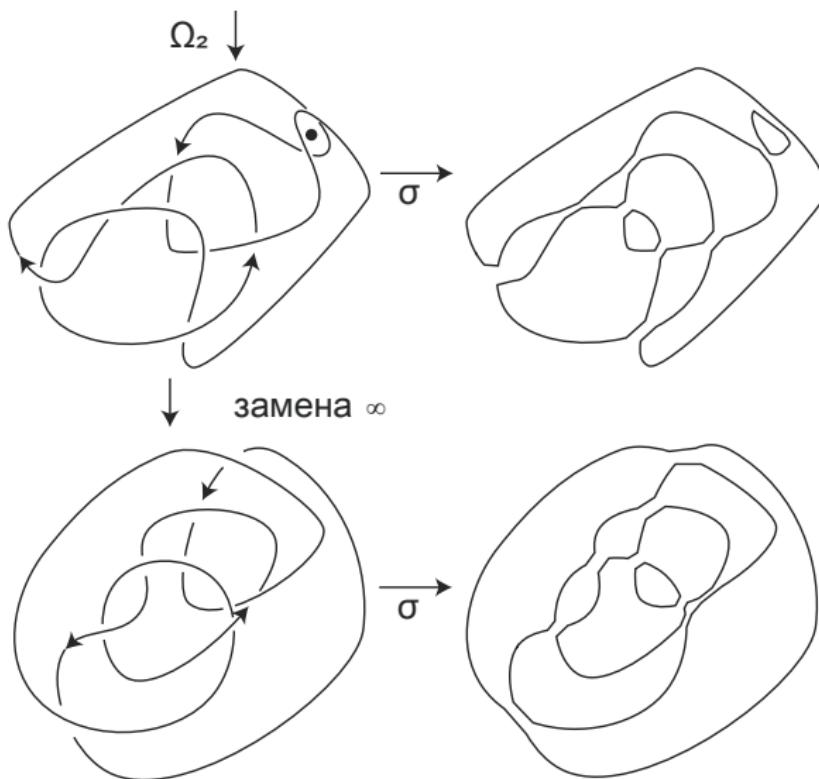
Теорема 2.15

Если диаграмма зацепления D имеет n перекрестков и s окружностей Зейферта, то

- 1 Алгоритм Вожеля требует не более C_{s-2}^2 вторых движений Рейдемайстера.
- 2 Число нитей в получающейся косе равно s , а число перекрестков не превосходит $n + (s - 1)(s - 2)$.

На следующих двух слайдах при применяем алгоритм Вожеля к узлу 5_2 .





Замечание 2.16

Есть еще один алгоритм, строящий косу по зацеплению, предложенный Л.Х. Кауфманом и С. Ламброполу в [KaLa].

Плетеное замыкание

Для кос $\beta \in Br(2n)$ существует другой способ получения зацепления, так называемое *плетеное замыкание*, см. рис. 16.

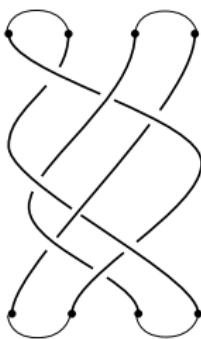


Рис. 16: Плетеное замыкание

В [Bir2] можно найти доказательство аналога теоремы Александера для плетеных замыканий.

Представление Бурау

Рассмотрим группу кос B_n ($\equiv Br(n)$) и попытаемся представить их матрицами $n \times n$. Точнее, сопоставим образующей σ ; блочно-диагональную матрицу с одним блоком 2×2 , расположенным в строках $(i, i + 1)$ и столбцах $(i, i + 1)$ и остальными блоками размера 1×1 с единицей, лежащими на диагонали. Очевидно, что будут коммутировать образы σ_i, σ_j , где $|i - j| \geq 2$. Если взять для всех σ_i один и тот же блок (2×2) (в разных положениях), то нужно лишь проверить соотношение $\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$ для матриц 3×3 . Так мы получим представление, где матричный блок имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученное таким образом представление называется *представлением Бурау* группы кос. Оно было предложено Бурау [Bura].

Замечание 3.1

Представления группы кос — очень интересная тема исследований в теории узлов. Например, имеется похожее на представление Бурау так называемое *редуцированное представление Бурау*. Известно, что полином Александера можно вычислять как матричный определитель матрицы [Bura]. А представление Темперли–Либа дает полином Джонса [Jo]. Далее мы также рассмотрим представление Крамера–Бигелоу.

С другой стороны, есть представления кос, зависящие от нескольких параметров, которые порождают инварианты узлов. Так, двухпараметрическое представление алгебры Ивахори–Гекке приводит к полиному HOMFLY-PT [Jo2].

Если рассматривать тензорное произведение вместо матричного, мы получим квантовые инварианты, удовлетворяющие так называемому *уравнению Янга–Бакстера*.

История определения точности представления Бурау

Точность данного представления являлась открытой проблемой на протяжении долгого времени. В [Bir1] Джоан Бирман доказала, что представление точное в случае трех нитей.

В [Moo91] Муди нашел первый пример элемента, лежащего в ядре представления, для $n = 10$.

На сегодняшний день проблема решена положительно для $n \leq 3$ и отрицательно для $n \geq 5$; см. [Big1]. Случай $n = 4$ остается открытым. В [Big2] Стивен Бигелоу показал, что данная проблема равносильна вопросу о том, различает ли полином Джонса тривиальный узел, т.е. Бигелоу доказал следующую теорему.

Теорема 3.2 ([Big2])

Полином Джонса от одной переменной различает тривиальный узел, если и только если представление Бурау точное для $n = 4$.

Упражнения |

- ❶ Покажите, что $PB(m)$ является нормальной подгруппой в $Br(m)$, и что факторгруппа $Br(m)/PB(m)$ изоморфна группе перестановок $S(m)$.
- ❷ Выпишите слово, соответствующее диаграмме косы на рис. 17.

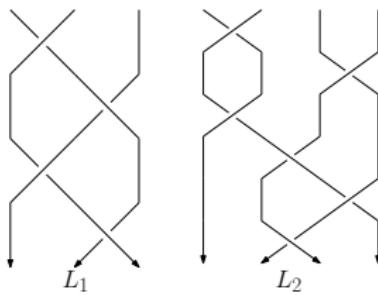


Рис. 17:

- ❸ Проверьте, что $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i^{-1} = \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ и $\sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i \sigma_{i+1} = \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i^{-1}$ можно получить из соотношений Артина.

Упражнения ||

- 4 Покажите, что два слова $\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}$ и $\sigma_1\sigma_3\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1$ задают одну косу и изотопные диаграммы кос.
- 5 (*) Найдите копредставление группы крашеных кос $PB(m)$.
- 6 Постройте косы для следующих зацеплений, используя “трюк Александера”:
 - правый и левый трилистник,
 - узел восьмерка,
 - кольца Борромео.
- 7 Постройте косы для следующих зацеплений, используя алгоритм Вожеля:
 - правый и левый трилистник,
 - узел восьмерка,
 - кольца Борромео.
- 8 Докажите, что представление Бурау инвариантно при втором и третьем движениях Рейдемайстера.
- 9 Найдите представление Бурау для следующих кос:

Упражнения III

- σ_1^3
- $\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}$
- $\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}$

Исследовательская задача: Δ -группы и Брунновы косы

Рассмотрим группу крашеных кос $PB(X, m) = \pi_1(F(X, m))$ для некоторого топологического пространства, определенную на с. 6.

Для каждого $i \in \{1, \dots, m\}$ существуют гомоморфизмы групп $d_i : PB(X, m) \rightarrow PB(X, m - 1)$, где $d_i(\beta)$ получается из $\beta \in PB(m)$ удалением i -й нити, см., например, рис. 18.

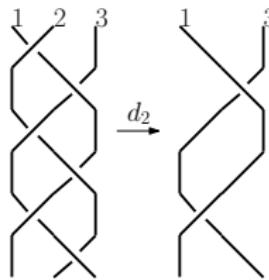


Рис. 18: Крашеная коса в \mathbb{R}^2 и удаление второй нити

Известно, что $F(X)^{\pi_1} = (PB(X, m), \{d_i\}_{i=1, \dots, m})$ являются Δ -группами. Элементы в

$Br_{unn}(X, m) = \cap_{i=1}^m \ker(d_i : PB(X, m) \rightarrow PB(X, m - 1))$ называются **Брунновыми косами**.

В [BCWW] A. J. Berrick, F. R. Cohen, Y. L. Wong и J. Wu показали, что гомотопические группы сферы S^2 можно вычислить с помощью $F(S^2)^{\pi_1}$ и $\{Brunn(S^2, m)\}_{m=1}^{\infty}$, другими словами, Брунновы косы могут выявить топологические свойства пространства, на котором эти косы определены. Упомянутое выше утверждение можно доказать с помощью цепных комплексов, так называемых комплексов Мура, которые можно связать не только с $F(S^2)^{\pi_1}$ и $\{Brunn(S^2, m)\}_{m=1}^{\infty}$, но и с $F(X)^{\pi_1}$ и $\{Brunn(S^2, m)\}_{m=1}^{\infty}$ для произвольного топологического пространства X . Тогда возникает следующий естественный вопрос:

Вопрос Каким образом можно изучать топологические пространства X с помощью $F(X)^{\pi_1}$ и $Brunn(X, m)$?

С другой стороны, изучение Брунновых кос само по себе является интересной задачей. В работе [3] Брунновы косы изучаются при помощи групп G_n^k , в частности, групп G_n^2 и G_n^3 , которые соответствуют конфигурационным пространствам с хорошим свойством коразмерности 1. Одна из лекций будет посвящена этим группам.

Вопрос Каким образом можно изучать топологические пространства X с помощью групп G_n^k ?

Литература |

-  V. O. Manturov Knot theory: Second edition CRC press 560 April 4, 2018.
-  K. Murasugi, Knot Theory and Its Applications, Springer.
-  Alexander, J. W. (1923), A lemma on systems of knotted curves, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **19**, pp. 93–95.
-  Artin, E. (1925), Theorie der Zöpfe. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **4**, pp. 27–72.
-  Bigelow, S. (2001), Braid groups are linear *J. Amer. Math. Soc.*, **14**, pp. 471–486.
-  Bigelow, S. (2002), Does the Jones polynomial detect the unknot, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **11**, pp. 493–505.
-  Birman, J.S. (1974), *Braids, links and mapping class groups*, Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1974 (Ann. Math. Stud., 1982).

Литература II

-  Birman, J.S. *On the stable equivalence of plat representation of knots and links*, Can. J. Math., Vol. XXVIII, No.2, 1976, pp. 264-290.
-  J. S. Birman and W. Menasco, Studying links via closed braids IV: Composite links and split links, Invent. Math. 102 (1990), 115–139. MR1069243 (92g:57010a)
-  Gaifullin, A.A. and Manturov V.O. (2002), On the recognition of Braids, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **11** (8), pp. 1193–1209.
-  A. J. Berrick, F. R. Cohen, Y. L. Wong, J. Wu, *Configurations, Braids, and homotopy groups* Journal of the American Mathematical society, Volume 19, Number 2, Pages 265–326
-  L. H. Kauffman, S. Lambropoulou, *Virtual Braids*, arXiv:math/0407349.

Литература III

-  Burau, W. (1936), Über Zopfgruppen und gleichzeitig verdrillte Verkettungen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **11**, pp. 179–186.
-  V. F. R. Jones. A polynomial invariant for links via von Neumann algebras. *Bulletin of the Amer. Math. Soc.*, 129:103–112, 1985.
-  V. F. R. Jones. Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials. *Ann. of Math.* (2), 126(2):335–388, 1987
-  S. Kim, V.O. Manturov, *On groups G_n^k braids and Brunnian braids*, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 2016, vol.25, No.13, 1650078, 17 pages.
-  Moody, J.A.(1991), The Burau representation of the braid group B_n is unfaithful for large n , *Bull. Amer. Math. Soc.*, **25**, pp. 379–284.