

Лекция 8. Представление Бурау и теорема Александера

Содержание

- 1 Представление Бурау
 - Точность представления Бурау при $n = 3$
- 2 Замыкания кос и теорема Александера
 - Замыкания кос
 - Теорема Александера
 - Алгоритм Вожеля
- 3 Упражнения
- 4 Исследовательские задачи

Содержание

- 1 Представление Бурау
 - Точность представления Бурау при $n = 3$
- 2 Замыкания кос и теорема Александера
 - Замыкания кос
 - Теорема Александера
 - Алгоритм Вожеля
- 3 Упражнения
- 4 Исследовательские задачи

Представление Бурау

Рассмотрим группу кос $B_n (\equiv Br(n))$ и попытаемся представить их матрицами $n \times n$. Точнее, сопоставим образующей σ_i блочно-диагональную матрицу с одним блоком 2×2 , расположенным в строках $(i, i+1)$ и столбцах $(i, i+1)$ и остальными блоками (1×1) с единицей, лежащими на диагонали. Очевидно, что будут коммутировать образы σ_i, σ_j , где $|i-j| \geq 2$. Если взять для всех σ_i один и тот же блок (2×2) (в разных положениях), то нужно лишь проверить соотношение $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$ для матриц 3×3 . Так мы получим представление, где матричный блок имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Это представление называется *представлением Бурау* группы кос. Оно было предложено Бурау [Bura].

Содержание

- 1 Представление Бурау
 - Точность представления Бурау при $n = 3$
- 2 Замыкания кос и теорема Александера
 - Замыкания кос
 - Теорема Александера
 - Алгоритм Вожеля
- 3 Упражнения
- 4 Исследовательские задачи

Замечание 1.1

Представления группы кос — очень интересная тема исследований в теории узлов. Например, имеется похожее на представление Бурау так называемое *редуцированное представление Бурау*. Известно, что полином Александера можно вычислять как матричный определитель матрицы $[Bura]$. А представление Темперли–Либа дает полином Джонса $[Jo]$. Далее мы также рассмотрим представление Крамера–Бигелоу.

С другой стороны, есть представления кос, зависящие от нескольких параметров, которые порождают инварианты узлов. Так, двухпараметрическое представление алгебры Ивахори–Гекке приводит к полиному HOMFLY-PT $[Jo2]$.

Если рассматривать тензорное произведение вместо матричного, мы получим квантовые инварианты, удовлетворяющие так называемому *уравнению Янга–Бакстера*.

История определения точности представления Бурау

Точность данного представления являлась открытой проблемой на протяжении долгого времени. В [Bir1] Джоан Бирман доказала, что представление точное в случае трех нитей.

В [Moo91] Муди нашел первый пример элемента, лежащего в ядре представления, для $n = 10$.

На сегодняшний день проблема решена положительно для $n \leq 3$ и отрицательно для $n \geq 5$; см. [Big1]. Случай $n = 4$ остается открытым. В [Big2] Стивен Бигелу показал, что данная проблема равносильна вопросу о том, различает ли полином Джонса тривиальный узел, т.е. Бигелу доказал следующую теорему.

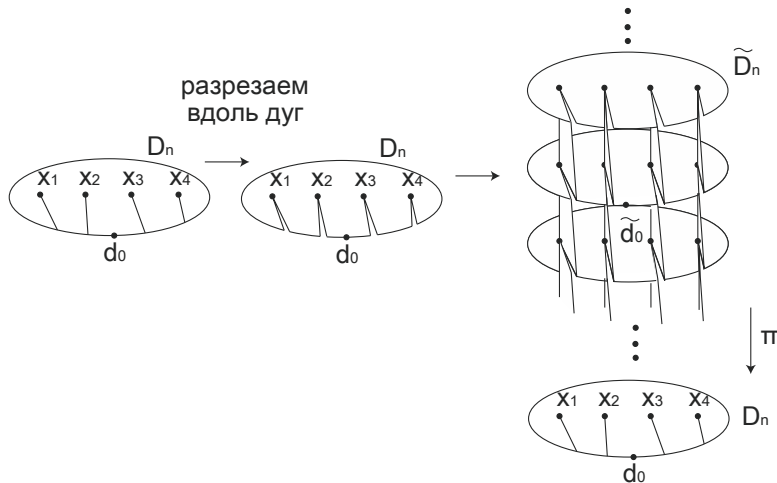
Теорема 1.2 ([Big2])

Полином Джонса от одной переменной различает тривиальный узел тогда и только тогда, когда представление Бурау точное для $n = 4$.

Точность представления Бурату для случая $n = 3$

Сначала рассмотрим следующее описание группы кос и представления Бурату. Обозначим через D_n единичный комплексный диск D с n проколами x_1, \dots, x_n на вещественной оси. Множество всех автоморфизмов D_n , рассматриваемое с точностью до изотопии, и есть группа кос B_n . В качестве базовой точки d_0 выберем $-i$. Тогда представление Бурату описывается так. Группа $\pi_1(D_n)$ — это свободная группа с n образующими. Для каждой петли $\gamma \in \pi_1(D_n)$ можно рассмотреть число оборотов против часовой стрелки, что эквивалентно числу образующих в слове, представляющем γ . Таким образом, имеется гомоморфизм $h : \pi_1(D_n) \rightarrow \mathbb{Z}$. Тогда можно построить накрытие $\pi : \tilde{D}_n \rightarrow D_n$ с действием \mathbb{Z} на D_n . На следующем слайде приведена конструкция накрытия $\pi : \tilde{D}_n \rightarrow D_n$, см. рис. 1.

В группе \mathbb{Z} есть образующая q . Рассмотрим группу $H_1(\tilde{D}_n)$. Согласно вышесказанному, эта группа имеет структуру модуля над $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$. Пусть \tilde{d}_0 — прообраз d_0 при проекции π .

Конструкция накрытия $\pi : \tilde{D}_n \rightarrow D_n$ Рис. 1: Конструкция накрытия $\pi : \tilde{D}_n \rightarrow D_n$

Представление Бурау возникает из гомоморфизмов из $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ в себя. Точнее, пусть $\bar{\beta}$ — гомеоморфизм на D_n , представляющий косу $\beta \in B_n$. Индуцированное действие $\bar{\beta}$ на $\pi_1(D_n)$ удовлетворяет равенству $h \circ \bar{\beta} = h$. Таким образом, есть единственное поднятие $\hat{\beta}$ элемента $\bar{\beta}$, для которого коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{D}_n, \tilde{d}_0) & \xrightarrow{\hat{\beta}} & (\tilde{D}_n, \tilde{d}_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (D_n, d_0) & \xrightarrow{\bar{\beta}} & (D_n, d_0). \end{array}$$

Более того, $\hat{\beta}$ коммутирует с действием q . Таким образом, $\hat{\beta}$ индуцирует $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ -модульный гомоморфизму, который мы обозначим через $\hat{\beta}_*$. Тогда мы определяем представление Бурау формулой

$$\text{Bourau}(\beta) = \hat{\beta}_*.$$

Несложно проверить, что данное определение представления Бурау совпадает с определением с помощью матриц $n \times n$. Подробности см. в [Ma].

Теперь докажем, что это представление является точным в случае трех нитей. Для этого воспользуемся обозначениями из [Big2].

Определение 1.3

Вилка — это вложенное в D дерево F с вершинами d_0, x_i, x_j, z , такое что:

- 1 F не содержит отмеченных точек, за исключением $x_i, x_j \in \text{int}(D)$;
- 2 F пересекается с ∂D_n только в d_0 ;
- 3 все три ребра F инцидентны z .

Определение 1.4

Ребро F , содержащее d_0 , называется *ручкой* вилки F . Объединение других двух ребер называется *зубцом* вилки F и обозначается через $T(F)$. Ориентируем $T(F)$ таким образом, чтобы ручка вилки F подходила к зубцу $T(F)$ справа.

Определение 1.5

Стеблем называется ориентированное ребро N в D_n , такое что

- 1 стебель N ориентирован d_0 к другой точке на ∂D_n ;
- 2 N пересекает ∂D_n только в конечных точках;
- 3 одна из связных компонент $D_n \setminus N$ содержит ровно одну отмеченную точку.

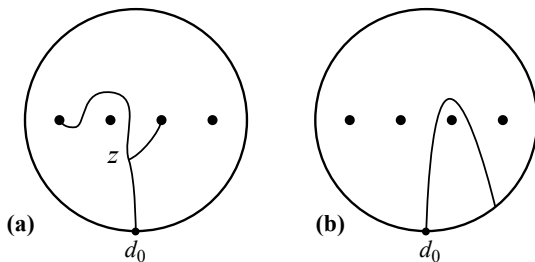


Рис. 2: (а) Вилка;

(б) Стебель.

Пусть F и N — вилка и стебель соответственно. Определим спаривание $\langle N, F \rangle$ в $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ так. Без ограничения общности предположим, что $T(F)$ трансверсально пересекает N . Пусть z_1, \dots, z_k — точки пересечения $T(F)$ и N . Для каждого $i = 1, \dots, k$, обозначим через γ_i дугу в D_n , которая идет от d_0 к z_i по вилке F и возвращается к d_0 по стеблю N . Пусть a_i — целое число, такое что $h(\gamma_i) = a_i$. Пусть ϵ_i — знак пересечения между N и F в точке z_i . Положим

$$\langle N, F \rangle = \sum_{i=1}^k \epsilon_i q^{a_i}. \quad (1)$$

Легко убедиться, что данное спаривание не меняется при изотопии вилки и стебля. Кроме того, этот факт вытекает из основной леммы 1.6 на следующем слайде.

Доказательство точности опирается на две леммы.

Лемма 1.6 (Основная лемма)

Пусть коса $\beta : D_n \rightarrow D_n$ лежит в ядре представления Бурау. Тогда $\langle N, F \rangle = \langle N, \beta(F) \rangle$ для любого стебля N и вилки F .

Лемма 1.7 (Ключевая лемма)

В случае $n = 3$ равенство $\langle N, F \rangle = 0$ выполнено тогда и только тогда, когда зубец $T(F)$ изотопен дуге, не пересекающейся с N .

Доказательство лемм приведены в Главе 9.4 монографии [Man].

Доказательство точности представления Бурау в случае $n = 3$

Теперь выведем точность представления Бурау в случае трех нитей из этих двух лемм. Пусть коса β лежит в ядре представления Бурау. Покажем, что β — тривиальная коса.

Рассмотрим стебель N , представляющий собой вертикальный отрезок в D_n , такой что отмеченные точки x_1 и x_2 лежат слева от N , а точка x_3 — справа от N . Пусть F — вилка, зубец которой $T(F)$ — это отрезок с концами x_1 и x_2 , не пересекающий N , см. рис. 3. Тогда $\langle N, F \rangle = 0$. Согласно основной лемме, $\langle N, \beta(F) \rangle = 0$.

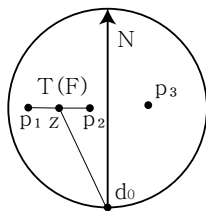


Рис. 3: Вилка и стебель в случае трех отмеченных точек

Доказательство (продолжение)

Согласно ключевой лемме 1.7, кривая $\beta(T(F))$ изотопна дуге, не пересекающей N . Применяя изотопию к β , можно считать, что $\beta(T(F)) = T(F)$.

Аналогично можно показать, что каждое из трех ребер, соединяющих x_1, x_2, x_3 , неподвижно под действием β . Тогда коса β нетривиальна, только если она представляет собой некоторое количество полных оборотов D , но легко проверить, что это не так. Таким образом, представление Бурзу является точным в случае трех нитей.

Содержание

- 1 Представление Бурау
 - Точность представления Бурау при $n = 3$
- 2 Замыкания кос и теорема Александера
 - Замыкания кос
 - Теорема Александера
 - Алгоритм Вожеля
- 3 Упражнения
- 4 Исследовательские задачи

Содержание

- 1 Представление Бурау
 - Точность представления Бурау при $n = 3$
- 2 Замыкания кос и теорема Александера
 - Замыкания кос
 - Теорема Александера
 - Алгоритм Вожеля
- 3 Упражнения
- 4 Исследовательские задачи

Замыкания кос

Определение 2.1

Замыканием косы b называется зацепление $Cl(b)$, которое получается из b соединением нижних концов косы с верхними, как показано на рис. 4.

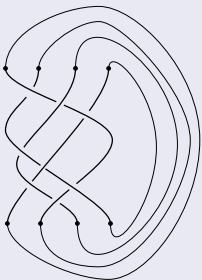


Рис. 4: Замыкание косы

Очевидно, что изотопные косы порождают изотопные зацепления.

Замечание 2.2

Замыкания кос имеют естественную ориентацию: все нити косы ориентируются сверху вниз.

Некоторые косы порождают узлы, а некоторые — зацепления. Чтобы найти число компонент в соответствующем зацеплении, нужно воспользоваться следующим простым наблюдением. Есть естественный эпиморфизм группы кос на группу перестановок $\Sigma: Br(n) \rightarrow S_n$, заданное правилом $\sigma_i \rightarrow s_i$, где s_i — транспозиция $(i \ i + 1)$ в группе перестановок.

Рассмотрим косу B . Очевидно, что для чисел p , принадлежащих одной орбите под действием элемента $\Sigma(B)$ на множестве $\{1, \dots, n\}$, верхние точки косы с координатами $(p, 0)$ принадлежат одной компоненте зацепления.

Следовательно, мы получаем такое утверждение.

Утверждение 2.3

Число компонент в замыкании косы $Cl(B)$ равно числу орбит действия элемента $\Sigma(B)$.

Ясно, что не изотопные косы могут порождать изотопные зацепления. Мы вернемся в этому вопросу позже.

Интересным вопросом является определение минимального числа нитей косы, замыканием которой является данное зацепление L . Обозначим это число через $Braid(L)$.

Интересная теорема на этот счет принадлежит Дж. Бирман и У. Менаско.

Теорема 2.4

Для любых узлов K_1 и K_2 справедливо равенство

$$Braid(K_1 \# K_2) = Braid(K_1) + Braid(K_2) - 1.$$

На рис. 5 мы показываем, что если узел K_1 можно представить как замыкание косы из n нитей, а узел K_2 — как замыкание косы из m нитей, то $K_1 \# K_2$ является замыканием косы из $(n + m - 1)$. Это доказывает неравенство “ \leq ”.

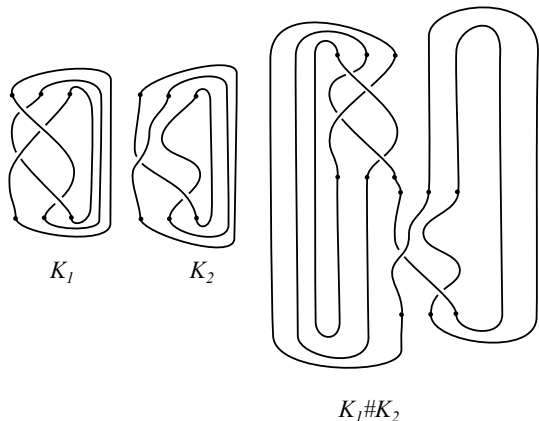


Рис. 5: Представление связной суммы с помощью кос

Доказательство обратного неравенства “ \geq ” можно найти в [BM].

Теорема Александера

Теорема 2.5 (теорема Александера [Ale2])

Каждое зацепление является замыканием некоторой косы.

Мы дадим два доказательства этой теоремы: оригинальное доказательство Александера и доказательство Вожеля, которое дает быстрый алгоритм построения соответствующей косы.

Определение 2.6

Полигональное зацепление — это зацепление, составленное из отрезков, как на рис. 6.

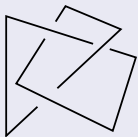


Рис. 6: Полигональное зацепление

Доказательство Александера

Мы докажем теорему для полигональных зацеплений.

Рассмотрим диаграмму L ориентированного полигонального зацепления и точку O в плоскости P диаграммы (но вне диаграммы L). Скажем, что L *заплетается вокруг* O если любое ребро L ориентировано против часовой стрелки, если смотреть от точки O .

Определение 2.7

Для заданных L и O , будем называть ребра, ориентированные против часовой стрелки, *положительными*; остальные ребра будут *отрицательными*.

Доказательство Александера (продолжение)

Если существует точка O , вокруг которой заплетается диаграмма зацепления, то утверждение теоремы Александера становится вполне очевидным: просто разрежем диаграмму вдоль луча, выходящего из O и “выпрямим диаграмму”, см. рис. 7.

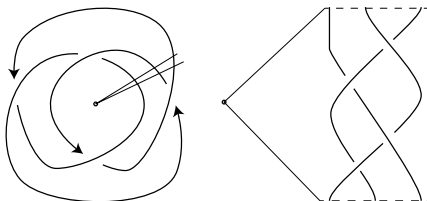


Рис. 7: Построение косы из заплетенной диаграммы

Таким образом, чтобы доказать теорему в общем случае, достаточно перестроить заданную произвольную диаграмму зацепления в диаграмму, заплетаящуюся вокруг некоторой точки O .

Доказательство Александера: трюк Александера

Сначала зафиксируем точку O . Далее применим следующий *трюк Александера*. Возьмем некоторое отрицательное ребра AB нашего полигонального зацепления и выберем точку C на плоскости проекции P так, чтобы треугольник ABC содержал O . Заменяем AB на ребра AC и CB . Оба ребра, очевидно, будут положительны, см. рис. 8.

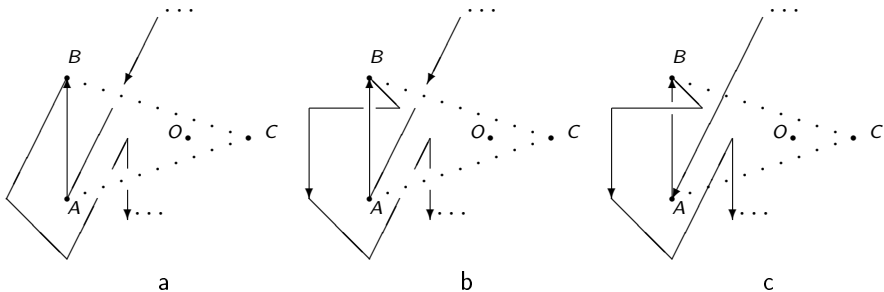


Рис. 8: Трюк Александера

Доказательство Александера : трюк Александера

Мы будем повторять эту операцию, пока диаграммы не станут заплетаться вокруг O , что завершит доказательство.

Опишем эту конструкцию более подробно. В случае, когда отрицательное ребро AB не содержит перекрестков, трюк Александера реализуется напрямую, см. рис. 8.а. Действительно, разобьем ребро AB на два ребра и протащим их над O , см. рис. 9.

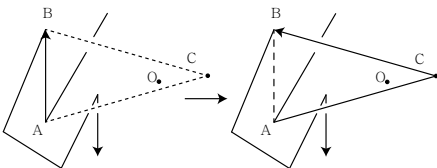


Рис. 9: Случай 8.а.

Доказательство Александера : трюк Александера (продолжение)

То же самое можно сделать, когда AB содержит один переход через другое ребро; см. рис. 8.b.

Наконец, содержит AB один проход под другим ребром, мы можем протащить новые ребра под диаграммой, см. рис. 8.c.

Замечание 2.8

Описанное выше доказательство теоремы Александера содержит конкретный алгоритм построения косы из зацепления. Однако этот алгоритм очень медленный. Ниже мы изложим более быстрый алгоритм для построения косы по зацеплению.

Алгоритм Вожеля

Мы опишем алгоритм, предложенный Пьером Вожелем [Vog1].
Начнем с определения.

Определение 2.9

Ориентированная коса является *заплетенной*, если существует точка, вокруг которой заплетается данная диаграмма.

Заплетенную диаграмму легко представить в виде замыкания косы.

Замечание 2.10

Очевидно, что свойство заплетенности диаграммы не зависит от структуры перекрестков. Можно сказать, что мы будем работать только с тенями зацеплений. В дальнейшем мы не будем использовать информацию о проходах и переходах перекрестков.

Пусть дана диаграмма D ориентированного зацепления L .
 Определим операцию *сглаживания перекрестков*, просто “сглаживая”
 каждый перекресток согласно ориентации, как на рис. 10.
 Результатом операции является набор окружностей Зейфerta.
 Обозначим это сглаживание через σ .

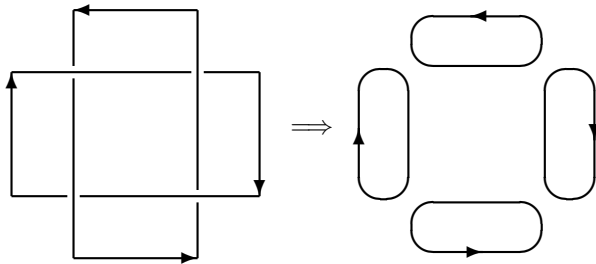


Рис. 10: Сглаживания перекрестков и окружности Зейфerta

Определение 2.11

Скажем, что все окружности Зейфerta плоской диаграммы образуют *гнезда*, если они индуцируют одну и ту же ориентацию на плоскости и ограничивают систему вложенных дисков.

Очевидно, что если все окружности Зейферта плоской диаграммы образуют гнездо, то эта диаграмма является заплетенной. Более того, в этом случае число нитей у косы совпадает с числом окружностей Зейферта.

Зафиксируем некоторую диаграмму D и рассмотрим ее тень. Тень делит сферу (одноточечную компактификацию плоскости) на двумерные клетки, называемые *гранями*. *Внешняя* грань содержит бесконечную точку.

Определение 2.12

Грань S называется *неупорядоченной*, если у нее есть два ребра a, b , принадлежащих разным окружностям Зейферта A_1, A_2 , которые индуцируют одну ориентацию на S , и *упорядоченной* в противном случае.

В первом случае скажем, что окружности Зейферта A_1, A_2 образуют неупорядоченную грань.

Применим движение Ω_2 ребрам A_1, A_2 , образующим неупорядоченную грань, как показано на рис. 11. В этом случае множество граней становится “более упорядоченным”.

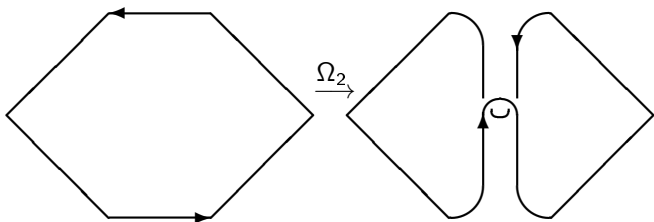


Рис. 11: Редукция неупорядоченной грани

Утверждение 2.13

Если все ребра грани Σ принадлежат двум окружностям Зейферта, то эта грань упорядочена.

Доказательство.

Действительно, рассмотрим ребра этой грани. Легко видеть, что все ребра, принадлежащие одной окружности Зейферта имеют одинаковую ориентацию.

Рассмотрим два соседних ребра, принадлежащих разным окружностям Зейферта. Тогда они имеют противоположные ориентации. Таким образом, любые два ребра грани, принадлежащие разным окружностям Зейферта, имеют разную ориентацию. Следовательно, грань упорядочена.

Утверждение 2.14





Если диаграмма D зацепления L не имеет неупорядоченных граней, что ее можно преобразовать в заплетенную диаграмму с помощью замены бесконечности.

Доказательство. Рассмотрим диаграмму D без неупорядоченных граней. Возьмем некоторую грань. Любые два соседних ребра этой грани либо имеют одну ориентацию (и значит, принадлежать одной окружности Зейферта), либо имеют противоположные ориентации (и принадлежат разным окружностям Зейферта). Если мы объединим соседние ребра, принадлежащие одной окружности Зейферта, в одно “длинное” ребро, то мы получим некоторый многоугольник M (или целую окружность Зейферта).

Доказательство (продолжение)

Ориентации ребер многоугольника M чередуются. Таким образом, число ребер многоугольника четно (или равно одному в случае окружности Зейферта). Так как грань упорядочена, то все ребра принадлежат не более, чем двум окружностям. Следовательно, каждая окружность Зейферта, образующая ребро многоугольника M смежна либо с одной, либо с двумя окружностями (лежащими по разные стороны от M). В противном случае имелась бы неупорядоченная грань примыкающая к трем различным окружностям Зейферта. Завершение доказательства предлагается слушателю в качестве простого упражнения.

Алгоритм Вожеля (продолжение)

Алгоритм Вожеля работает следующим образом. Сначала сгладим перекрестки по правилу:  \rightarrow ,  \rightarrow . Далее, используя движение Ω_2 , избавимся от неупорядоченных граней. Наконец, если окружности Зейферта не образуют гнездо, поменяем бесконечность. Опишем алгоритм более подробно.

Сначала сгладим все перекрестки диаграммы. Мы получим несколько окружностей Зейферта. Обозначим число этих окружностей через s . Некоторые пары окружностей могут образовывать неупорядоченные грани. Построим граф, вершинами которого являются окружности Зейферта; две вершины соединяются ребром, если существует неупорядоченная грань, которая инцидентна соответствующим двум окружностям. Удалим из графа вершину, соответствующую “внешней” окружности Зейферта. Обозначим полученный граф через Γ_1 . Обозначим оставшуюся $s - 1$ окружность через A_1, A_2, \dots, A_{s-1} так, чтобы A_i образовывала неупорядоченную грань с одной из предыдущих окружностей. Такая нумерация найдется, если граф Γ_1 связан. В несвязном случае применим данный алгоритм к каждой компоненте, в этом случае алгоритм будет работать еще быстрее.

Алгоритм Вожеля (продолжение)

Произведем следующую операцию. Рассмотрим неупорядоченную грань, образованную окружностями A_1 и A_2 , и применим движение Ω_2 , как показано выше. Вместо окружностей A_1 и A_2 мы получим две окружности Зейферта, одна из которой лежит в другой. Кроме того, они не образуют неупорядоченных граней, см. рис. 12.

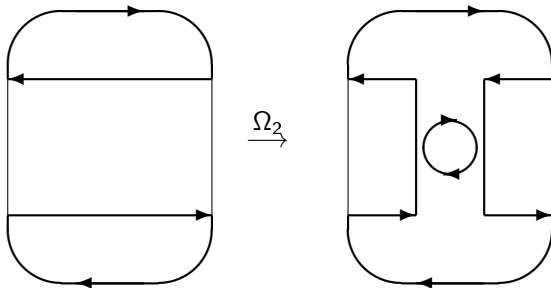


Рис. 12: Удаление неупорядоченной грани

Алгоритм Вожеля (продолжение)

Обозначим внешнюю окружность через A_1 и внутреннюю через A_2 . Если “прежняя A_2 ” образовывала неупорядоченную грань с окружностью A_3 , то новая окружность A_1 также образуют неупорядоченную грань с A_3 (обозначение которой не меняется). Применим движение Ω_2 к окружностям A_1 и A_3 и снова поменяем обозначения: внешняя окружность обозначим через A_1 , а внутреннюю — через A_3 и т.д. Наконец, (после $s - 2$ операций Ω_2) мы получим одну внешнюю окружность A_1 , которая не будет порождать неупорядоченных граней. Теперь зафиксируем A_1 , и применим ту же процедуру к парам (A_2, A_3) , (A_2, A_4) , и т.д. После этого сделаем то же для $A_3, A_i, i > 3$, и так далее. После применения $\frac{(s-1)(s-2)}{2}$ вторых движений Рейдемейстера и (возможно) изменения бесконечной точки мы получим множество окружностей A_1, A_2, \dots, A_{s-1} , где каждая окружность лежит внутри предыдущей и никакие две окружности не образуют неупорядоченной грани. Покажем, что оставшаяся окружность, которую мы “удалили” в самом начале, тоже не образует неупорядоченных граней.

Действительно, так как эта окружность содержит внешнюю грань, она может образовывать неупорядоченную грань только с A_1 , но такого быть не может. После этого, поменяем бесконечную точку (если необходимо). Таким образом, после C_{s-2}^2 операций (в связном случае; в несвязном операций еще меньше) мы получим заплетенную диаграмму.

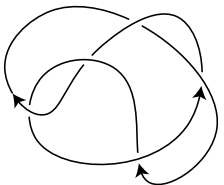
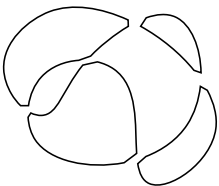
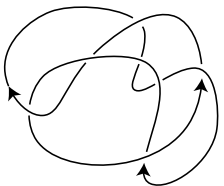
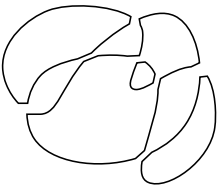
Итак, мы доказали следующую теорему.

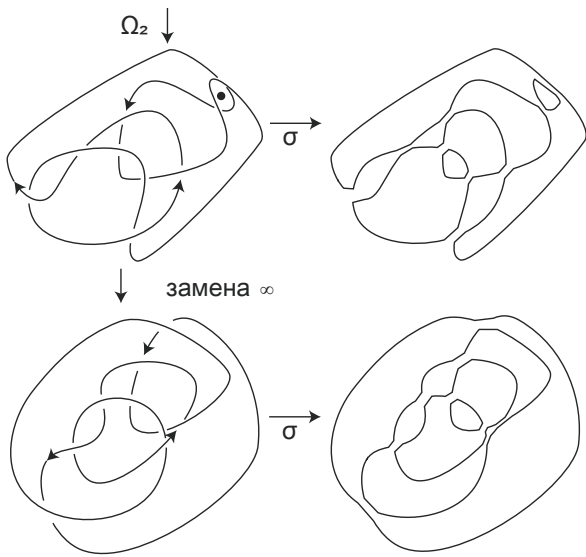
Теорема 2.15

Если диаграмма зацепления D имеет n перекрестков и s окружностей Зейферта, то

- 1 *Алгоритм Вожеля требует не более C_{s-2}^2 вторых движений Рейдемейстера.*
- 2 *Число нитей в получающейся косе равно s , а число перекрестков не превосходит $n + (s - 1)(s - 2)$.*

На следующих двух слайдах при применяем алгоритм Вожеля к узлу 5_2 .

 σ  $\Omega_2 \downarrow$  σ  $\Omega_2 \downarrow$



Замечание 2.16

Есть еще один алгоритм, строящий косу по зацеплению, предложенный Л.Х. Кауфманом и С. Ламброполу в [KaLa].

Плетеное замыкание

Для кос $\beta \in Br(2n)$ существует другой способ получения зацепления, так называемое *плетеное замыкание*, см. рис. 13.

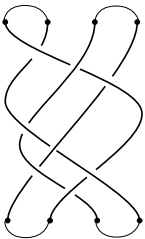


Рис. 13: Плетеное замыкание

В [Bir2] можно найти доказательство аналога теоремы Александера для плетеных замыканий.

Упражнения

- 1 Докажите, что представление Бурау инвариантно при втором и третьем движениях Рейдемейстера.
- 2 Найдите представление Бурау для следующих кос:
 - σ_1^3
 - $\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}$
 - $\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}$
- 3 Постройте косы для следующих зацеплений, используя “трюк Александера”:
 - правый и левый трилистник,
 - узел восьмерка,
 - кольца Борромео.

Упражнения

- 1 Постройте косы для следующих зацеплений, используя алгоритм Вожеля:
 - правый и левый трилистник,
 - узел восьмерка,
 - кольца Борромео.

Исследовательская задача: представление группы $Br(n)$

В лекции 7 мы рассматривали действие Гурвица, которое можно определять с помощью диаграмм кос и “прошивания” диаграмм кос. Аналогично представление Бурау можно представить следующим образом: Рассмотрим модуль V_n , с образующими $\{v_1, \dots, v_n\}$ над $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$. Легко видеть, что V_n изоморфно $\bigoplus_n \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ по формуле $v \mapsto (x_1, \dots, x_n)$, где $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$. Теперь для каждой образующей σ_i определим гомоморфизм ϕ_{σ_i} из $\bigoplus_n \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ в себя по формуле

$$(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, (1-t)x_i + tx_{i+1}, x_i, \dots, x_n),$$

см рис. 14.

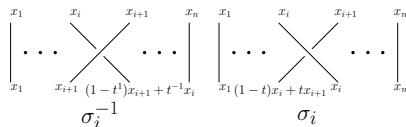


Рис. 14: Образующие $Br(n)$ и соответствующее отображение из $\bigoplus_n \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ в себя

Исследовательская задача: представление группы $Br(n)$ (продолжение)

Легко проверить, что ϕ_{σ_i} является изоморфизмом модулей, так что ϕ_{σ_i} соответствует матрице $n \times n$ над $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$

$$\phi_{\sigma_i} \mapsto \begin{pmatrix} I & & & \\ & 1-t & t & \\ & 1 & 0 & \\ & & & I \end{pmatrix}.$$

Можно заметить, что она совпадает с представлением Бурау, определенным в начале лекции.

Замечание 4.1

Заметим, что правило, приведенное на рис. 14, совпадает с правилом раскраски квандла Александера $(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}], \circ)$.

Представление Бурау, получается из кос, однако дает *инвариант узлов*. (Мы получаем узлы и зацепления как замыкания кос).

Исследовательская задача: представление группы $Br(n)$ (продолжение)

Есть несколько способов построить представления группы $Br(n)$.







В [CYZ] авторы изучали представление кос, построенное с помощью триангуляций дополнения к узлу. Оно тесно связано с гранично-параболическим представлением $SL(2, \mathbb{C})$ и проблемой объемов гиперболических узлов.

В главах 15.6 и 15.7 монографии [FKMN] найдено несколько представлений группы крашенных кос, построенных в конфигурационных пространствах дисков и триангуляций.






Проблема

Построить представления группы $Br(n)$, используя диаграммы, конфигурационные пространства и т.д., которые бы давали *инварианты узлов*.







References I

-  V. O. Manturov, Knot theory: Second edition CRC press 560 April 4, 2018.
-  K. Murasugi, Knot Theory and Its Applications, Springer.
-  D.A. Fedoseev, S. Kim, V.O. Manturov, I.M. Nikonov, *Invariants and pictures*, World Scientific Publishing Co., 2020.
-  Alexander, J. W. (1923), A lemma on systems of knotted curves, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **19**, pp. 93–95.
-  Bigelow, S. (2001), Braid groups are linear *J. Amer. Math. Soc.*, **14**, pp. 471–486.
-  Bigelow, S. (2002), Does the Jones polynomial detect the unknot, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **11**, pp. 493–505.

References II

-  Birman, J.S. (1974), *Braids, links and mapping class groups*, Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1974 (Ann. Math. Stud., 1982).
-  Birman, J.S. *On the stable equivalence of plat representation of knots and links*, Can. J. Math., Vol. XXVIII, No.2, 1976, pp. 264-290.
-  J. S. Birman and W. Menasco, Studying links via closed braids IV: Composite links and split links, Invent. Math. 102 (1990), 115–139. MR1069243 (92g:57010a)
-  Burau, W. (1936), Über Zopfgruppen und gleichzeitig verdrillte Verkettungen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **11**, pp. 179–186.
-  V. F. R. Jones. A polynomial invariant for links via von Neumann algebras. Bulletin of the Amer. Math. Soc., 129:103–112, 1985.

References III

-  V. F. R. Jones. Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials. *Ann. of Math. (2)*, 126(2):335–388, 1987
-  L. H. Kauffman, S. Lambropoulou, *Virtual Braids*, arXiv:math/0407349.
-  J. Cho, S. Yoon, C.K. Zickert *On the Hikami-Inoue conjecture*, Algebraic and Geometric Topology 20 (2020) 279–301.
-  Moody, J.A.(1991), The Burau representation of the braid group B_n is unfaithful for large n , *Bull. Amer. Math. Soc.*, **25**, pp. 379–284.
-  Vogel, P. (1990), Representations of links by braids: A new algorithm, *Comm. Math. Helvetici*, **65**, pp. 104–113.
-  В. О. Мантуров, Экскурс в теорию кос, Матем. просв., 2010, выпуск 14, 107–142.