

Лекция 7. Группа кос

Содержание

- 1 Четыре определения группы кос
 - Геометрическое определение
 - Топологическое определение
 - Алгебро–геометрическое определение
 - Алгебраическое определение
 - Эквивалентность четырех определений
- 2 Геометрический алгоритм распознавания кос
 - Построение инварианта
 - Алгебраическое описание инварианта
- 3 Упражнения
- 4 Исследовательские задачи

Геометрическое определение

Рассмотрим прямые $\{y = 0, z = 1\}$ и $\{y = 0, z = 0\}$ в \mathbb{R}^3 и выберем m точек $(1, 0, \epsilon), \dots, (m, 0, \epsilon)$, $\epsilon = 0, 1$ на каждой прямой.

Определение 1.1

Коса из m нитей — это набор m непересекающихся гладких путей, соединяющих выбранные точки первой прямой с выбранными точками второй прямой (в произвольном порядке) так, что проекция каждого из путей на ось Oz является диффеоморфизмом. Эти гладкие пути называются *нитьями* косы.

Пример косы изображен на рис. 1.

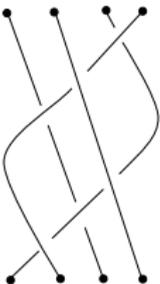


Рис. 1: Коса

Определение 1.2

Две косы B_0 и B_1 считаются *равными*, если они *изотопны*, т.е. существует непрерывное семейство кос B_t , $\{t \in \{0, 1\}\}$, начинающееся с косы B_0 и завершающееся косой B_1 .

Определение 1.3

Множество всех кос из m нитей образует группу. Групповая операция состоит в приставлении одной косы над другой и перемасштабировании координаты z . *Единичным элементом*, или *единицей* этой группы является коса, состоящая из вертикальных параллельных нитей. Обратным элементом к заданной косе является ее зеркальное отражение, см. рис. 2.

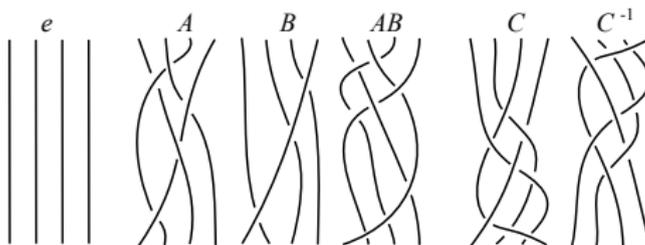


Рис. 2: Единица и операции группы кос

Определение 1.4

Артинова группа кос из m нитей — это группа кос с операцией, определенной выше.

Обозначение: $Br(m)$.

Можно рассмотреть косы, нити которых соединяют точки с одинаковыми координатами x .

Определение 1.5

Такие косы называются *крашенными*. Крашенные косы образуют подгруппу в группе кос. [Art1]

Обозначение: $PB(m)$.

Замечание 1.6

Каждая коса β задает перестановку σ_β по формуле $\sigma_\beta(i) = j$, если коса соединяет точку $(i, 0, 0)$ с $(j, 0, 1)$. Более того, данное сопоставление является гомоморфизмом групп ϕ из $B(m)$ в S_m . Заметим, что $\ker(\phi) = PB(m)$.

Топологическое определение

Определение 1.7

Неупорядоченным конфигурационным пространством порядка m топологического пространства X является пространство (снабженное естественной топологией) всех неупорядоченных наборов из m попарно различных точек X .

Обозначение: $B(X, m)$.

Аналогично можно определить упорядоченное конфигурационное пространство порядка m .

Обозначение: $F(X, m)$.

Теперь пусть $X = \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}^1$.

Определение 1.8

Группа кос из m нитей определяется как фундаментальная группа $\pi_1(B(X, m))$.

Определение 1.9

Группа $\pi_1(F(X, m))$ называется группой крашенных кос из m нитей.

Алгебро–геометрическое определение

Рассмотрим множество всех полиномов степени m от одной комплексной переменной z со старшим коэффициентом, равным одному.

Очевидно, что это множество (с естественной топологической структурой) изоморфно \mathbb{C}^m : коэффициенты многочлена можно рассматривать как комплексные координаты.

Теперь удалим множество Σ_m всех многочленов с кратными корнями (хотя бы одним). Получим множество $\mathbb{C}^m \setminus \Sigma_m$.

Определение 1.10

Группа кос из m нитей — это группа $\pi_1(\mathbb{C}^m \setminus \Sigma_m)$.

Алгебраическое определение

Определение 1.11

Группа кос из m нитей — это группа, заданная копредставлением с $(m - 1)$ образующими $\sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}$ и следующими соотношениями

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$$

для $|i - j| \geq 2$ и

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$$

для $1 \leq i \leq m - 2$.

Данные соотношения называются *соотношениями Артина*.

Определение 1.12

Слова из букв σ 's и σ^{-1} рассматриваются как *слова в группе кос*.

Теорема 1.13

Четыре определения группы кос $Br(m)$, данные выше, эквивалентны.

Доказательство Самая простая часть доказательства — эквивалентность топологического и алгебро-геометрического определений. Действительно, очевидно, что пространство многочленов степени m без кратных корней и старшим коэффициентом, равным 1, гомеоморфно m -конфигурационному пространству для \mathbb{C}^1 . Значит, их фундаментальные группы изоморфны.

Докажем теперь эквивалентность геометрического и топологического определений. Как мы знаем, фундаментальная группа не зависит от выбора базовой точки в связном пространстве. Значит, в качестве базовой точки A в неупорядоченном m -конфигурационном пространстве можно взять набор $(1, 2, \dots, m)$. Рассмотрим пространство \mathbb{R}^3 как произведение $\mathbb{C}^1 \times \mathbb{R}^1$.

С каждой замкнутой петлей, выходящей из A и лежащей в $B(\mathbb{C}^1, m)$, свяжем набор кривых в \mathbb{R}^3 следующим образом. Каждая кривая представляет движение точки в комплексной плоскости \mathbb{C}^1 с течением времени t , где t — вещественный параметр, см. рис. 3.

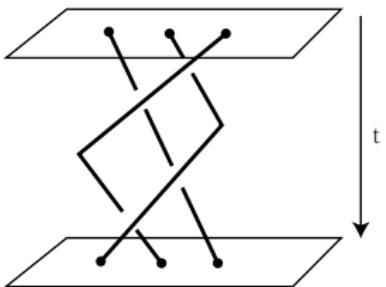


Рис. 3: Коса в трехмерном пространстве

Таким образом, каждой топологической косе мы однозначно сопоставили геометрическую косу. Очевидно, что двум гомотопным (равным) топологическим косам отвечают изотопные (равные) геометрические косы. Итак, осталось доказать эквивалентность геометрического и алгебраического определений. Для этого введем понятие *плоской диаграммы косы*, аналогичное понятию плоской диаграммы зацепления.

Чтобы увидеть, что это такое, спроецируем косу на плоскость Oxz . В случае общего положения мы получим диаграмму, которую можно описать следующим образом.

Определение 1.14

A Плоская диаграмма косы (из m нитей) — это граф, лежащий в прямоугольнике $[1, m] \times [0, 1]$, снабженный следующей структурой и имеющий следующие свойства:

- 1 Точки $(i, 0)$ и $(i, 1)$, $i = 1, \dots, m$, являются вершинами валентности один; другие точки вида $(x, 0)$ и $(x, 1)$ не принадлежат графу.
- 2 Все другие вершины графа (перекрестки) имеют валентность четыре; противоположные ребра в таких вершинах образуют угол π .
- 3 Уникурсальные кривые, то есть линии, составленные из ребер графа путем перехода от ребра к противоположному ребру и идущие от точки с ординатой 1 к точке с ординатой 0, монотонны по координате z .
- 4 Каждая вершина валентности 4 снабжена структурой прохода-перехода

Так же, как и для плоских диаграмм зацеплений, определяются изотопия диаграмм кос.

Очевидно, что любой изотопический класс геометрической косы можно представить плоской диаграммой. Более того, с помощью малой деформации можно добиться, чтобы все перекрестки косы имели разные ординаты.

Несложно увидеть, что каждый элемент геометрической группы кос можно разложить в произведение следующих образующих σ_i :

элемент σ_i для $i = 1, \dots, m - 1$ состоит из $m - 2$ дуг, соединяющих $(k, 1)$ и $(k, 0)$, $k \neq i, k \neq i + 1$, и двух дуг $(i, 0) - (i + 1, 1)$, $(i + 1, 0) - (i, 1)$, где последняя дуга идет над первой, см. рис. 4.

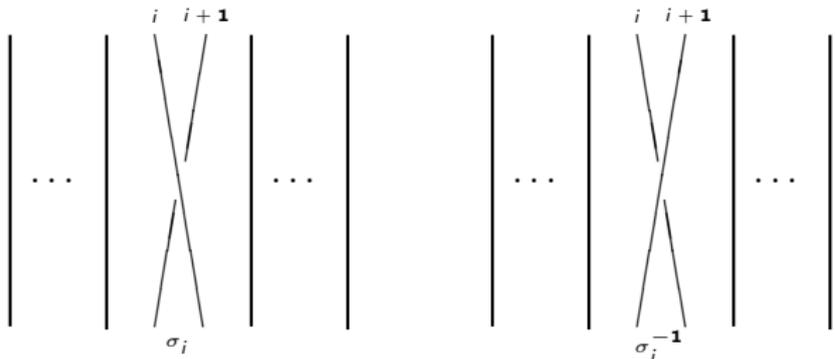


Рис. 4: Образующие группы кос

Разные диаграммы кос могут соответствовать одной косе. Таким образом, мы получаем соотношения на образующие $\sigma_1, \dots, \sigma_m$. Предположим, что даны две равные геометрические косы B_1 и B_2 . Опишем процесс их изотопии в терминах плоских диаграмм. На малом промежутке времени изотопия либо не меняет порядок перекрестков по ординате, либо в какой-то момент ординаты двух перекрестков совпадают; в последнем случае диаграмма перестает быть регулярной.

Нас интересуют моменты, когда меняется алгебраическое строение диаграммы. Легко видеть, что так происходит только в трех случаях (остальные можно свести к этим трем). В первом случае (см. рис. 5.a) пара перекрестков имеет совпадающие ординаты. Во втором случае (см. рис. 5.b) две нити касаются.

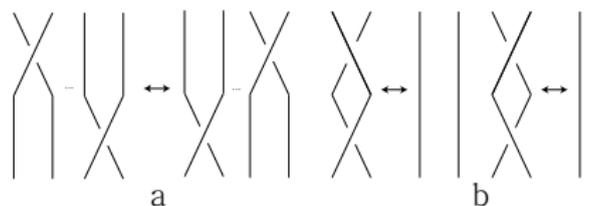


Рис. 5: Наглядное описание изотопии диаграммы косы 1

В третьем случае (рис. 6) возникает тройная точка пересечения.

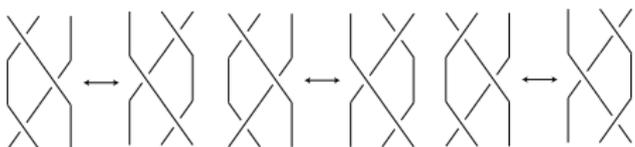


Рис. 6: Наглядное описание изотопии диаграммы косы 2

Легко видеть, что первый случай приводит к соотношению $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$, $|i - j| \geq 2$ (это соотношение называется *дальней коммутативностью*) или эквивалентным ему соотношениями $\sigma_i^{\pm 1} \sigma_j^{\pm 1} = \sigma_j^{\pm 1} \sigma_i^{\pm 1}$, $|i - j| \geq 2$, во втором случае получаем $aa^{-1} = 1$ (или $a^{-1}a = 1$), а в третьем случае мы имеем одно из следующих трех соотношений:

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i^{-1} &= \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^{-1}. \end{aligned}$$

Очевидно, что из первого соотношения можно вывести другие два. Это простое наблюдение мы оставляем слушателю в качестве упражнения. Доказательство теоремы завершено.

Геометрический алгоритм распознавания kos

Далее мы докажем полноту одного инварианта kos , предложенного Артином, см. [GM].

Для произвольного n мы построим инварианты группы kos $Br(n)$. Этот инвариант имеет простое алгебраическое описание как отображение (не гомоморфизм) группы $Br(n)$ в набор из n копий свободной группы с n образующими.

Построение инварианта

Начнем с определения необходимых для конструкции понятий.

Определение 2.1

Допустимой системой из n кривых называется семейство из n непересекающихся простых кривых в верхней полуплоскости $\{y > 0\}$ в плоскости Oxy , такое, что каждая кривая соединяет "нижнюю" точку $(i, 0)$ с "верхней" точкой $(j, 1)$, $1 \leq i, j \leq n$.

Определение 2.2

Две допустимые системы n кривых A и A' называются *эквивалентными*, если существует гомотопия между A и A' в классе кривых с фиксированными концами, лежащих в верхней полуплоскости, такая что в процессе гомотопии ни одна внутренняя точка кривых не совпадает с верхней или нижней точкой.

Аналогичным образом, определяется эквивалентность для одной кривой (возможно, с самопересечениями) с фиксированными верхним и нижним концами: при гомотопии в верхней полуплоскости никакая внутренняя точка не совпадает с верхней или нижней точкой.

Далее допустимые системы рассматриваются с точностью до эквивалентности.

Замечание 2.3

Заметим, что в процессе гомотопии кривые могут пересекаться.

Пусть β — диаграмма косы, соединяющая нижние точки $\{(1, 0), \dots, (n, 0)\}$ с верхними точками $\{(1, 1), \dots, (n, 1)\}$. Рассмотрим самый верхний перекресток C диаграммы β и протянем нижнюю ветвь вдоль верхней, как на рис. 7.

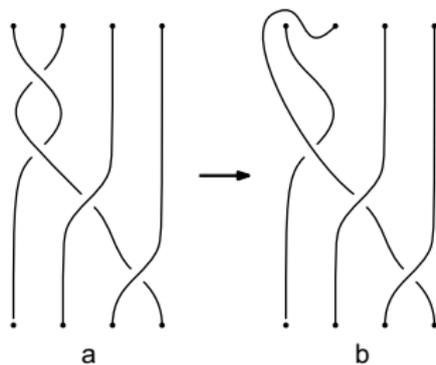


Рис. 7: Протягивание самого верхнего перекрестка

Естественно, что это преобразование портит диаграмму: итоговая диаграмма на рис. 7.b уже не является диаграммой косы. Однако в новой “диаграмме” меньше перекрестков.

Повторим ту же операцию со следующим перекрестком, а именно протянем нижнюю ветвь вдоль верхней (возможно, продеформированной предыдущими преобразованиями) до конечной точки (см. рис. 8).

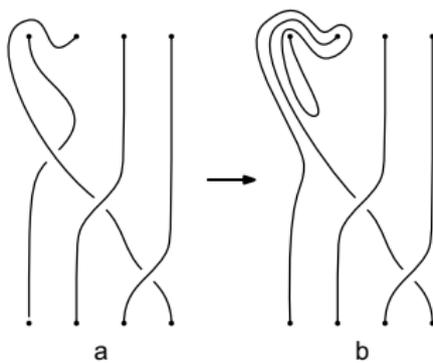


Рис. 8: Протягивание следующего перекрестка

Повторяя процедуру для всех перекрестков (до самого нижнего), мы получим допустимую систему кривых. Обозначим класс эквивалентности этой системы через $f(\beta)$.

Теорема 2.4

Функция f является инвариантом кос, т.е. для двух диаграмм β, β' одной косы мы имеем $f(\beta) = f(\beta')$.

Доказательство. Рассмотрим слова, соответствующие диаграммам β, β' . Докажем, что допустимые системы кривых инвариантны для преобразований на рис. 5.

Инвариантность при дальней коммутативности $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, |i - j| \geq 2$ очевидна: порядок протягивания далеких друг от друга ветвей не меняет результат.

Инвариантность относительно соотношения $\sigma_i \sigma_i^{-1} = e$ доказывается так, см. рис. 9.

В левой части рис. 9 пунктирная линия указывает на произвольность поведения верхней части диаграммы косы. Самая правая диаграмма на рис. 9 соответствует системе кривых без $\sigma_i \sigma_i^{-1}$.

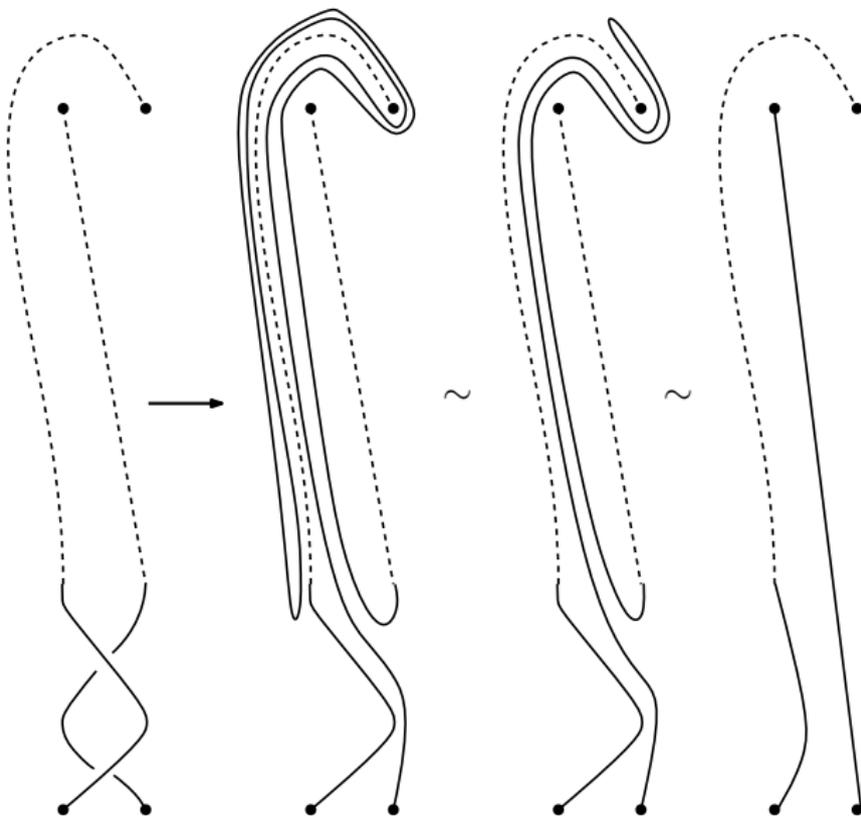


Рис. 9: Инвариантность f при движении $\sigma_i \sigma_i^{-1} = e$

Наконец, инвариантность относительно преобразования $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i \rightarrow \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$ показана на рис. 10. В верхней части (над горизонтальной линией) показано поведение $f(A\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i)$, а в нижней части — поведение $f(A\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1})$ для произвольной косы A . В средней части сверху часть кривой изображена пунктиром. Стягивая ее, мы получим диаграмму, изображенную справа сверху, которая совпадает с диаграммой справа внизу. Поведение диаграммы в верхней части A диаграммы косы произвольное. Для простоты изобразим это тремя вертикальными линиями. Таким образом, мы доказали, что $f(A\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i) = f(A\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1})$.

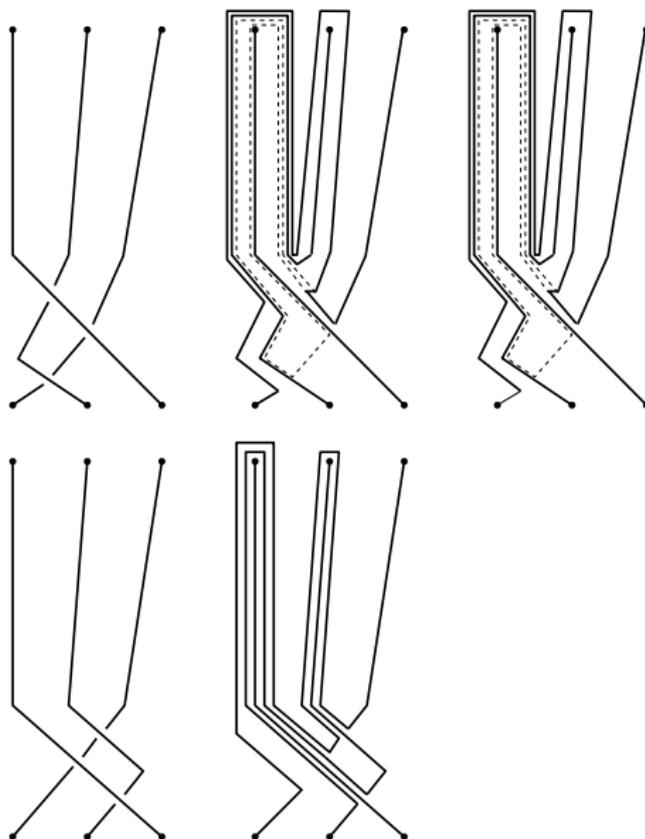


Рис. 10: Инвариантность f при движении $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \leftarrow \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$

Теперь докажем следующую лемму.

Лемма 2.5

Если для двух кос β и β' имеет место $f(\beta) = f(\beta')$, то для любой косы γ получаем $f(\beta\gamma) = f(\beta'\gamma)$.

Доказательство.

Утверждение $f(\beta\gamma) = f(\beta'\gamma)$ следует явно из построения. Действительно, нам нужно только добавить косу γ к допустимой системе кривых, соответствующей β (либо β') и протянуть все перекрестки косы γ . □

На самом деле, имеет место более сильная теорема.

Теорема 2.6 (Главная теорема)

Функция f является полным инвариантом.

Чтобы доказать это утверждение, нужно уметь восстанавливать косу по допустимой системе кривых.

Далее мы будем работать с косами, конечные точки которых имеют координаты $(i, 0, 0)$ и $(j, 1, 1)$, а нити монотонны по координате z , см. рис. 11.

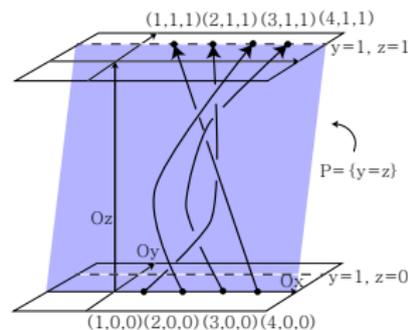


Рис. 11: Коса с конечными точками $(i, 0, 0)$ и $(j, 1, 1)$

Рассмотрим косу β и плоскость $P = \{y = z\}$ в $Oxyz$. Расположим косу β в окрестности P таким образом, чтобы нити соединяли точки $(i, 0, 0)$ и $(j, 1, 1)$, $i, j = 1, \dots, n$. Проекция косы на плоскости Oxy и Oxz являются диаграммами косы. Обозначим диаграмму на Oxy через β .

Следующим шагом является преобразование проекции на Oxy без изменения изотопического типа косы. Мы будем менять абсциссы и ординаты небольших дуг нитей косы, чтобы проекция измененной косы на Oxy представляла собой допустимую систему кривых для β . Действительно, каждый перекресток начальной проекции на плоскость Oxy соответствует перекрестку проекции на Oxz . Таким образом, протаскивая нить косы вдоль другой нити в плоскости, параллельной Oxy , убирает перекресток на Oxy и задает изотопию кос. Oxz .

Итак, мы описали геометрический смысл инварианта f .

Определение 2.7

Допустимая параметризация (далее все параметризации предполагаются гладкими) допустимой системы кривых — это набор параметризаций для всех кривых системы с параметрами t_1, \dots, t_n , таким что в верхних точках t_i равны 1, а в нижних точках t_i равны 0.

Любая допустимая система A из n кривых с допустимой параметризацией T задает геометрическую косу: каждая кривая системы на плоскости Oxy становится нитью косы при добавлении параметризации в качестве третьей координаты. Соответствующая коса имеет концы $(i, 0, 0)$ и $(j, 1, 1)$, где $i, j = 1, \dots, n$. Обозначим ее через $g(A, T)$.

Лемма 2.8

Изотопический класс косы $g(A, T)$ не зависит от параметризации T .

Доказательство.

Действительно, любые параметризации T_1 и T_2 допустимой системы кривых A можно включить в непрерывное семейство параметризаций $T_i, i \in [1, 2]$, (например, $T_i = (i - 1)T_1 + (2 - i)T_2$). Тогда семейство кос $g(A, T_i), i \in [1, 2]$, задает изотопию между $g(A, T_1)$ и $g(A, T_2)$. □

Таким образом, функция $g(A) \equiv g(A, T)$ корректно определена.

Теперь докажем следующую лемму.

Лемма 2.9

Пусть A, A' — две эквивалентные допустимые системы из n кривых. Тогда $g(A) = g(A')$.

Доказательство. Пусть $A_t, t \in [0, 1]$, — гомотопия, соединяющая A с A' . Для каждого $t \in [0, 1]$, A_t является системой кривых (возможно, недопустимой). На каждой кривой $\{a_{i,t}, i = 1, \dots, n, t \in [0, 1]\}$ выберем точки $X_{i,t}$ и $Y_{i,t}$ так, чтобы дуга кривой от верхней точки до $X_{i,t}$ и дуга от нижней точки до $Y_{i,t}$ не содержали точек пересечения. Обозначим оставшуюся часть кривой (среднюю дугу между $X_{i,t}$ и $Y_{i,t}$) через $S_{i,t}$. Теперь параметризуем кривые для всех t параметрами $\{s_{i,t} \in [0, 1], i = 1, \dots, n\}$ следующим образом: для каждого t , верхним точкам всех кривых соответствует параметр $s = 1$, а нижним точкам — параметр $s = 0$. Кроме того, потребуем, чтобы для любых $i < j$ и любых $x \in S_{i,t}, y \in S_{j,t}$ выполнялось неравенство $s_{i,t}(x) < s_{j,t}(y)$.

Продолжение доказательства

Например, параметризуем среднюю дугу j -й нити значениями параметра на отрезке $[\frac{j}{n+2}, \frac{j+1}{n+2}]$.

Очевидно, что для $t = 0$ и $t = 1$ эти параметризации допустимы для A и A' . Для каждого $t \in [0, 1]$ параметризация s задает косу B_t в \mathbb{R}^3 : мы берем параметр $s_{j,t}$ в качестве третьей координаты для нити $a_{j,t}$. Нити косы не пересекаются, так как средним дугам разных нитей соответствуют разные значения параметра s .

Тогда семейство кос B_t задает изотопию между $B_0 = g(A)$ and $B_1 = g(A')$.

Таким образом, функция g корректно определена на классах эквивалентности допустимых систем кривых.

Теперь для завершения доказательства основной теоремы достаточно доказать следующую лемму.

Лемма 2.10

Для любой косы β мы имеем $g(f(\beta)) = \beta$.

Доказательство.

Действительно, расположим β в малой окрестности наклонной плоскости P , чтобы концы косы β были в точках $(i, 0, 0)$ и $(j, 1, 1)$, $i, j = 1, \dots, n$.

Рассмотрим допустимую систему кривых $f(\beta)$ для β , лежащую в плоскости Oxy . Тогда существует допустимая параметризация $f(\beta)$, которая восстанавливает косу β . По лемме 2.8 любая допустимая параметризация $f(\beta)$ порождает косу β . Значит, $g(f(\beta)) = \beta$. \square

Алгебраическое описание инварианта

В общей ситуации при определении полного инварианта строится новый объект, для которого имеется взаимно-однозначное соответствие с описываемым объектом. Однако новый объект может оказаться плохо распознаваемым.

Ниже мы дадим алгебраическое описание инварианта f .

Оказывается, что итоговый результат прост для распознавания. А именно, проблема распознавания кос сводится к проблеме распознавания элементов в свободной группе: имеется инъективное отображение (не гомоморфизм) группы кос в набор из n копий свободной группы с n образующими.

Каждая коса β задает перестановку. Эта перестановка однозначно восстанавливается по допустимой системе кривых, соответствующей β . Действительно, для допустимой системы A соответствующая ей перестановка отображает i в j , где j — ордината конца кривой, начинающейся в верхней точке $(i, 1)$. Обозначим эту перестановку через $\rho(A)$. Очевидно, что $\rho(A)$ зависит только от класса эквивалентности A .

Пусть n — целое число. Рассмотрим свободную группу G с образующими a_1, \dots, a_n . Обозначим через E_i левые смежные классы G по $\{a_i\}$, т.е. $g_1, g_2 \in G$ представляют один элемент в E_i , если и только если $g_1 = a^k g_2$ для некоторого k .

Определение 2.11

Под n -системой понимается набор элементов $e_1 \in E_1, \dots, e_n \in E_n$.

Определение 2.12

Упорядоченная n -система — это n -система вместе с некоторой перестановкой из S_n .

Утверждение 2.13

Существует инъективное отображение из множества классов эквивалентности допустимых систем кривых в упорядоченные n -системы.

Так как перестановки для эквивалентных допустимых систем совпадают, мы можем выбрать перестановку $s \in S_n$ и рассматривать только допустимые системы кривых с перестановкой s . Таким образом, достаточно показать, что есть инъективное отображение из множества допустимых систем с заданной перестановкой в множество n -систем.

Достаточно показать следующее.

Лемма 2.14

Классы эквивалентности кривых с фиксированными концевыми точками $(i, 1)$ и $(j, 0)$ взаимно-однозначно соответствуют элементам E_i .

Доказательство. Обозначим множество $P \setminus \cup_{i=1, \dots, n} (i, 1)$ через P_n . Очевидно, что $\pi_1(P_n) \cong G$. Рассмотрим небольшую окружность C с центром $(i, 1)$ для некоторого i и пусть X — самая нижняя точка на ней. Пусть ρ — кривая с концами $(i, 1)$ и $(j, 0)$. Без ограничения общности предположим, что ρ пересекает C конечное число раз. Пусть Q — последняя точка пересечения при движении по ρ от $(i, 1)$ к $(j, 0)$. Теперь построим элемент группы $\pi_1(P_n, X)$. Сначала двигаемся от X к Q по окружности C по часовой стрелке. Затем идем вдоль ρ в точку $(j, 0)$. Далее двигаемся по оси Ox в точку $(i, 0)$. Наконец, поднимаемся вертикально вверх до пересечения с C в точке X . Обозначим построенный элемент через $W(\rho)$.

Продолжение доказательства

Если мы деформируем ρ вне C , то получаем непрерывную деформацию петли, значит $W(\rho)$ не меняется как элемент фундаментальной группы. Деформация ρ внутри C может поменять $W(\rho)$ путем умножения на a_i с левой стороны. Значит, мы построили отображение из множества классов эквивалентности кривых с концами $(i, 1)$ и $(j, 0)$ в множество E_i . Обратное отображение строится так. Пусть W — элемент $\pi_1(P_n, X)$. Рассмотрим петлю L , представляющую W . Теперь рассмотрим кривую L' , которая сначала вертикально идет от $(i, 1)$ к X , затем идет по L , далее идет вертикально вниз в точку $(i, 0)$ и, наконец, в точку $(j, 0)$ по оси Ox . Очевидно, что $W(L') = W$. Легко видеть, что для различных представителей L класса W мы получаем кривые, эквивалентные L' . Кроме того, для $L_1 = a_i L_2$, кривые L'_1 и L'_2 изотопны. Лемма доказана.

Таким образом, для заданной перестановки s допустимые системы кривых однозначно кодируются n -системами, что завершает доказательство утверждения.

Мы видим, что инвариант представляет собой простой объект: элементы E_i легко сравнивать.

Опишем алгебраическую конструкцию инварианта f более детально. Пусть β — слово-коса, записанная как произведение образующих $\beta = \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots \sigma_{i_k}^{\varepsilon_k}$, где каждая ε_j равна либо $+1$, либо -1 ; $1 \leq i_j \leq n-1$, а $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ — стандартные образующие группы кос $Br(n)$. Мы будем строить n -систему шаг за шагом, прочитывая слово β . Во-первых, возьмем n пустых слов $e_j =$, $j = 1, \dots, n$, (в алфавите a_1, \dots, a_n). Пусть первая буква слова β равна σ_j . Тогда все слова, кроме слова e_{j+1} , остаются пустыми, а слово e_{j+1} становится равным a_j^{-1} . Если первый перекресток отрицателен, т.е. σ_j^{-1} , то все слова, кроме e_j , остаются такими же, а e_j превращается в a_{j+1} . При рассмотрении следующего перекрестка поступаем так. Пусть перекресток равен $\sigma_j^{\pm 1}$. Пусть p и q — номера нитей, идущих с левой и с правой стороны соответственно. Если перекресток положителен, т.е. равен σ_j , то все слова, кроме e_q , не меняются, а e_q преобразуется в $e_q e_p^{-1} a_p^{-1} e_p$. Если перекресток отрицателен, то все слова, кроме e_p , остаются прежними, а e_p меняется на $e_p e_q^{-1} a_q e_q$. После прохождения всех перекрестков мы получим искомую n -систему.

Пример 2.15

Для тривиальной косы, записанной как $\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}$, построение 3-системы происходит следующим образом:

$$(e, e, e) \rightarrow (e, a_1^{-1}, e) \rightarrow (e, a_1^{-1}, a_1^{-1}) \rightarrow (e, a_1^{-1}, a_2^{-1}a_1^{-1}) \rightarrow \\ \rightarrow (e, e, a_2^{-1}a_1^{-1}) \rightarrow (e, e, a_2^{-1}) \rightarrow (e, e, e).$$

А priori эти слова могут быть нетривиальными, они должны только представлять тривиальный смежный класс, например, (a_1, a_2^2, a_3^{-1}) . Однако это не так.

Утверждение 2.16

Для тривиальной косы описанный выше алгебраический алгоритм дает тривиальные слова.

Доказательство.

Действительно, алгебраическое число букв a_i в слове e_i равно нулю. Это можно проверить по индукции по числу перекрестков. В начале все слова пустые. Шаг индукции очевиден. Таким образом, конечное слово e_i равно a_i^p , where $p = 0$. □

Из описанного подхода легко получить широко известное действие группы кос на свободной группе.

Вместо множества из n слов e_1, \dots, e_n , рассмотрим слова $e_1 a_1 e_1^{-1}, \dots, e_n a_n e_n^{-1}$.

Так как слова e_i определены с точностью до умножения на a_i слева, построенные элементы корректно определены в свободной группе.

Кроме того, элементы $\mathfrak{E}_i = e_i a_i e_i^{-1}$ являются образующими свободной группы. Это можно проверить по индукции.

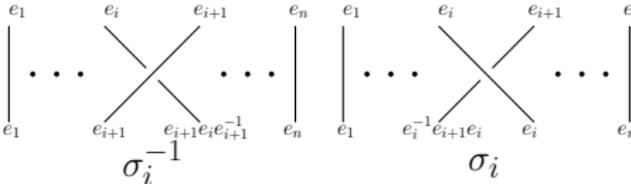


Рис. 12: Действие, соответствующее перекрестку

Таким образом, любой косе β мы сопоставляем множество $Q(\beta)$ образующих свободной группы. Значит, коса β задает автоморфизм свободной группы \mathbb{Z}^{*n} .

Легко видеть, что автоморфизм, соответствующий произведению кос, является композицией автоморфизмов, отвечающих данным косам.

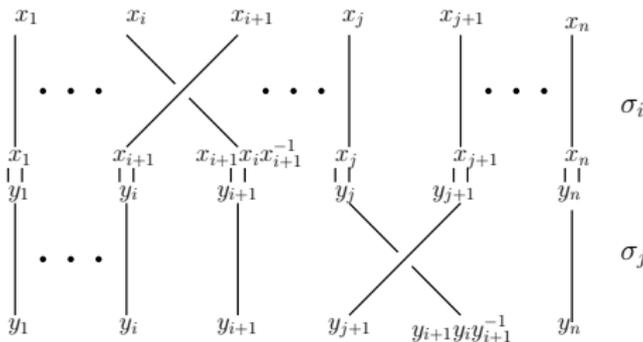


Рис. 13: Произведение кос и соответствующее действие

Таким образом, можно говорить о *действии группы кос на свободной группе*. Так как инвариант f полный, это действие имеет нулевое ядро.

Определение 2.17

Данное действие называется *действием Гурвица* группы кос B_n на свободной группе \mathbb{Z}^{*n} .

Упражнения

- 1 Покажите, что $PB(m)$ является нормальной подгруппой в $Br(m)$, и что факторгруппа $Br(m)/PB(m)$ изоморфна группе перестановок $S(m)$.
- 2 Выпишите слово, соответствующее диаграмме косы на рис. 14.

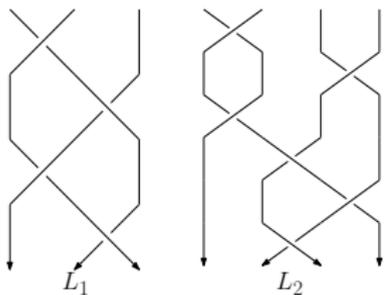


Рис. 14:

- 3 Проверьте, что $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i^{-1} = \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ и $\sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i \sigma_{i+1} = \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i^{-1}$ можно получить из соотношений Артина.

Упражнения (продолжение)

- 4 Постройте допустимую систему $f(\beta)$ для косы β на рис. 15.



Рис. 15:

- 5 Покажите, что два слова $\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}$ и $\sigma_1\sigma_3\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1$ задают одну косу и изотопные диаграммы кос.
- 6 (*) Найдите копредставление группы крашенных кос $PB(m)$.

Исследовательская задача: Δ -группы и Брунновы косы

Рассмотрим группу крашенных кос $PB(X, m) = \pi_1(F(X, m))$ для некоторого топологического пространства, определенную на с. 6. Для каждого $i \in \{1, \dots, m\}$ существуют гомоморфизмы групп $d_i : PB(X, m) \rightarrow PB(X, m - 1)$, где $d_i(\beta)$ получается из $\beta \in PB(m)$ удалением i -й нити, см., например, рис. 16.

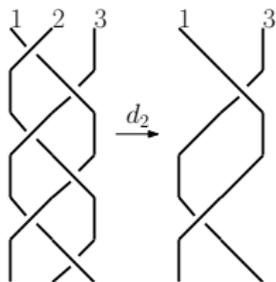


Рис. 16: Крашенная коса в \mathbb{R}^2 и удаление второй нити

Известно, что $F(X)^{\pi_1} = (PB(X, m), \{d_i\}_{i=1, \dots, m})$ являются Δ -группами. Элементы в $Brunn(X, m) = \bigcap_{i=1}^m \ker(d_i : PB(X, m) \rightarrow PB(X, m - 1))$ называются **Брунновыми косами**.

В [BCWW] A. J. Berrick, F. R. Cohen, Y. L. Wong и J. Wu показали, что гомотопические группы сферы S^2 можно вычислить с помощью $F(S^2)^{\pi_1}$ и $\{Brunn(S^2, m)\}_{m=1}^{\infty}$, другими словами, Брунновы косы могут выявить топологические свойства пространства, на котором эти косы определены. Упомянутое выше утверждение можно доказать с помощью цепных комплексов, так называемых *комплексов Мура*, которые можно связать не только с $F(S^2)^{\pi_1}$ и $\{Brunn(S^2, m)\}_{m=1}^{\infty}$, но и с $F(X)^{\pi_1}$ и $\{Brunn(S^2, m)\}_{m=1}^{\infty}$ для произвольного топологического пространства X . Тогда возникает следующий естественный вопрос:

Вопрос Каким образом можно изучать топологические пространства X с помощью $F(X)^{\pi_1}$ и $Brunn(X, m)$?

С другой стороны, изучение Брунновых кос само по себе является интересной задачей. В работе [3] Брунновы косы изучаются при помощи групп G_n^k , в частности, групп G_n^2 и G_n^3 , которые соответствуют конфигурационным пространствам с хорошим свойством коразмерности 1. Одна из лекций будет посвящена этим группам.

Вопрос Каким образом можно изучать топологические пространства X с помощью групп G_n^k ?

-  V. O. Manturov Knot theory: Second edition CRC press 560 April 4, 2018.
-  K. Murasugi, Knot Theory and Its Applications, Springer.
-  Artin, E. (1925), Theorie der Zöpfe. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **4**, pp. 27–72.
-  Gaifullin, A.A. and Manturov V.O. (2002), On the recognition of Braids, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **11** (8), pp. 1193–1209.
-  A. J. Berrick, F. R. Cohen, Y. L. Wong, J. Wu, *Configurations, Braids, and homotopy groups* Journal of the American Mathematical society, Volume 19, Number 2, Pages 265–326
-  S. Kim, V.O. Manturov, *On groups G_n^k braids and Brunnian braids*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, 2016, vol.25, No.13, 1650078, 17 pages.