

# Лекция 6. Арифметика узлов и поверхности Зейферта

С. Ким, В.О. Мантуров, И.М. Никонов

19 октября 2021

# Содержание

- 1 Арифметика узлов
- 2 Поверхности Зейферта
- 3 Кобордизмы узлов и срезанные узлы
- 4 Упражнения
- 5 Исследовательские задачи

## Связная сумма

## Определение 1.1

Под композицией, конкатенацией или связной суммой узлов  $K_1$  и  $K_2$  будем понимать ориентированный узел, полученный присоединением узла  $K_2$  к узлу  $K_1$  с учетом ориентации, см. рис. 1. Обозначение:  $K_1 \# K_2$ .

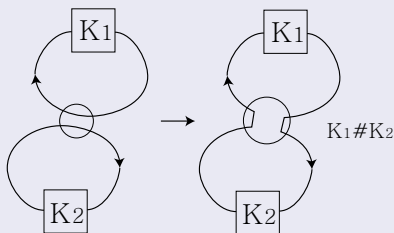


Рис. 1: Связная сумма узлов

## Лемма 1.2

Операция связной суммы корректно определена, то есть класс изотопии  $K_1 \# K_2$  не зависит от выбора места соединения.

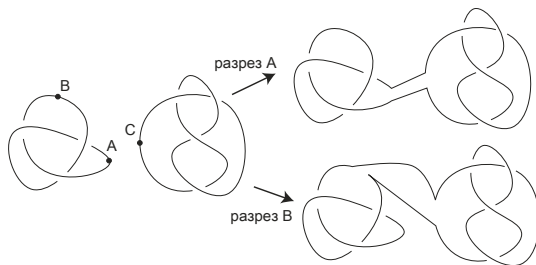


Рис. 2: Связная сумма не зависит от места соединения

## Лемма 1.3

Связная сумма коммутативна: для любых узлов  $K_1, K_2$  узлы  $K_1 \# K_2$  и  $K_2 \# K_1$  изотопны.

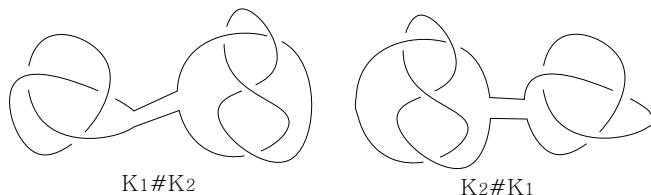


Рис. 3:  $K_1 \# K_2$  и  $K_2 \# K_1$  эквивалентны.

Мы оставляем доказательства лемм 1.2 и 1.3 в качестве упражнения. Требуемая изотопия может быть осуществлена в классе узлов с удаленными на бесконечность концами (длинных узлов).

## Теорема 1.4

Пусть узел  $K_1$  нетривиален. Тогда для любого узла  $K_2$  связная сумма  $K_1 \# K_2$  также является нетривиальным узлом.

## Замечание 1.5

Легко увидеть, что  $(K_1 \# K_2) \# K_3 = K_1 \# (K_2 \# K_3)$  и, следовательно,  $(\mathcal{K}, \#)$  образует полугруппу. В частности,  $K \# \bigcirc$  эквивалентен  $K$ , значит,  $\bigcirc$  — единичный элемент. Однако по теореме 1.4 нетривиальные узлы не имеют обратных элементов. В силу данного наблюдения, множество узлов  $(\mathcal{K}, \#)$  является коммутативным моноидом.

Мы дадим три доказательства теоремы 1.4. Первое из них не вполне строго, но очень наглядно. Второе основано на замечательной идее, принадлежащей Дж.Х. Конвею. Последнее доказательство является следствием из некоторого более сильного утверждения.

# Умозрительное доказательство теоремы 1.4

Пусть узел  $K_1$  нетривиален, а  $K_1 \# K_2$  тривиален. Рассмотрим последовательность узлов

$$K_1 \# K_2, (K_1 \# K_2) \# (K_1 \# K_2), \dots,$$

где узел  $K_1$  лежит внутри шара радиуса 1, узел  $K_2$  — внутри шара радиуса  $\frac{1}{2}$ , узел  $K_1$  лежит внутри шара радиуса  $\frac{1}{4}$  и т.д. Следовательно, можно разместить эту бесконечную последовательность узлов на ограниченном интервале, см. рис. 4.

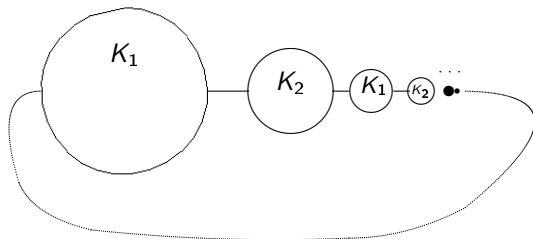


Рис. 4: Дикий узел

# Умозрительное доказательство теоремы 1.4 : продолжение

Таким образом, мы получаем дикий узел<sup>1</sup>. Обозначим этот узел через  $a$ . Так как узел  $K_1 \# K_2$  тривиален, узел  $a$  тоже будет тривиальным. С другой стороны, у нас есть такое разложение:  $a = K_1 \# (K_2 \# K_1) \# (K_2 \# K_1) \dots$ . Так как связная сумма коммутативна, то узел  $K_2 \# K_1$  тривиален. Значит, тривиальный узел  $a$  изотопен  $K_1$ . Данное противоречие завершает доказательство теоремы.

---

<sup>1</sup>Под диким узлом мы понимаем непрерывное вложение  $S^1 \rightarrow S^3$ , которое не является гладким.



## Доказательство Дж.Х. Конвея теоремы 1.4

## Определение 1.6

Под *стандартно вложенным* (в  $\mathbb{R}^3$ ) телом с ручками  $S_g$ ,  $g \in \mathbb{N}$ , мы понимаем трубчатую окрестность графа, вложенного в плоскость  $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ , см. рис. 5.



$g - 1$  вертикальных линий

Рис. 5: Планарный граф

Под *стандартно вложенной* поверхностью с ручками мы понимаем границу стандартно вложенного тела с ручками.

# Доказательство Дж.Х. Конвея теоремы 1.4 : продолжение

Мы видим, что связная сумма  $K_1 \# K_2$  имеет трубчатую окрестность  $T$ , изоморфную трубчатой окрестности узла  $K_1$ , см. рис. 6. Любой меридиональный диск  $D$  данной окрестности имеет (гомологически) нетривиальное пересечение с  $K_1 \# K_2$ .

Однако у тривиального узла  $U$  единственной окрестностью  $T'$  с описанным выше свойством является стандартное вложение тора. Так как узел  $K_1$  нетривиален, то “утолщения” узлов  $T'$  и  $T$  не изотопны. Значит,  $K_1 \# K_2$  — нетривиальный узел.

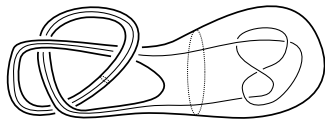


Рис. 6: Связная сумма двух нетривиальных узлов нетривиальна

# Простые узлы

## Определение 1.7

Узел  $K$  называется *простым*, если для любых узлов  $L, M$ , таких что  $K = L \# M$ , один из узлов  $L, M$  тривиален. В противном случае узел называется *составным*.

## Определение 1.8

Если для узлов  $K, L, M$  выполняется соотношение  $K = L \# M$ , то говорят, что узлы  $L, M$  *делят* узел  $K$ .

Таким образом, мы доказали, что все элементы полугруппы узлов  $(\mathcal{K}, \#)$ , кроме тривиального узла, не имеют обратного элемента. Рассмотрим другие свойства этой полугруппы.

# Поверхности Зейферта

Сейчас мы определим поверхности Зейферта, введенные впервые Х. Зейфертом в [Sei1], см. также [Sei2, CF].

## Определение 2.1

Пусть  $L$  — ориентированное зацепление. *Поверхностью Зейферта* зацепления  $L$  называется компактная ориентированная двумерная поверхность в  $\mathbb{R}^3$ , границей которой является зацепление  $L$ , причем ориентация зацепления  $L$  индуцирована ориентацией поверхности.

## Теорема 2.2

*У любого зацепления в  $\mathbb{R}^3$  существует поверхность Зейферта.*

## Доказательство теоремы 2.2

Рассмотрим плоскую диаграмму  $D$  зацепления  $L$ . Сгладим перекрестки зацепления, как показано ниже.

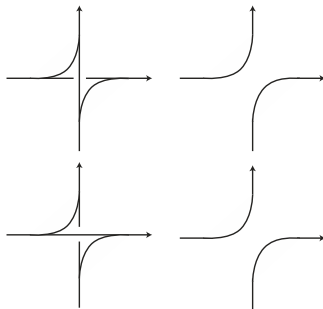


Рис. 7: Сглаживание перекрестков диаграммы

После сглаживания мы получим набор непересекающихся простых замкнутых кривых на плоскости.

## Доказательство теоремы 2.2: продолжение

## Определение 2.3

Полученные кривые назовем *окружностями Зейферта*.

Приклеим диски к этим окружностям. Хотя на плоскости внутренности окружностей могут быть вложены друг в друга, диски в трехмерном пространстве можно разместить без пересечений.

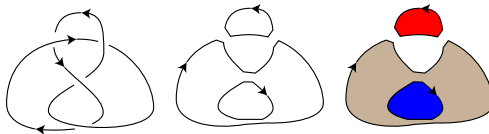


Рис. 8: Окружности Зейферта и диски

## Доказательство теоремы 2.2: продолжение

В окрестности каждого перекрестка два диска подходят друг к другу. Выберем отрезки на краю этих дисков и соединим их перекрученной лентой, см. рис. 9. Краем этой ленты являются две дуги зацепления, инцидентные выбранному перекрестку. Два положения (верхнее и нижнее) на рис. 9 показывают различные способы перекрутки (в одном случае вертикальная линия лежит выше горизонтальной, в другом случае — наоборот).

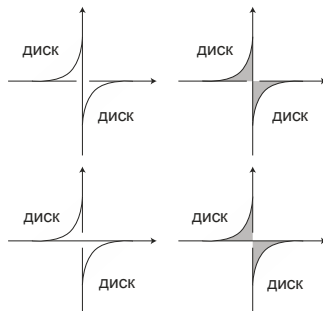


Рис. 9: Приклеивание ленты к дискам

## Доказательство теоремы 2.2: продолжение

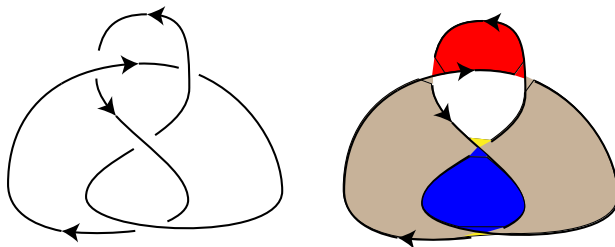


Рис. 10: Поверхность Зейферта

Таким образом, мы получим поверхность, возможно, несвязную. Соединяя различные компоненты тонкими трубками, легко получить связную поверхность с той же границей.



## Доказательство теоремы 2.2: продолжение

Остается показать, что полученная поверхность ориентированная. Действительно, ориентация сглаженной диаграммы задает ориентацию дисков, и приклеивание лент к дискам согласованно с ориентацией. Поэтому склеенная поверхность также будет ориентирована.

## Лемма 2.4

Четность числа окружностей Зейферта в диаграмме  $k$ -компонентного зацепления с  $n$  перекрестками совпадает с четностью  $n - k$ .

**Доказательство** Пусть  $L$  — диаграмма  $k$ -компонентного зацепления с  $n$  перекрестками. Рассмотрим поверхность Зейферта  $S(L)$ . Разобьем поверхность на клетки следующим образом. Вершины разбиения соответствуют перекресткам  $L$  (по две вершины на каждый перекресток), ребра соответствуют дугам диаграммы; также ребро соединяет пару вершин, соответствующих одному перекрестку; см. рис. 12.

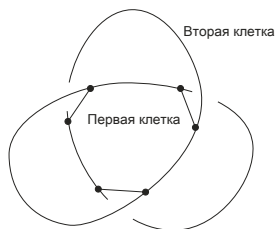


Рис. 11: Клеточное разбиение поверхности Зейферта

## Доказательство : продолжение

Число клеток разбиения равно числу окружностей Зейферта. Теперь приклеим диски к компонентам края (компонентам исходного зацепления). Таким образом мы получим замкнутую ориентированную поверхность. Ее эйлерова характеристика четна. Она равна  $2n - 3n + S + k$ , где  $n$  — число перекрестков в диаграмме  $L$ , и  $S$  — число окружностей Зейферта этой диаграммы. Поскольку число  $2n - 3n + S + k = -n + S + k$  четно, мы получаем утверждение теоремы.

# Род узла

## Определение 2.5

Говорят, что узел  $K$  имеет *род*  $g$ , если  $g$  — минимальное число ручек среди поверхностей Зейферта, соответствующих узлу  $K$ .

Понятие рода узла также было введено Х. Зейферта в [Sei1].

## Замечание 2.6

На самом деле, вычисление рода узла — очень сложная задача, однако она была решена Хакеном. Для этого он развил теорию *нормальных поверхностей* — поверхностей в 3-многообразиях, расположенных нормально по отношению к клеточному разбиению, см. [Нак]. Распознавание тривиального узла (узла рода 0) — частный случай этой задачи.

## Лемма 2.7

Функция  $g$  аддитивна; т.е. для любых узлов  $K_1, K_2$  имеет место равенство  $g(K_1) + g(K_2) = g(K_1 \# K_2)$ .

**Доказательство.** Сначала покажем, что  $g(K_1 \# K_2) \leq g(K_1) + g(K_2)$ . Рассмотрим поверхности Зейферта  $F_1$  и  $F_2$  минимального рода для узлов  $K_1$  и  $K_2$ . Без ограничения общности предположим, что эти поверхности не пересекаются. Соединим две поверхности лентой согласно их ориентации. Таким образом, получим поверхность Зейферта узла  $K_1 \# K_2$  рода  $g(K_1) + g(K_2)$ . Следовательно,

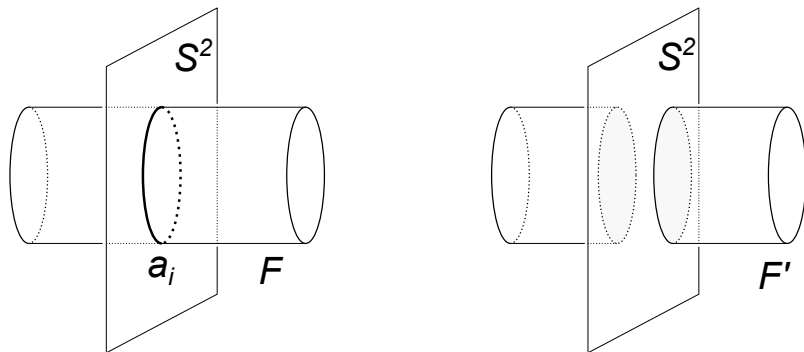
$$g(K_1 \# K_2) \leq g(K_1) + g(K_2).$$

Теперь покажем, что  $g(K_1 \# K_2) \geq g(K_1) + g(K_2)$ . Рассмотрим поверхность Зейферта минимального рода  $F$  узла  $K_1 \# K_2$ . Существует (топологическая) сфера  $S^2$ , разделяющая узлы  $K_1$  и  $K_2$  в связной сумме  $K_1 \# K_2$  в некоторых точках  $A, B$ .

## Доказательство: продолжение

Сфера  $S^2$  пересекает поверхность  $F$  по нескольким простым замкнутым кривым и по кривой с концами  $A, B$ . Каждая окружность разделяет сферу  $S^2$  на две части; одна из них не содержит точек кривой  $AB$ . Без ограничения общности предположим, что пересечение  $F \cap S^2$  состоит из простых замкнутых кривых  $a_1, \dots, a_k$  и одной кривой, соединяющей  $A$  и  $B$ . Окрестность каждой компоненты  $a_i$  в  $F$  выглядит как цилиндр. Вырежем небольшую часть цилиндра, содержащую окружность  $a_i$  и заклеим остальную часть цилиндра небольшими дисками. Если получившаяся поверхность не связна, выберем компоненту, содержащую  $K_1 \# K_2$ . После применения данной операции к каждой окружности мы получим компактную поверхность  $F'$ , содержащую узел  $K_1 \# K_2$  и пересекающуюся со сферой  $S^2$  только по дуге  $AB$ . Операция, описанная выше, может только уменьшать число ручек. Таким образом,  $g(F') \leq g(F)$ . Так как род поверхности  $F$  минимален, мы заключаем, что  $g(F') = g(F) = g(K_1 \# K_2)$ .

## Доказательство: продолжение

Рис. 12: Перестройка поверхности  $F$

# Доказательство: продолжение

Сфера  $S^2$  делит поверхность  $F'$  на поверхности, которые могут рассматриваться как поверхности Зейферта узлов  $K_1$  и  $K_2$ . Таким образом,

$$g(K_1) + g(K_2) \leq g(F') = g(K_1 \# K_2)$$

Учитывая, что мы доказали неравенство “ $\geq$ ”, делаем вывод об аддитивности рода. Доказательство завершено.

## Замечание 2.8

В качестве следствия мы получаем, что нетривиальный узел не может иметь обратного элемента, поскольку только тривиальный узел имеет род 0, род других узлов положителен. Это третье доказательство необратимости нетривиальных узлов — теоремы 1.4.



## Лемма 2.9

Пусть  $L$  и  $M$  — узлы и пусть  $K$  — простой узел, делящий  $L\#M$ .  
Тогда либо  $K$  делит  $L$ , либо  $K$  делит  $M$ .

**Доказательство.** Рассмотрим узел  $L\#M$  вместе с плоскостью  $p$ , пересекающей его в двух точках  $A$  и  $B$  и отделяющей узел  $L$  от узла  $M$ . При переходе от  $\mathbb{R}^3$  к  $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \infty$ , плоскость  $p$  превращается в сферу  $P$ .

Так как  $L\#M$  делится на  $K$ , существует (топологическая) двумерная сфера  $S^2$ , пересекающая узел  $L\#M$  по двум точкам.

Если эта сфера не пересекается со сферой  $P$ , задача решена.

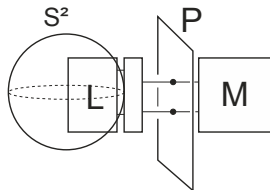
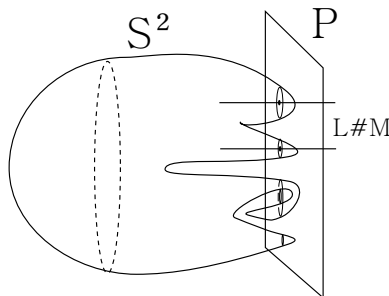


Рис. 13:  $S^2$  не пересекается с  $P$

## Доказательство: продолжение

Без ограничения общности предположим, что сфера  $S^2$  пересекает сферу  $P$  по несвязному набору несамопересекающихся кривых (окружностей). Каждая из этих окружностей на сфере  $P$  либо разделяет точки  $A$  и  $B$ , либо нет. Окружности, не разделяющие  $A$  и  $B$  легко удалить небольшой перестройкой сферы, начиная с тех окружностей, которые не содержат внутри себя других кривых.

Рис. 14:  $S^2$  пересекается с  $P$

## Доказательство: продолжение

При удалении окружностей  $c_i$ , разделяющих точки  $A$  и  $B$ , нужно воспользоваться простотой узла  $K$ . Сфера  $P$  разбивает сферу  $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \infty$  на два трехмерных шара. Пусть  $B_K$  — шар, содержащий узел  $K$ . Рассмотрим связную компоненту сферы  $S^2 \cap B_K$ , содержащую  $c_i$ . Она может быть либо диском, либо цилиндром. В случае цилиндра кривую  $c_i$  можно удалить деформацией сферы  $S^2$  вместе с другой кривой (другим концом того же цилиндра). В первом случае рассматриваемый диск  $D^2$  пересекает узел  $L \# M$  ровно в одной точке. В силу простоты узла  $K$  получаем, что в шаре  $B_K$  узел расположен целиком по одну сторону от диска  $D^2$ . Следовательно, можно удалить диск  $D^2$  и кривую  $c_i$ , его ограничивающую.

В силу вышеизложенного, мы делаем вывод, что если связная сумма  $L \# M$  делится на  $K$ , то один из узлов  $L$  или  $M$  делится на  $K$ .

### Замечание 2.10

Данное фундаментальное утверждение арифметики узлов принадлежит Шуберту, см. [Sch].

Таким образом, имеем:

- 1 Изотопные классы узлов образуют коммутативную полугруппу относительно операции связной суммы; единичным элементом полугруппы является тривиальный узел.
- 2 Нетривиальные узлы не имеют обратных элементов;
- 3 Имеется единственное с точностью до перестановки разложение узлов на простые узлы;
- 4 Число различных простых узлов счетно.

# Теория корней

В маломерной топологии часто применяется лемма о diamante (см. лекцию 5). Иногда, когда нужно найти минимальный представитель некоторого объекта (скажем, поверхность, затягивающую узел), оказывается, что этот представитель будет минимальным с других точек зрения.

Позже мы увидим много примеров работы данного принципа: скажем, когда мы перейдем к виртуальным узлам, мы увидим, что минимальное число классических перекрестков у классического узла реализуется на его классической диаграмме.

Так как число изотопических классов гладких узлов счетно, получаем следующее утверждение:

### Теорема 2.11

*Полугруппа изотопических классов узлов с операцией связной суммы изоморфна полугруппе натуральных чисел с операцией умножения. При этом простые узлы соответствуют простым числам.*

Однако изоморфизм, описанный выше, не канонический, поскольку нет канонического линейного порядка на множестве всех узлов (простых узлов); то есть нельзя сказать, что “(простой узел) правый трилистник соответствует простому числу 2 или простому числу 2017”. Чтобы это сделать, нужно иметь возможность распознать все узлы, что является сложной задачей.

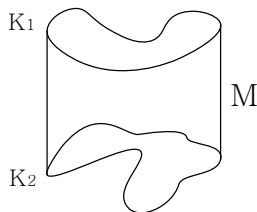
Существует единственная полугруппа с заданными выше свойствами (с точностью до изоморфизма).

В работе [Man5], предложено чисто алгебраическое описание данной полугруппы; то есть строится явный изоморфизм между данной геометрической полугруппой и некоторой построенной алгебраически “скобочной полугруппой”.

## Кобордизмы узлов и срезанные узлы

## Определение 3.1

Два узла  $K_1$  и  $K_2$  называются *кобордантными*, если существует гладко вложенная в  $\mathbb{R}^4$  поверхность  $M \cong S^1 \times [0, 1]$  с краем  $K_1 \sqcup K_2$ . Если узел  $K$  кобордантен тривиальному узлу, то  $K$  называется *срезанным узлом*. Эквивалентно, узел  $K$  — (гладко) *срезанный узел*, если  $K$  ограничивает гладко вложенный двумерный диск  $D$  в  $\mathbb{R}^4$ .

Рис. 15:  $K_1$  и  $K_2$  кобордантны

### Замечание 3.2

Когда мы определяем срезанность узлов, “гладкость” или “локальная плоскость” (см. ниже) вложения  $M$  является необходимым требованием. В противном случае, мы можем затянуть диском любой узел, взяв его конус, см. рис. 16.

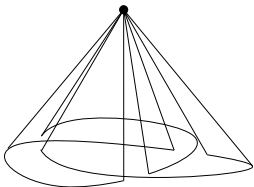


Рис. 16: Конус над узлом  $3_1$



## Лемма 3.3

Пусть  $K$  — узел и  $K^*$  — зеркальное отражение  $K$ . Тогда узел  $K\#K^*$  срезанный.

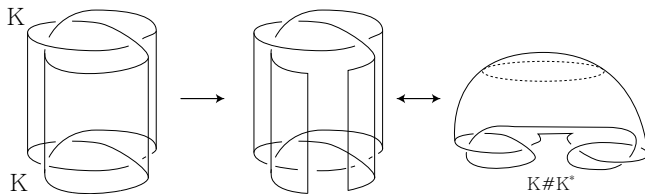


Рис. 17:  $K\#K^*$  — срезанный узел

# Условие Фокса–Милнора

## Теорема 3.4 (Условие Фокса–Милнора)

*Полином Александра срезанного узла разлагается в произведение  $f(t)f(t^{-1})$ , где  $f(t)$  — некоторый многочлен Лорана.*

Доказательство этой теоремы можно найти в [BaVo].

# Топологическая срезанность

## Определение 3.5

Два узла  $K_1$  и  $K_2$  называются *кобордантными*, если существует локально плоско вложенная в  $\mathbb{R}^4$  поверхность  $M \cong S^1 \times [0, 1]$  с краем  $K_1 \sqcup K_2$ . Если узел  $K$  ограничивает локально плоско вложенный двумерный диск  $D$  в  $\mathbb{R}^4$ , то  $K$  называется *топологически срезанным узлом*.

Для топологически срезанных узлов есть прекрасная теорема, доказанная М. Фридманом:

## Теорема 3.6 ([Fre])

*Если полином Александера узла  $K$  равен 1, то узел  $K$  топологически срезанный.*

## Узел Конвея

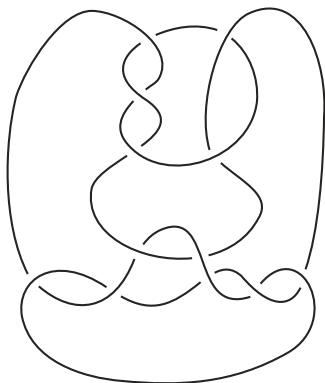


Рис. 18: Узел Конвея  $11_134$  топологически срезанный, но не срезанный

# Ленточные узлы

## Определение 3.7

Пусть  $K$  — узел и  $S(K)$  — его (погруженная) поверхность Зейферта. Если  $S(K)$  является самопересекающимся диском только с ленточными особенностями, то узел  $K$  называется *ленточным*.

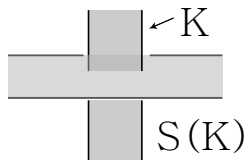


Рис. 19: Ленточная особенность

### Теорема 3.8

*Каждый ленточный узел является срезанным.*

Грубо говоря, каждую ленточную особенность можно устранить в  $\mathbb{R}^4$ , сдвинув внутренность ленты по четвертой координате. Значит, ленточный диск можно превратить во вложенный, что доказывает теорему 3.8.

### Гипотеза 3.9 (гипотеза Фокса)

Каждый срезанный узел является ленточным.

# Упражнения

- 1 Покажите, что операция связной суммы корректно определена, то есть изотопический класс  $K_1 \# K_2$  не зависит от места соединения узлов.
- 2 Покажите, что операция связной суммы коммутативна: для любых  $K_1, K_2$  узлы  $K_1 \# K_2$  и  $K_2 \# K_1$  изотопны.
- 3 Покажите, что каждый изотопический класс узла (зацепления) можно реализовать как кривую (набор кривых), лежащих на некотором теле с ручками, стандартно вложенном в  $\mathbb{R}^3$ .
- 4 Покажите, что род Зейферта для трилистника равен 1.
- 5 Верно ли, что если два узла  $K_1$  и  $K_2$  кобордантны, то узел  $K_1 \# K_2^*$  является срезанным? Верно ли обратное утверждение?

# Исследовательские задачи: сателлитные узлы

## Определение 5.1

Пусть  $K_1$  — узел в полнотории (называемый *шаблоном*) и полноторие завязано в форме второго узла (называемого *узлом-компаньоном*)  $K_2$ . Тогда получающийся из  $K_1$  узел называется *сателлитным узлом*.

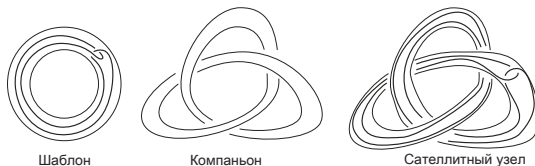


Рис. 20: Сателлитный узел



# Исследовательские задачи: сателлитные узлы (продолжение)

Известно, что связная сумма представляется как сателлитный узел, см. рис. 21.

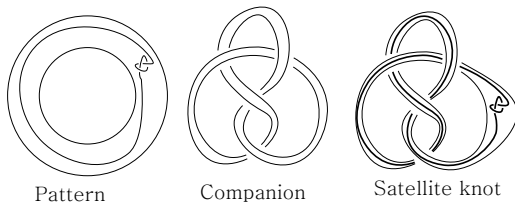


Рис. 21:  $3_1 \# 4_1$

# Исследовательские задачи: сателлитные узлы (продолжение)

Так как нетривиальный узел не имеет обратного элемента по отношению к связной сумме, можно ожидать, что  $cr(K_1 \# K_2) = cr(K_1) + cr(K_2)$  ( $cr$  — минимальное число перекрестков у диаграммы, представляющей данный узел).

## Гипотеза 5.2

(Минимальное) число перекрестков узла аддитивно по отношению к связной сумме.

Данную гипотезу можно переформулировать для сателлитных узлов.

## Гипотеза 5.3

Число перекрестков сателлитного узла больше (более слабый вариант: не меньше), чем число перекрестков компаньона.

# Исследовательские задачи: разложение простых узлов

Простые узлы — это узлы, которые нельзя представить в виде связной суммы нетривиальных узлов. В [Lick] У.Б.Р. Ликориш предложил способ изучения узлов с помощью их разложения на “более мелкие” объекты — *двухструнные простые танглы*, см. рис. 22.

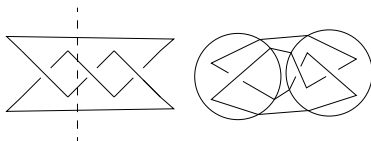


Рис. 22: Разложение трилистника на двухструнные простые танглы








## Теорема 5.4

*Если узел можно разложить на двухструнные простые танглы, то он простой.*






## Гипотеза 5.5

Для простого узла  $K$  число перекрестков  $cr(K) \geq \frac{2}{3}cr(T)$ , где  $T$  — элемент разложения  $K$  на двухструнные простые танглы.

## Литература I

-  V. O. Manturov Knot theory: Second edition CRC press 560 April 4, 2018.
-  K. Murasugi, Knot Theory and Its Applications, Springer.
-  Seifert, H. (1934), Über das Geschlecht von Knoten, *Mathematische Annalen*, **110**, 571–592.
-  Seifert, H. (1935), Die Verschlingungsinvarianten der zyklischen knotenüberlagerungen, *Abh. Math. Sem. Hansischen Univ.*, **11**, ss. 84–101.
-  Prassolov, V.V. (1999), Poverhnost' Seiferta (Seifert Surface), *Mat. Prosveshchenie*, **3**, pp. 116–126.
-  Crowell, R.H. and Fox, R.H. (1963), *Introduction to knot theory*, (New York: Ginn & Co).
-  Manturov, V.O. (2000), The bracket semigroup of knots, *Mathematical Notes*, **67**(4), pp. 571–581.

# Литература II

-  M. Banagl, D. Vogel *The Mathematics of Knots: Theory and Application, Contributions in Mathematical and Computational Sciences, 1*, Springer, p. 61, ISBN 9783642156373 (2010).
-  Haken, W. (1961), Theorie der Normalflächen, *Acta Mathematicae*, **105**, pp. 245–375.
-  Schubert, H. (1949), Die Eindeutige Zerlegbarkeit eines Knotens in Primknoten, *Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften Mathematisch–Naturwissenschaftliche Klasse*, **3**, ss. 57–104.
-  Manturov, V.O.(2002), Knots and the Bracket Calculus, *Acta Applicandae Mathematicae*, **74**(3), pp. 293–336.
-  W. B. R. Lickorish, Prime knots and tangles, *Trans. Amer. Math. Soc.* 267(1) (1981), 321–332.

# Литература III



Hoste, J.; Thistlethwaite, M.; and Weeks, J. "The First 1701936 Knots." *Math. Intell.* 20, 33-48, Fall 1998.



M.H. Freedman, *A surgery sequence in dimension four; the relations with knot concordance*, *Invent Math* 68, 195–226 (1982).  
<https://doi.org/10.1007/BF01394055>.