Лекция 5. Инварианты крашеных узлов, алгебры Конвея и скейн-инварианты

С. Ким, В.О. Мантуров, И.М. Никонов

12 октября 2021

Содержание

Напоминание : инвариант раскрасок

Один из простейших и наиболее известных инвариантов узлов — это p-раскраски Фокса, от которых требуется, чтобы три цвета $a, b, c \in \mathbb{Z}_p$ дуг, инцидентных перекрестку, удовлетворяли соотношению $c = 2b - a \mod p$. Число "правильных" раскрасок является инвариантом узлов.

Обобщением раскрасок Фокса являются раскраски дуг диаграммы элементами конечного квандла $(Q, \circ)$, в которых три цвета $a, b, c \in Q$ дуг, инцидентых перекрестку, удовлетворяют соотношению $c = a \circ b$. Число раскрасок квандлом является инвариантом узлов.

Два типа раскрасок

Чтобы построить новые инварианты, рассмотрим два типа раскрасок:

1. Раскраски *дуг* диаграммы. Раскраска называется *правильной*, если цвета дуг, инцидентных перекрестку удовлетворяют левому соотношению на рис. 1.
2. Раскраски *областей*. Раскраска областей называется *правильной*, если четыре цвета областей, инцидентных перекрестку удовлетворяют соотношению $pa + b - c - pd = 0$, где p — фиксированное обратимое вещественное число, см. рис. 1 справа.

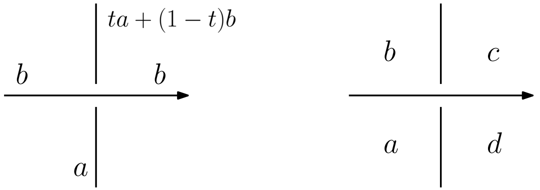

Рис. 1: Два типа раскрасок

Замечание 1.1

Стоит заметить, что различие между двумя типами раскрасок в точности соответствует различию между *копредставлением Виртингера* (дуги) и *копредставлением Дена* (области).

Взвешенные раскраски

Идея усилить инвариант раскрасок заключается в том, чтобы приписать “вес” каждой раскраске и рассмотреть мультимножество весов; число элементов этого мультимножества есть число раскрасок.

Зафиксируем кольцо R и его обратимый элемент $p \in R$. Рассмотрим раскраски второго типа (раскраски областей) элементами R. Обозначим множество правильных раскрасок через A.

Наша цель — определить *вес перекрестка* для заданной раскраски $x \in A$ так, чтобы для каждой раскраски $x \in A$ сумма весов $w(x)$ перекрестков диаграммы было инвариантным при движениях Рейдемейстера .

Построение весов

Рассмотрим следующие функции

$$w_1(a,b,c,d) = (a-c)(b-d)(a-d)(a+d),$$

$$w_2(a,b,c,d) = (a-c)(b-d)(a-d)(b+c),$$

$$w_3(a,b,c,d) = (a-c)(b-d)(b-c)(a+d),$$

$$w_4(a,b,c,d) = (a-c)(b-d)(b-c)(b+c)$$

и многочлены (ниже мы объясним их выбор)

$$f_1(p) = (2p+1)(p^2+1),$$

$$f_2(p) = -(p+2)(p^2+1),$$

$$f_3(p) = -p(2p+1)(p^2+1),$$

$$f_4(p) = p(p+2)(p^2+1).$$

Построение весов : продолжение

Теперь выберем произвольные многочлены $x_1, x_2, x_3, x_4 \in R$. Положим

$$f = x_1 f_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + f_4 x_4. \tag{1}$$

Определение 1.2

Определим *вес перекрестка* как функцию

$$w = x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 w_3 + x_4 w_4,$$

а *вес* $w(x)$ *раскраски* $x \in A$ как сумму весов все перекрестков диаграммы.

Основная теорема звучит так:

Теорема 1.3

Если p — корень многочлена f, определенного формулой (1), то вес $w(x)$ раскраски $x \in A$ является инвариантом узлов (с заданной раскраской областей).

Очевидно, что мультимножество весов всех раскрасок является инвариантом узлов. Далее, используя данное мультимножество, мы различим левый и правый трилистники.

Замечание 1.4

Инвариант $w(x)$ является примером когомологического инварианта кванддлов.

Напоминание

Теорема 1.5

Две ориентированные диаграммы D_1 и D_2 гладких зацеплений соответствуют эквивалентным зацеплениям тогда и только тогда, когда диаграмму D_1 можно преобразовать в D_2 с помощью конечной последовательности плоских изотопий и трех ориентированных движений Рейдемейстера $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_2', \Omega_3$, см. рис. 2.

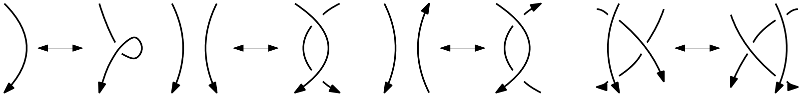

Рис. 2: Ориентированные движения Рейдемейстера $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_2', \Omega_3$

Доказательство: первое движение Рейдемейстера

Рассмотрим четыре петли, которые могут появиться при первом движении Рейдемейстера. Во-первых, в силу обратимости p цвета областей однозначно определяются. Следовательно, имеется биекция между раскрасками начальной диаграммы и диаграммы после движения. Во-вторых, два из четырех цветов областей относятся к одной области (a и c либо b и d), так что вес образованного перекрестка равен нулю, а значит, вес раскраски не меняется.

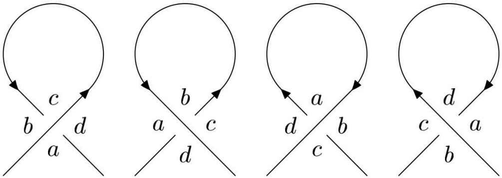

Рис. 3: Четыре петли, которые могут появиться при первом движении Рейдемейстера

Доказательство: второе движение Рейдемейстера

В случае второго движения, условие правильности раскраски дает два уравнения $pz + y - x - pt = 0$ и $pt + x - y - pz = 0$. Так как p обратимо, оба уравнения дают единственное решение для t. Следовательно, имеется биекция между правильными раскрасками диаграмм до и после второго движения. Правильные раскраски двух перекрестков, участвующих во втором движении дают два слагаемых в сумму весов. Так как функции w_i удовлетворяют равенству $w_i(a, b, c, d) = -w_i(d, c, b, a)$, Эти два слагаемых сокращаются, так что вес раскраски не меняется при втором движении Рейдемейстера.

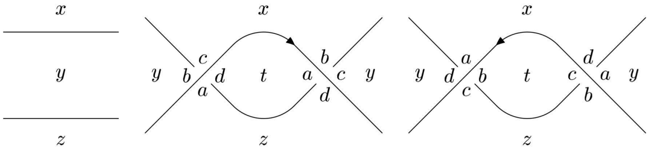

Рис. 4: Правильные раскраски до и после второго движения Рейдемейстера

Доказательство: второе движение Рейдемейстера

Как известно, достаточно рассматривать только один случай третьего движения Рейдемейстера, изображенный на рис. 5.

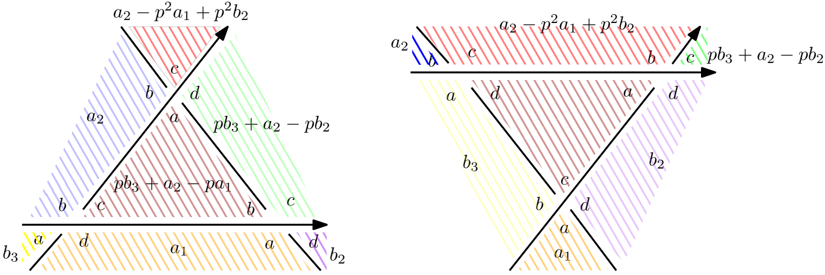

Рис. 5: Правильные раскраски до и после третьего движения Рейдемейстера

Как и ранее, обратимость p гарантирует существование биекции между правильными раскрасками диаграмм до и после третьего движения. Посмотрим, что происходит при третьем движении Рейдемейстера. Вычисления показывают, что инвариантность веса эквивалентна следующему соотношению:

$$\begin{aligned} w(b_3, a_2, pb_3 + a_2 - pa_1, a_1) &\quad + \\ w(a_1, pb_3 + a_2 - pa_1, pb_3 + a_2 - pb_2, b_2) &\quad + \\ w(pb_3 + a_2 - pa_1, a_2, a_2 - p^2 a_1 + p^2 b_2, pb_3 + a_2 - pb_2) &\quad - \\ w(a_1, b_3, pa_1 + b_3 - pb_2, b_2) &\quad - \\ w(b_3, a_2, a_2 - p^2 a_1 + p_2^b, pa_1 + b_3 - pb_2) &\quad - \\ w(pa_1 + b_3 - pb_2, a_2 - p^2 a_1 + p^2 b_2, pb_3 + a_2 - pb_2, b_2) &\quad = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Рассмотрим левую часть соотношения 2. Пусть $w = w_i$ для всех $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Мы можем преобразовать левую часть соотношения 2 к выражению вида $f_i(p)g(p, a_1, a_2, b_2, b_3)$ для всех $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, где g — некоторая функция, а f_i были определены выше.

Напомним, что $w = \sum x_i w_i$. Другими словами, левая часть соотношения 2 равна

$$\sum (x_i(p) f_i(p)) g(p, a_1, a_2, b_2, b_3) = f(p) g(p, a_1, a_2, b_2, b_3).$$

Так как p — корень многочлена f, соотношение 2 выполнено. Теорема доказана.

Пример: трилистник

Из упражнения 10 лекции 1 мы знаем, что 3-раскраски Фокса не могут различить левый и правый трилистники. Покажем, что их можно различить с помощью весов раскрасок.

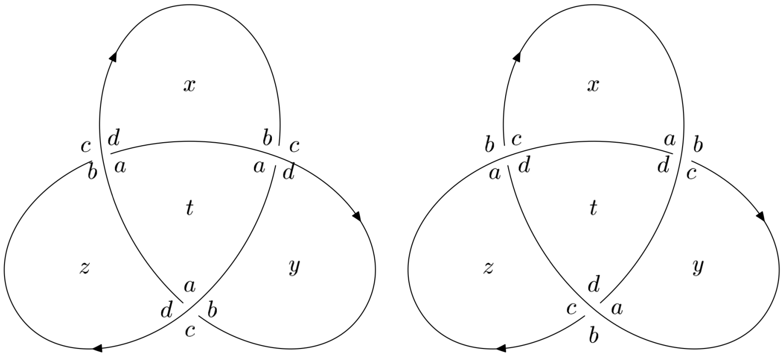

Рис. 6:

Пусть $R = \mathbb{Z}_3$ и $p = 1$. Пусть $w = w_1$ (то есть, $x_1 = 1, x_2 = x_3 = x_4 = 0$). Известно, что число правильных раскрасок областей у левого и правого трилистника цветами из R равно 9.
В случае левого трилистника мы получаем набор весов

$$\{0, 0, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2\},$$

однако для правого трилистника набор весов равен

$$\{0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}.$$

Поэтому они не эквивалентны.

Алгебра Конвея

Основная идея заключается в следующем. В отличие от предыдущего подхода, где мы связывали специальный алгебраический объект с **каждым зацеплением**, здесь мы строим некоторый алгебраический объект и связываем с зацеплением некоторый **элемент** этого объекта. Данные элементы оказываются инвариантами зацеплений.

Предупреждение. Сейчас мы введем две операции, $\circ$ и $/$. Они имеют **другой смысл и другие свойства** по сравнению с соответствующими операциями квандла.

Пусть A — алгебра с двумя бинарными операциями $\circ$ и $/$, для которых выполняются следующие свойства: для всех $a, b \in A$ имеем $(a \circ b)/b = a, (a/b) \circ b = a$. Для каждой (диаграммы) зацепления L, построим элемент $W(L)$ алгебры A следующим образом. Обозначим через a_n элементы A, соответствующие тривиальным зацеплениям с n компонентами.

Алгебра Конвея : продолжение

Потребуем также, чтобы выполнялось следующее алгебраическое соотношение для каждой *тройки Конвея* (т.е. трех диаграмм, совпадающих вне малого диска и выглядящих как , ,  внутри него; такие диаграммы называются *тройкой Конвея*):

$W($$) = W($$) \circ W($$).$ (3)

Единственность обратного элемента означает, что нужно потребовать существование обратной операции $/$, такой что $W($$)/W($$) = W($$)$. Таким образом, W будет отображением из множества всех зацеплений в построенный алгебраический объект. Ниже мы увидим, что частные случаи уравнения (3) совпадают с некоторыми скейн-соотношениями.

Алгебра Конвея : продолжение

Учтите следующее обстоятельство: поскольку каждое зацепление можно сделать тривиальным (восходящим) (упражнение 4 лекции 1) с помощью переключения перекрестков, то значение функции W на любом зацеплении с m компонентами и n перекрестками можно выразить через значение функции W на тривиальном зацеплении с m компнентами и значения W на зацеплениях с меньшим числом перекрестков (см. [Prz]).
В свою очередь, они также выражаются через a_i и значения W на зацеплениях с числом перекрестков, меньшим $n-1$. Следовательно, для каждого зацепления L с произвольным числом перекрестков, значение $W(L)$ можно выразить (возможно, разными способами) через $a_i, i = 1, 2, \ldots,$ с помощью $\circ$ и $/$.

Алгебра Конвея : продолжение

Сейчас мы не знаем, будет ли функция W корректно определена, и если так, будет ли она инвариантом зацеплений. Посмотрим на алгебру A и найдем ограничения на единственность определения. Рассмотрим диаграмму тривиального зацепления с n компонентами, которая имеет только один перекресток на одной окружности. Значение W на данном тривиальном зацеплении равно a_n. В зависимости от типа перекрестка, соотношение (3) сводится к

$$a_n = a_n \circ a_{n+1} \tag{4}$$

или

$$a_n = a_n / a_{n+1}. \tag{5}$$

Данные соотношения должны выполняться для всех $n \geq 1$.

Еще одно ограничение на алгебру вытекает из "замены порядка". Рассмотрим диаграмму L и выберем два (скажем, положительных) перекрестка p, q на ней, см. рис. 7.
Обозначим через $L_{\alpha\beta}$ для $\alpha, \beta \in \{+, -, 0\}$ диаграмму зацепления, совпадающую с L вне малых окрестностей точек p, q и имеющую тип α в p и тип β в q.
Рассмотрим соотношение (3) в p, а затем в q. Получаем:

$$W(L_{++}) = W(L_{-+}) \circ W(L_{0+}) = (W(L_{--}) \circ W(L_{-0})) \circ (W(L_{0-}) \circ W(L_{00})).$$

Теперь рассмотрим то же соотношение сначала в q, а затем p (в другом порядке). Имеем:

$$W(L_{++}) = W(L_{+-}) \circ W(L_{+0}) = (W(L_{--}) \circ W(L_{0-})) \circ (W(L_{-0}) \circ W(L_{00})).$$

Сравнивая данные тождества, получаем:

$$(a \circ b) \circ (c \circ d) = (a \circ c) \circ (b \circ d), \qquad (6)$$

где $a = W(L_{--}), b = W(L_{0-}), c = W(L_{-0}), d = W(L_{00})$.
Мы потребуем выполнения уравнения (6) для произвольных a, b, c, d, являющихся элементами алгебры, которую мы строим.

В случае, когда оба перекрестка p и q отрицательные, мы получаем аналогичное уравнение

$$(a/b)/(c/d) = (a/c)/(b/d). \tag{7}$$

Точно так же, когда один перекресток положительный, а другой отрицательный, имеем уравнение

$$(a/b) \circ (c/d) = (a \circ c)/(b \circ d). \tag{8}$$

Таким образом, мы нашли необходимые условия, чтобы $W(L)$ было корректно определено. Покажем, что эти условия являются достаточными.

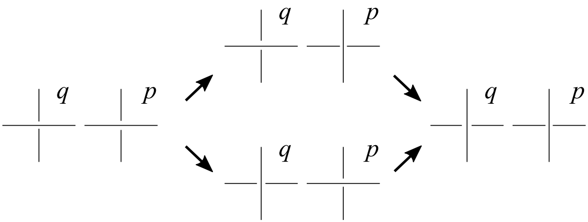

Рис. 7: Два способа разведения двух перекрестков

Определение 2.1

Алгебра A с двумя операциями $\circ$ и $/$ (обратными друг к другу) и фиксированной последовательностью элементов a_n называется *алгеброй Конвея*, если выполнены соотношения (4)–(8).

Теорема 2.2

Для каждой алгебры Конвея существует единственная функция $W(L)$ на диаграммах зацепления, которая принимает значение a_n на диаграммах тривиального зацепления с n компонентами и удовлетворяет соотношению (3). *Эта функция является инвариантом ориентированных зацеплений.*

Набросок доказательства теоремы 2.2

Грубо говоря, инвариант $W(D)$ построен

1. мы приводим диаграмму D к тривиальной диаграмме, применяя переключения и разведения перекрестков, возникающие в скейн-соотношении

   $W($$) = W($$) \circ W($$).$

2. мы присваиваем a_n полученным тривиальным диаграммам с n компонентами. В конце мы получим слово, состоящее из $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\circ$, и $/$.

Также мы доказываем, что значение инварианта не зависит от порядка применения скейн-соотношения к перекресткам для получения тривиальной диаграммы.

Набросок доказательства теоремы 2.2 : продолжение

Стоит заметить, что доказательство теоремы 2.2 тесно связано с "леммой о диаманте". Грубо говоря, если мы применяем два преобразования A и B к объекту, то результаты, полученные в порядке применения: A, потом B, или B, потом A,— совпадают. Ниже приведена точная формулировка.

Лемма 2.3 (Лемма о диаманте [Newman, 1942])

Если отношение $\to$ обладает свойством конечности и свойством диаманта, то любой объект имеет единственный корень.

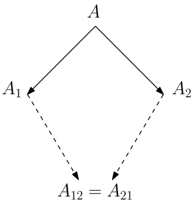

Рис. 8: Лемма о диаманте

Набросок доказательства теоремы 2.2 : продолжение I

Изложим схему доказательства:
Введем на диаграмме L дополнительную структуру: нумерацию компонент и выбор базовой точки на каждой компоненте. Структура однозначно задает восходящую диаграмму $L^{\uparrow}$, которую можно получить из переключением перекрестков исходной диаграммы. Перекрестки, в которых диаграммы L и $L^{\uparrow}$ различаются назовем *плохими*.
Теперь сопоставим диаграмме L с дополнительной структурой элемент $W(L)$ алгебры A, обладающий свойствами:

- элемент $W(L)$ однозначно определен;
- элементы $W(L)$ удовлетворяют соотношению (3);
- элемент $W(L)$ не зависит от выбора базовых точек;
- элемент $W(L)$ инвариантен при движениях Рейдемейстера;
- элемент $W(L)$ не зависит от нумерации компонент.

Свойства доказываются последовательно с использованием вложенной индукции:

1. по общему числу перекрестков k;

Набросок доказательства теоремы 2.2 : продолжение II

2. по числу плохих перекрестков m.

Обозначим множество диаграмм с k перекрестками через C_k.
База индукции: $k = 0$. Для любой диаграммы $L \in C_0$ полагаем $W(L) = a_n$, где n — число компонент L.
Шаг индукции. Предположим, что все свойства верны для C_{k-1}. Для C_k докажем свойства по порядку индукцией по m.
Определение $W(L)$: при $m = 0$ $(L = L^{\uparrow})$ полагаем $W(L^{\uparrow}) = a_n$, шаг индукции делаем, используя соотношение (3) как определение.
Тождества (6)-(8) гарантируют, что элемент $W(L)$ не зависит от порядка переключения плохих перекрестков.
Равенство (3) следует из определения элемента $W(L)$.
Для доказательства независимости значения $W(L)$ от выбора базовых точек, достаточно рассмотреть перемещение одной базовой точки через перекресток. Если тип перекрестка (хороший или плохой) не меняется при перемещении точки, то значение $W(L)$ сохраняется. Если тип перекрестка меняется, то он чистый. Применяем индукцию по m. Для $m = 0$ $(L = L^{\uparrow})$ получаем равенство $W'(L^{\uparrow}) = W'(L'^{\uparrow}) \circ W'(L_0^{\uparrow}) = a_n \circ a_{n+1}$, так как

Набросок доказательства теоремы 2.2 : продолжение III

диаграммы $L'^{\uparrow}$ и $L_0^{\uparrow}$ оказываются восходящими и тривиальными. Шаг индукции осуществляется с помощью равенства (3).

Инвариантность при движениях Рейдемейстера также доказывается индукцией по m. Заметим, что подходящим выбором базовой точки можно упростить проверку: сделать перекрестки, участвующие в первом и втором движении хорошими, а в случае третьего движения сделать хорошими два перекрестка из трех.

Завершает доказательство проверка независимости инварианта $W(L)$ от нумерации компонент.

Покажем, что полином Джонса является частным случаем инварианта W для некоторой специальной алгебры A. Аналогично, полином Конвея и полином HOMFLY-PT, которые будут определены в следующем разделе, также можно получить из алгебры Конвея.

Мы доказали, что на каждой алгебре Конвея определен инвариант ориентированных зацеплений $W(\cdot) \in A$. Среди всех алгебр Конвея есть одна универсальная алгебра A_U. Она порождается образующими $a_n, n \geq 1$ и не имеет других соотношений, кроме (4)–(8). Универсальный инвариант зацеплений, соотвествующий универсальной алгебре, является самым сильным среди инвариантов, полученных при помощи данной конструкции. Однако у него есть существенный недостаток: сложно проверить, соответствуют ли два выражения одному и тому же элементу алгебры A_U.
Сейчас мы покажем, как построить семейство алгебр Конвея. Инварианты, которые им соответствуют, удобны для вычислений.

Пусть A — произвольное коммутативное кольцо с единицей и $a_1 \in A$ и α, β — некоторые обратимые элементы в A. Определим операции $\circ, /$ следующим образом:

$$x \circ y = \alpha x + \beta y \tag{9}$$

и

$$x/y = \alpha^{-1} x - \alpha^{-1} \beta y, \tag{10}$$

где

$$a_n = (\beta^{-1}(1-\alpha))^{n-1} a_1, n \geq 1. \tag{11}$$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2.4

Для любого выбора обратимых элементов α, β и элемента a_1 кольцо A с операциями $\circ, /$, определенными выше, и элементами a_n, см. (11), является алгеброй Конвея.

Доказательство сводится к прямой проверке аксиом.

Пример 2.5

Пусть $A = \mathbb{Z}[v^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$. *Заметим, что замена* $\alpha = v^2, \beta = vz$ *приводит к алгебре Конвея* $(\mathbb{Z}[v^{\pm 1}, z^{\pm 1}], \circ, /, \{a_n\}_{n=1}^{\infty})$. *Кроме того, инвариант* W, *определенный для данной алгебры Конвея* $(\mathbb{Z}[v^{\pm 1}, z^{\pm 1}], \circ, /, \{a_n\}_{n=1}^{\infty})$ *называется* полином HOMFLY-PT.

Скейн-соотношения для полиномиальных инвариантов

Полином Александера–Конвея

$$\begin{aligned}\nabla(\ ) - \nabla(\ ) &= z\nabla(\ ),\\ \nabla(O) &= 1\end{aligned}$$

Полином Джонса

$$\begin{aligned}a^{-4}X(\ ) - a^{4}X(\ ) &= (a^{2} - a^{-2})X(\ ),\\ X(O) &= 1\end{aligned}$$

полином HOMFLY-PT

$$\begin{aligned}v^{-1}P(\ ) - vP(\ ) &= zP(\ ),\\ P(O) &= 1\end{aligned}$$

Полином Кауфмана от двух переменных

$$D(\;) - D(\;) = z(D(\;) - D(\;));$$

$$D(\bigcirc) = \left(1 + \frac{a - a^{-1}}{z}\right);$$

$$D(X\#\;) = aD(X),\; D(X\#\;) = a^{-1}D(X).$$

Полином Дубровник

$$D(\;) + D(\;) = z(D(\;) + D(\;));$$

$$D(\bigcirc) = \left(-1 + \frac{a - a^{-1}}{z}\right);$$

$$D(X\#\;) = aD(X),\; D(X\#\;) = a^{-1}D(X).$$

Некоторые обобщения

Заметим, что полиномы Джонса, Александера и HOMFLY-PT определяются с помощью одного скейн-соотношения. В 2017 Л.Х. Кауфман и С. Ламброполу [4] построили новый полиномиальный инвариант от 4 переменных, который обобщает полиномы HOMFLY-PT, Дубровник и Кауфмана. Грубо говоря, новый полином получается с использованием ДВУХ скейн-соотношений: одного для чистых перекрестков, другого — для смешанных.

На уровне алгебр Конвея со скейн-соотношением связана пара операций $\circ$ и $/$. Это означает, что если мы хотим использовать два скейн-соотношения, как в [4], нам понадобятся две пары операций. В работе [7] С. Кима было построено обобщение алгебры Конвея с двумя парами бинарных операций (т.е. с четырьмя операциями).

Кроме того, алгебры Конвея можно обобщить на двумерные зацепления в $\mathbb{R}^4$, задаваемые с помощью *меченых диаграмм* и движений Ёшикавы. Подробности см. в [8].

Упражнения

1. Докажите, что число правильных раскрасок *областей* является инвариантом.
2. Проверьте вычисления инварианта взвешенных раскрасок для трилистников на с. 16.
3. Пусть $\mathcal{A} = \mathbb{Z}[p^{\pm 1}, q^{\pm 1}]$. Определим бинарные операции $\circ$ и $/$ так:

$$a \circ b = pa + qb \text{ and } a/b = p^{-1}a - p^{-1}qb.$$

Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность, задаваемая рекуррентной формулой

$$a_1 = 1 \text{ and } (1-p)a_n = qa_{n+1}.$$

Докажите, что $(\mathbb{Z}[p^{\pm 1}, q^{\pm 1}], \circ, /, \{a_n\}_{n=1}^{\infty})$ — алгебра Конвея.

4. Пусть $\mathcal{A} = \mathbb{Z}[p^{\pm 1}, q^{\pm 1}, r^{\pm 1}]$. Определим бинарные операции $\circ$ and / так:

$$a \circ b = pa + qb + r \text{ and } a/b = p^{-1}a - p^{-1}qb - p^{-1}r.$$

Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность, задаваемая рекуррентной формулой

$$a_1 = 1 \text{ and } (1-p)a_n = qa_{n+1} + r.$$

Докажите, что $(\mathbb{Z}[p^{\pm 1}, q^{\pm 1}, r^{\pm 1}], \circ, /, \{a_n\}_{n=1}^{\infty})$ — алгебра Конвея.

5. * Зафиксируем натуральное число k. Пусть $\mathcal{A}$ — коммутативное кольцо с единицей, содержащее $\mathbb{Z}[p^{\pm 1}, q^{\pm 1}]$, и такое что $\sqrt[k]{f} \in \mathcal{A}$ для всех $f \in \mathcal{A}$, здесь $\sqrt[k]{f}$ — формальный корень k−й степени, то есть, $(\sqrt[k]{f})^k = \sqrt[k]{f^k} = f$ и $(\sqrt[k]{f})(\sqrt[k]{g}) = (\sqrt[k]{fg})$ для $f, g \in \mathcal{A}$. Определим бинарные операции $\circ, /$ формулой

$$a \circ b = \sqrt[k]{pa^k + qb^k}, \quad a/b = \sqrt[k]{p^{-1}a^k - p^{-1}qb^k}$$

для $a, b \in \widehat{\mathcal{A}}$. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность, задаваемая рекуррентной формулой

$$a_1 = 1, a_{n+1}^k = \frac{(1-p)}{q}a_n^k.$$

Докажите, что $(\mathcal{A}, \circ, /, \{a_n\}_{n=1}^{\infty})$ — алгебра Конвея.

Упражнения :Обобщенная алгебра Конвея

Определение 4.1

Пусть $\widehat{\mathcal{A}}$ — множество с четырьмя бинарными операциями $\circ, *, /$ and $//$ on $\widehat{\mathcal{A}}$. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \widehat{\mathcal{A}}$. Шестерка $(\widehat{\mathcal{A}}, \circ, /, *, //, \{a_n\}_{n=1}^{\infty})$ называется *обобщенной алгеброй Конвея типа* 1, если выполнены следующие соотношения:

(A) $(a \circ b)/b = (a/b) \circ b = a = (a * b)//b = (a//b) * b$ для $a, b \in \widehat{\mathcal{A}}$,

(B) $a_n = a_n \circ a_{n+1}$ для $n = 1, 2, \cdots$,

(C) $(a \circ b) \circ (c \circ d) = (a \circ c) \circ (b \circ d)$ для $a, b, c, d \in \widehat{\mathcal{A}}$,

(D) $(a * b) * (c * d) = (a * c) * (b * d)$ для $a, b, c, d \in \widehat{\mathcal{A}}$,

(E) $(a \circ b) \circ (c * d) = (a \circ c) \circ (b * d)$ для $a, b, c, d \in \widehat{\mathcal{A}}$,

(F) $(a * b) * (c \circ d) = (a * c) * (b \circ d)$ для $a, b, c, d \in \widehat{\mathcal{A}}$,

(G) $(a \circ b) * (c \circ d) = (a * c) \circ (b * d)$ для $a, b, c, d \in \widehat{\mathcal{A}}$.

Упражнения:Обобщенная алгебра Конвея:продолжение

Теорема 4.2

Пусть $\mathcal{L}$ - множество ориентированных зацеплений. Пусть $(\widehat{\mathcal{A}}, \circ, /, *, //, \{a_n\}_{n=1}^{\infty})$ — обобщенная алгебра Конвея. Существует единственный инвариант классических ориентированных зацеплений $\widehat{W} : \mathcal{L} \to \widehat{\mathcal{A}}$, подчиняющийся следующим правилам:

1. *Для каждого чистого перекрестка c выполнено соотношение:*
$$\widehat{W}(L_+^c) = \widehat{W}(L_-^c) \circ \widehat{W}(L_0^c). \tag{12}$$
2. *Для каждого смешанного перекрестка c выполнено соотношение:*
$$\widehat{W}(L_+^c) = \widehat{W}(L_-^c) * \widehat{W}(L_0^c). \tag{13}$$
3. *Пусть T_n — тривиальное зацепление с n компонентами. Тогда*
$$\widehat{W}(T_n) = a_n. \tag{14}$$

Инвариант $\widehat{W}$ называется обобщенным инвариантом типа Конвея.

Упражнения:Обобщенная алгебра Конвея:продолжение

Пример 4.3

Пусть $\widehat{\mathcal{A}} = \mathbb{Z}[p^{\pm 1}, q^{\pm 1}, r]$. *Определим бинарные операции* $\circ, *, /$ *and* $//$ *так:*

$$a \circ b = pa + qb, \quad a/b = p^{-1}a - p^{-1}qb,$$
$$a * b = pa + rb, \quad a//b = p^{-1}a - p^{-1}rb.$$

Обозначим $a_n = (\frac{1-p}{q})^{n-1}$ *для всех* n. *Тогда* $(\widehat{\mathcal{A}}, \circ, /, *, //, \{a_n\}_{n=1}^{\infty})$ — *обобщенная алгебра Конвея.*

Упражнение Вычислите обобщенный инвариант типа Конвея для зацепления Хопфа и колец Борромео для обобщенной алгебры Конвея из примера 4.3.

Исследовательские задачи 1

В работе [5] В.О. Мантуров определил алгебраическую структуру с двумя операциями "кружочек-звездочка", так называемый *длинный квандл*, а также инвариант раскрасок длинных (виртуальных) узлов с помощью длинного квандла.

Более точно, мы раскрашиваем дуги возле перекрестка с помощью операции "кружочек", если проход идет раньше перехода, в противном случае мы используем операцию "звездочка". Подробности см. в [5].

Вопрос

Обобщить раскраски областей и взвешенные раскраски для длинных квандлов.

Исследовательские задачи 2

В работе [6] Д.П. Ильютко и В.О. Мантуров построили следующий инвариант “со значениями в картинках”. А именно, раскрасим (полу)дуги элементами некоторого биквандла и каждой раскраске сопоставим формальную сумму графов, получаемую в результате применения скейн-соотношений, показанных на 9.
Оказывается, что мультимножество, составленное из таких сумм для всех возможных правильных раскрасок, инвариантно при движениях Рейдемейстера.

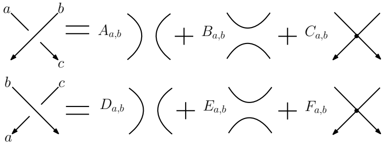

Рис. 9: Скейн-соотношение для раскраски биквандлом

Вопрос

- Попробуйте построить инвариант со значениями в картинках для раскрасок областей и взвешенных раскрасок.
- Попробуйте обобщить алгебру Конвея, чтобы получить инварианты в картинках.

Исследовательские задачи 3

Заметим, что полиномиальные инварианты (например, полином Александера, полином Джонса и т.д.) определяются линейными скейн-соотношениями: $L_+ = pL_- + qL_0$.

Но как показано в упражнении 5, существуют алгебры Конвея, у которых бинарные операции *нелинейны*

$$a \circ b = \sqrt[k]{pa^k + qb^k}, \quad a/b = \sqrt[k]{p^{-1}a^k - p^{-1}qb^k},$$

и следовательно, определяют инвариант с *нелинейными скейн-соотношениями* в перекрестках. Ожидается, что инварианты с нелинейными скейн-соотношениями дадут новую точку зрения на зацепления.

Вопрос

Найти модели алгебр Конвея с нелинейными бинарными операциями.

Литература I

- V. O. Manturov Knot theory: Second edition CRC press 560 April 4, 2018.
- R. Deviatov, *Combinatorial knot invariants that detect trefoils*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications Vol. 18, No. 9 (2009) 11193–1203.
- K. Murasugi, Knot Theory and Its Applications, Springer.
- Freyd, P., Yetter, D., Hoste, J., Lickorish, W.B.R, Millett, K.C. and Ocneanu A. (1985), A new polynomial invariant of knots and links, *Bull. Amer. Math. Soc.* **12**, pp. 239–246.
- Przytycki, J. H. and Traczyk, P.(1987), Invariants of Conway type, *Kobe J. Math.*, **4**, pp. 117–139.
- Przytycki, J. H. (2017), *KNOTS:From combinatorics of knot diagrams to combinatorial topology based on knots*, Cambridge University Press, *Kobe J. Math.*, **4**, pp. 117–139.

Литература II

- L.H.Kauffman,S.Lambropoulou, *New invariants of links and their state sum models*, arXiv:1703.03655v2 [math.GT] 15 Mar 2017.
- M. H. A. Newman, “On theories with a combinatorial definition of equivalence”, *Math. Ann.*, 1942, **43**, 2, pp. 223–243
- V.O. Manturov, *Long virtual knots and their invariants*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications Vol. 13, No. 8 (2004) 1029 –1039.
- D.P. Ilyutko, V.O. Manturov, *Picture-valued parity-biquandle bracket*, Journal of Knot Theory and its Ramifications, 29, No. 2 (2020), 2040004-1– 2040004-22.
- S. Kim, *On the generalization of Conway algebra*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, 27, No.2 (2018), 1850014-1–1850014-20.

Литература III

Y. Bae, S. Choi, S. Kim, *On generalizations of a Conway algebra for oriented surface-links via marked graph diagrams*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications Vol. 27, No. 13 (2018) 1842014.