Лекция 4. Дистрибутивный группоид (квандл) — почти полный инвариант узлов

С. Ким, В.О. Мантуров, И.М. Никонов

05 октября 2021

Содержание

Инвариант раскрасок

Прежде всего, вспомним о простейшем инварианте узлов — инварианте раскрасок. Почему удается построить инвариантную функцию такими простыми средствами?

Тот факт, что данный инвариант связан с гомоморфизмами группы узла в симметрическую группу S_3 объясняет немногое: аналогичная конструкция для большего числа цветов не работает.

Попробуем использовать больше цветов. Пусть Γ — произвольное конечное множество (конечность нужна, чтобы можно было *пересчитать* все раскраски); элементы множества Γ назовем *цветами*.

Предположим, что на Γ есть бинарная операция $\alpha : \Gamma \times \Gamma \to \Gamma$; ее результат будем обозначать через $a \circ b \equiv \alpha(a, b)$.

Определение 1.1

Под *правильной раскраской* диаграммы D ориентированного зацепления K в цвета множества Γ мы понимает способ сопоставить цвет каждой дуге диаграммы D так, чтобы каждая дуга перехода (цвета b) и дуги прохода по правую сторону (цвета a) и по левую сторону (цвета c) от нее были связаны соотношением $a \circ b = c$, см. рис. 1.

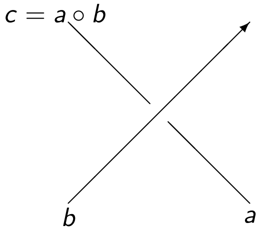

Рис. 1: Правило раскрашивания

Соотношения на операцию $\circ$

Какие условия нужно потребовать от операции $\circ$, чтобы число правильных раскрасок не менялось при движениях Рейдемейстера?

Первое движение Рейдемейстера Несложно показать, что инвариантность функции раскрасок относительно движения Ω_1 следует из свойства идемпотентности $a \circ a = a$ для всех элементов $a \in \Gamma$, которые могут играть роль цвета дуги узла. Однако для простоты мы не будем ограничиваться только такими элементами и потребуем, чтобы $\forall a \in \Gamma : a \circ a = a$.

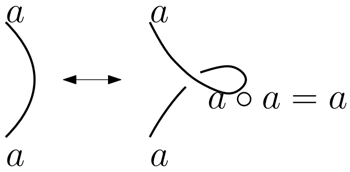

Рис. 2: $a \circ a = a$

Соотношения на операцию $\circ$: продолжение

Второе движение Рейдемейстера Аналогично, инвариантность при движении Ω_2 требует левой обратимости операции $\circ$: для любых a и b из Γ, уравнение $x \circ a = b$ должно иметь единственное решение $x \in \Gamma$.

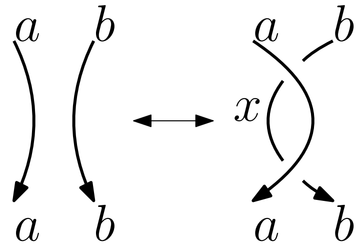

Рис. 3: Для любых a, b, $\exists! x$ такое что $x \circ a = b$

Обратная операция к $\circ$ будет обозначаться через $/$. Точнее, элемент b/a определяется как единственное решение уравнения $x \circ a = b$.

Соотношения на операцию $\circ$: продолжение

Третье движение Рейдемейстера

Наконец, инвариантность при движении Ω_3 соответствует *правой самодистрибутивности* операции $\circ$, то есть $\forall a, b, c \in \Gamma$ имеет место равенство $(a \circ b) \circ c = (a \circ c) \circ (b \circ c)$.

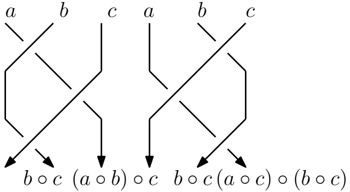

Рис. 4: Для любых a, b, c, $(a \circ b) \circ c = (a \circ c) \circ (b \circ c)$.

В дальнейшем, любое множество с операцией $\circ$, удовлетворяющей трем описанным выше свойствам, будет именоваться *квандлом (дистрибутивным группоидом)*.

Каждый квандл задает правило раскрашивания диаграмм зацеплений, описанное выше.
Таким образом, мы приходим к следующему утверждению.

Утверждение 1.2

Число правильных раскрасок элементами произвольного квандла является инвариантом зацеплений.

Замечание 1.3

Квандлы были независимо открыты С.В. Матвеевым [6] и Д. Джойсом [7]. В работах Матвеева и других русских авторов, данный инвариант носит название *дистрибутивный группоид*; в западной литературе принят термин *квандл*.

Копредставление кандла

Распространенным способом построения кандлов является их задание с помощью образующих и соотношений.
Пусть A — алфавит, состоящий из *букв*. *Слово* в алфавите A — это произвольная последовательность букв из A и символов $(,), \circ, /$.
Теперь по индукции определим множество $D(A)$ *допустимых слов*, используя следующие правила:

1. Для любого $a \in A$ слово, состоящее из одной буквы a, допустимо.
2. Если слова W_1, W_2 допустимы, то слова $(W_1) \circ (W_2)$ и $(W_1)/(W_2)$ также допустимы.
3. Не существует допустимых слов, помимо полученных в результате применения правил 1 и 2.

Иногда мы будем опускать скобки, если они могут быть однозначно восстановлены из контекста. Так, для букв a_1, a_2 мы будем писать слово $a_1 \circ a_2$, подразумевая слово $(a_1) \circ (a_2)$.

Копредставление квандла: продолжение

Пусть R — это множество *соотношений*; то есть равенств вида $r_\alpha = s_\alpha$, где $r_\alpha, s_\alpha \in D(A)$ и α пробегает некоторое множество индексов X. Введем отношение эквивалентности на $D(A)$, полагая $W_1 \equiv W_2$ тогда и только тогда, когда существует цепь преобразований, начинающаяся словом W_1 и завершающаяся W_2, построенная по правилам 1-5, описанным ниже:

1. $x \circ x \Longleftrightarrow x$;
2. $(x \circ y)/y \Longleftrightarrow x$;
3. $(x/y) \circ y \Longleftrightarrow x$;
4. $(x \circ y) \circ z \Longleftrightarrow (x \circ z) \circ (y \circ z)$;
5. $r_i \Longleftrightarrow s_i$.

Множество классов эквивалентности допустимых слов обозначается через $\Gamma\langle A|R\rangle$. Несложно проверить, что это множество является квандлом с операцией $\circ$.

Замечание 1.4

Имеется аналогичная конструкция *бикандла* (употребляется также термин *rack* [5]), где вместо *ребер* рассматриваются полуребра. Под полуребром мы понимаем результат разбиения ребра в точках перехода.
Таким образом, с каждом перекрестком связаны четыре элемента бикандла, два входящих и два выходящих.
Предполагается, что цвета двух входящих полуребер определяют цвета исходящих. Инвариантность при движениях Рейдемейстера соответствует некоторым соотношениям, которые мы здесь не будем выписывать.
Точно так же, как и в случае квандлов, имеется понятие *фундаментального бикандла* и его *копредставления*.
Квандлы являются частным случаем бикандлов, для которых цвет исходящего ребра, образующего переход, совпадает со цветом входящего перехода.

Геометрическое определение квандла

Пусть K — ориентированный узел в $\mathbb{R}^3$, и $N(K)$ — его малая трубчатая окрестность. Пусть $E(K) = \overline{(\mathbb{R}^3 \backslash N(K))}$ — дополнение к этой окрестности. Зафискируем точку x_K в $E(K)$. Рассмотрим множество Γ_K гомотопических классов путей в $E(K)$ с началом в точке x_K и концом на $\partial N(K)$ (эти условия должны сохраняться при гомотопии). Заметим, что ориентация на $\mathbb{R}^3$ и K задает ориентацию трубчатой окрестности узла (по правилу буравчика). Пусть m_b — ориентированный меридиан, проходящий через конец дуги b. Положим $a \circ b = [b m_b b^{-1} a]$, где для $x \in \Gamma_K$ буква x означает путь, а $[x]$ — гомотопический класс этого пути; см рис. 5.

Геометрическое определение квандла: продолжение

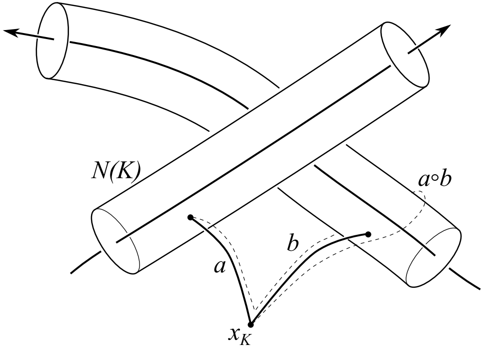

Рис. 5: Геометрическое описание операции в квандле узла

Свойства квандла проверяются непосредственно. Несложно увидеть также, что замена начальной точки x_K приводит к изоморфному квандлу. Данное утверждение оставляем в качестве упражнения.

Связь между квандлом узла и группой узла

Подчеркнем, что мы сначала установим соответствие между множеством элементов квандла и множеством элементов группы узла. Затем это соответствие определит операцию квандла на группе, и данная операция приведет нас к дальнейшим примерам. Определим отображение из квандла узла $\Gamma(K)$ в группу узла $\pi_1(\mathbb{R}^3 \backslash E(K))$. Выберем точку x вне трубчатой окрестности узла. Каждому элементу квандла γ (пути из x в $\partial E(K)$) сопоставим петлю $\gamma m \gamma^{-1}$, где m — меридиан, проходящий через конец пути γ. Данное отображение показывает, что *фундаментальная группа определяется квандлом*: можно взять меридианы в качестве образующих фундаментальной группы, а соотношения вида $a \circ b = c$ заменить на $bab^{-1} = c$.
Кроме того, имеется очевидное действие фундаментальной группы на квандле: для петли g и элемента квандла γ, путь $g\gamma$ также является элементом квандла.

Квандлы на многообразиях с краем

Замечание 1.5

Заметим, что "геометрическое определение квандла узла" работает для любого ориентированного многообразия M с непустым краем $\partial(M)$. Точнее, мы можем рассмотреть множество гомотопических классов путей в $E(K)$ с началом в фиксированной точке p и концом на $\partial(M)$. Это множество инвариантно относительно гомеоморфизмов M.

Алгебраическое определение квандла

Пусть D — диаграмма ориентированного узла K. Обозначим множество дуг диаграммы D через A_D. Пусть P — перекресток, образованный дугами прохода a и c и дугой перехода b. Напишем соотношение $a \circ b = c$, где a лежит по левую сторону от b, а c лежит по правую сторону от ориентированной дуги b. Обозначим множество соотношений для всех перекрестков через R_D. Теперь рассмотрим квандл $\Gamma\langle A_D | R_D \rangle$ с образующими A_D и соотношениями R_D.

Теорема 1.6

Квандлы Γ_K и $\Gamma\langle A_D | R_D\rangle$ изоморфны.

Доказательство Каждой дуге a на проекции D сопоставим путь s_a в $E(K)$, такой что

1. путь s_a соединяет отмеченную точку с точкой на торе ∂N_K, соответствующей дуге a;
2. во всех точках, где проекция s_a пересекает диаграмму D путь s_a идет выше узла; см. рис. 6.

Доказательство: продолжение

Очевидно, данные условия однозначно определяют гомотопический класс пути s_a.

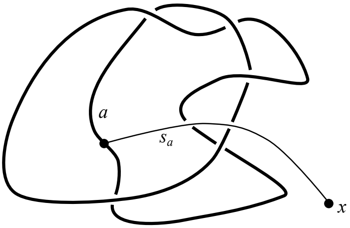

Рис. 6: Путь s_a.

Следовательно, каждой образующей квандла $\Gamma = \langle A_D | R_D \rangle$ соответствует элемент квандла Γ_K. Таким образом, мы определили гомоморфизм $\phi : \Gamma\langle A_D | R_D \rangle \to \Gamma_K$.

Доказательство: продолжение

Чтобы определить обратный гомоморфизм $\psi : \Gamma_K \to \Gamma\langle A_D | R_D\rangle$, рассмотрим путь $s \in \Gamma_K$. Можно считать, что проекция пути s пересекает диаграмму D трансверсально и не содержит перекрестков диаграммы.

Обозначим через $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ дуги диаграммы D, которые идут выше s. Пусть a_0 обозначает дугу, на которой находится конец s.

Теперь сопоставим пути $s \in \Gamma_K$ элемент $((\ldots(a_0\epsilon_1 a_1)\epsilon_2 \ldots a_{n-1})\epsilon_n a_n$ в квандле $\Gamma\langle A_D | R_D\rangle$, где ϵ_i означает $/$, если s пересекает a_i слева направо, и $\circ$ в противном случае; см. рис. 7.

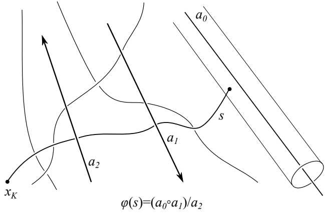

Рис. 7: Отображение $\psi : \Gamma_K \to \Gamma\langle A_D, R_D\rangle$.

Доказательство: продолжение

Несложно проверить, что данное отображение корректно определено (то есть не зависит от выбора представителя s элемента Γ_K) и что отображения ϕ и ψ взаимно обратны. Таким образом, теорема доказана.

Полнота квандла

По Матвееву, два узла *эквивалентны*, если один получается из другого одновременной заменой ориентации у узла и объемлющего пространства. Например, правый и левый трилистники эквивалентны.

Здесь *полнота* квандла означает, что он различает узлы с точность до эквивалентности, определенной выше.

Грубо говоря, квандл — это (почти) полный инвариант узлов, так как он содержит информацию о фундаментальной группе и “чем-то еще” – *периферической структуре* (см. Определение 2.7).

Однако, так как квандл не различает эквивалентные узлы, он не распознает левый и правый трилистники. Такая ситуация встречается часто.

Набросок доказательства полноты

Ключевые точки доказательства:

1. Для тривиального узла ситуация очевидна: фундаментальная группа дополнения к узлу его распознает по теореме Дена (Теорема 2.3).
2. Если узел нетривиален, то дополнение к нему является достаточно большим (см. Определение 2.4) многообразием (по теореме Дена).
3. Для класса достаточно больших многообразий фундаментальная группа плюс "что-то еще" является полным инвариантом с точностью до эквивалентности, определенной выше.
4. Квандл позволяет восстановить фундаментальную группу и "что-то еще".

Для простоты мы говорим об узлах. Такие же рассуждения справедливы для зацеплений.
Ниже мы покажем, как по квандлу восстановить фундаментальную группу.

Сжимаемые поверхности

Начнем с определений.

Определение 2.1

Поверхность F в многообразии M называется *сжимаемой* в одном из следующих случаев:

1. Существует нестягиваемая простая замкнутая кривая k внутри F и диск D в M (внутренность которого лежит внутри M), такая что $D \cap F = \partial D = k$.
2. Существует шар E в M, такой что $E \cap F = \partial E$.

В противном случае поверхность называется *несжимаемой*.

Неприводимые 3–многообразия

Определение 2.2

Трехмерное многообразие M называется *неприводимым*, если любая сфера $S^2 \subset M$ сжимаема.
Трехмерное многообразие M с краем называется *гранично неприводимым*, если край ∂M несжимаем.

Пусть K — ориентированный узел. Рассмотрим фундаментальную группу π дополнения $\mathbb{R}^3 \backslash N(K)$, где N — трубчатая окрестность K. Очевидно, что $\partial N = T$ является тором; рассмотрим в нем ориентированный меридиан m (кривая, имеющая индекс зацепления 1 с узлом K). Напомним теорему Дена:

Теорема 2.3 (Ден)

Зацепление L с m компонентами тривиально тогда и только тогда, когда $\pi_1(\mathbb{R}^3 \backslash L)$ изоморфна свободной группе с m образующими.

Достаточно большие многообразия и многообразия Хакена

Определение 2.4

Многообразие M называется *достаточно большим*, если можно вложить в M тело с ручками так, что индуцированное отображение фундаментальных групп имеет нулевое ядро.

Определение 2.5

Многообразие Хакена — это компактное неприводимое достаточно большое трехмерное многообразие.

Замечание 2.6

Многообразия Хакена можно классифицировать с помощью метода "вырезания и склеек", который был разработан У. Хакеном, Г. Хемионом и С. Матвеевым, подробности см. [10].
В частности, дополнения к узлам являются многообразиями Хакена!!!

Если узел K нетривиален, то фундаментальная группа $\pi(T)$ вкладывается в π. Это следует из теоремы Дена.

Определение 2.7

Для нетривиального узла K, тройка $m \in \pi(T) \subset \pi$ называется *периферической системой* узла K.

Теорема Вальдхаузена[1] утверждает:

Теорема 2.8 ([4])

Пусть M, N — неприводимые, гранично неприводимые 3–многообразия. Пусть M достаточно велико и пусть $\psi : \pi_1(N) \to \pi_1(M)$ — изоморфизм, сохраняющий периферическую систему. Тогда ψ индуцируется некоторым гомеоморфизмом $f : N \to M$.

[1] мы ее используем формулировку из [6]

Доказательство полноты

Докажем, что квандл — *почти* полный инвариант.
Пусть даны узлы K_1, K_2. Предположим, что $\phi\colon \Gamma(K_1) \to \Gamma(K_2)$ (по Матвееву) — изоморфизм квандлов. Обозначим дополнения к трубчатым окрестностям K_1, K_2 через E_{K_1}, E_{K_2} соответственно.
Заметим, что если K_1, K_2 нетривиальны, то многообразия E_{K_1}, E_{K_2} гранично неприводимы, достаточно большие и неприводимые (по Лемме Дена).

Доказательство полноты: продолжение

Если один из узлов тривиален (скажем, K_1). Тогда $\pi(K_1)$ изоморфно $\mathbb{Z}$. Так как группа узла определяется квандлом, то $\pi(K_2)$ тоже будет изоморфна $\mathbb{Z}$. Значит, узел K_2 тривиален.

Теперь предположим, что K_1, K_2 нетривиальны.

В этом случае группа узла восстанавливается по квандлу; кроме того, меридиан также можно восстановить по квандлу узла: можно взять образ произвольного элемента квандла при его отображении в группу.

Доказательство полноты: продолжение

Стабилизатор меридиана (как пути из x в x_K, представляющего элемент квандла)

$$\{g \in \pi(K) \mid ga = a\}$$

в фундаментальной группе совпадает с фундаментальной группой трубчатой окрестности узла $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z}^2$.

Действительно, каждый элемент группы $\pi_1(T^2)$ задается путем вида ana^{-1}, где a представляет меридиан в квандле (путь от начальной точки к точке на T^2), а n — петля на торе T^2. Тогда мы имеем $ana^{-1} \cdot a = an$, что гомотопно a в квандле.
Теперь предположим, что для некоторого g путь ga гомотопен a. При данной гомотопии конечная точка перемещается на торе по некоторому пути, который мы обозначим через x. Тогда имеем $gaxa^{-1} = e$, так что g гомотопно петле $ax^{-1}a^{-1}$, принадлежащей фундаментальной группе тора T^2.

Доказательство полноты: продолжение

Таким образом, квандл задает периферическую систему. Пусть нетривиальные узлы K_1, K_2 имеют одинаковую периферическую систему. Рассмотрим соответствующий изоморфизм фундаментальных групп. По теореме Вальдхаузена он индуцирован гомеоморфизмом h из E_{K_1} в E_{K_2}, причем меридиан в первом пространстве переходит в меридиан во втором. Тогда у нас есть информация, как приклеить полнотория N_1 и N_2 к E_{K_1} и E_{K_2} соответственно, чтобы получить пространство $\mathbb{R}^3$. Стягивая меридиан полнотория N_i, $i = 1, 2$, в $\mathbb{R}^3$ в точку, мы получим кривую λ_i, совпадающую с узлом K_i. Таким образом, узлы будут изотопны. Для реализации конструкции нужно зафиксировать ориентацию E_{K_1} и E_{K_2}. Также есть возможность выбора ориентации меридиана. Если выбрать противоположные ориентации пространства и меридиана, получающиеся узлы будут эквивалентны.
Однако после фиксации ориентации меридиана узел восстанавливается однозначно.

Замечание 2.9

В доказательстве полноты квандла узла важную роль играет совпадение стабилизатора меридиана в фундаментальной группе дополнения с фундаментальной группой трубчатой окрестности узла $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z}^2$. Напомним, что периферическая система представляет собой тройку $m \in \pi(T) \subset \pi(K)$, вот почему мы столь внимательны к ней.

Упражнения I

1. Пусть $(\Gamma, \circ)$ — квандл и $/$ — обратная операция к $\circ$. Покажите, что $(\Gamma, /)$ также является квандлом. Более того, докажите тождества на Γ:
$(a \circ b)/c = (a/c) \circ (b/c)$
$(a/b) \circ c = (a \circ c)/(b \circ c)$.
2. Пусть $Q = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$. Определим операцию $\circ : Q \times Q \to Q$ по формуле
$$a \circ b = ta + (1 - t)b.$$
Докажите, что $(Q, \circ)$ удовлетворяет свойствам квандла. Этот квандл называется *квандлом Александера*.
3. Пусть Q — группа. Определим операцию $\circ : Q \times Q \to Q$ по формуле
$$a \circ b = bab^{-1}.$$
Докажите, что $(Q, \circ)$ является квандлом. Этот квандл называется *сопряженным квандлом*.

Упражнения II

4. Пусть Q — группа. Определим операцию $\circ : Q \times Q \to Q$ по формуле
$$a \circ b = b^n a b^{-n}.$$
Докажите, что $(Q, \circ)$ является квандлом.

5. Пусть Q — группа. Определим операцию $\circ : Q \times Q \to Q$ по формуле
$$a \circ b = b a^{-1} b.$$
Докажите, что $(Q, \circ)$ удовлетворяет аксиомам квандла. Этот квандл называется *core quandle*.

6. Пусть X — группа и $x \in X$ — некоторый элемент. Рассмотрим операцию $\circ : X \times X \to X$, где
$$a \circ b = a b^{-1} x b.$$
   - Докажите, что $(X, \circ)$ удовлетворяет второй и третьей аксиомам квандла, но не первой аксиоме. То есть $(X, \circ)$ — *rack*.

Упражнения III

- Докажите, что число раскрасок диаграммы с помощью $(X, \circ)$ инвариантно относительно движения на рис. 8.

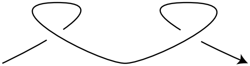

Рис. 8:

7. Пусть X конечно и $\circ, *$ — бинарные операции на X. Предположим, что операции удовлетворяют соотношениям:
   - $x \circ x = x * x$
   - отображения $*x, \circ x : X \times X \to X$ и отображение $S : X \times X \to X \times X$, где
   $$S(x, y) = (y * x, x \circ y),$$
   взаимно-однозначны.
   - $(x \circ y) \circ (z \circ y) = (x \circ z) \circ (y * z)$
   - $(x \circ y) * (z \circ y) = (x * z) \circ (y * z)$
   - $(x * y) * (z * y) = (x * z) * (y \circ z)$

Упражнения IV

Тода $(X, \circ, *)$ называется *биквандлом*. Докажите, что число раскрасок полу-ребер узлов биквандлом, как показано на рис. 9, является инвариантом узлов.

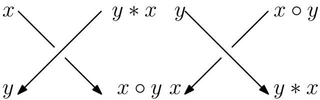

Рис. 9: Раскраска биквандлом в перекрестке

Исследовательские задачи

Широко известно, что теория топологических групп, в особенности групп Ли, предоставила мощные методы для изучения многообразий. С другой стороны, в работе [8] Р.Л. Рубинштейн дал определение *топологического квандла*.

Более точно, пусть X — топологическое пространство, снабженное непрерывным отображением $\mu : X \times X \to X$, обозначение $\mu(a, b) = a \circ b$, таким что для любого $b \in X$ отображение $a \to a \circ b$ является гомеоморфизмом X. Пространство X (с отображением μ) называется *топологическим квандлом*, если выполняются соотношения

1. $(a \circ b) \circ c = (a \circ c) \circ (b \circ c)$,
2. $a \circ a = a$,

для всех $a, b, c \in X$. Таким образом, мы получим *топологические инварианты узлов.*

Вопрос

Мы упоминали, что геометрическое определение квандла приложимо к произвольному многообразию с краем. Каким образом мы можем использовать топологические квандлы по отношению не только к зацеплениям, но и произвольным многообразиям?

Исследовательские задачи 2

Квандл узла является почти полным инвариантом и, следовательно, многие инварианты узлов выражаются через него. Например, полином Александера, фундаментальная группа и т.д. Полином Александера допускает категорификацию в виде гомологий Флоера, которые содержат более богатую информацию об узлах по сравнению с полиномом.

Вопрос
Как категорифицировать квандлы?

Полином Александера получается не только с помощью квандлов, но также с помощью поверхностей Зейферта или скейн-соотношений (подробности см. в главе 5 в [1] либо главе 6 в [2]). В частности, как мы видели в лекции 2, с помощью скейн-соотношений можно усилить полином Александера.

Вопрос
Как построить инварианты с помощью модификации скейн-соотношений для полинома Александера?

Исследовательские задачи 3

В работе [9] В.О. Мантуров определил алгебраическую структуру с двумя операциями, так называемый *длинный кванд*, и инвариант раскрасок длинных (виртуальных) узлов с помощью длинного кванда. Длинный кванд позволяет показать, что связная сумма длинных виртуальных узлов не коммутативна (в отличие от классического случая). Подробности см. в [9].

Вопрос

Попробуйте определить похожие на кванды структуры для узлов и зацеплений, в том числе в высших размерностях.

Литература I

- V. O. Manturov Knot theory: Second edition CRC press 560 April 4, 2018.
- K. Murasugi, Knot Theory and Its Applications, Springer.
- T. Nosaka, *Quandles and Topological Pairs Symmetry, Knots, and Cohomology,*
- Waldhausen, F. (1967), On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large, *Annals of Mathematics*, **87**(1), pp. 56–88.
- Fenn, R., Rourke, C. (1992), Racks and links in codimension two, *J. Knot Theory Ramifications*, **4**, pp. 343–406.
- Матвеев С.В. (1982), Дистрибутивные группоиды в теории узлов, *Мат. сборник*, **119**:1 , pp. 78–88.
- Joyce, D. (1982), A classifying invariant of knots, the knot quandle, *Journal of Pure and Applied Algebra*, **23** (1), pp. 37–65.

Литература II

- R. L. Rubinsztein, *Topological quandles and invariants of links*, arXiv:math/0508536.
- V.O. Manturov, *Long virtual knots and their invariants*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications Vol. 13, No. 8 (2004) 1029 –1039.
- Матвеев С.В. (2007), Алгоритмическая топология и классификация трехмерных многообразий, МЦНМО, Москва, 2007 , 456 с.