

Лекция 3. Фундаментальная группа и группа узла

С. Ким, В.О. Мантуров, И.М. Никонов

28 сентября 2021

Содержание

- 1 Фундаментальная группа
 - Основные определения
 - Теорема ван Кампена
- 2 Группа узла
 - Определение группы узла
 - Копредставление Виртингера
 - Копредставление Дена
- 3 Упражнения

Фундаментальная группа

Рассмотрим топологическое пространство X и произвольную точку $x_0 \in X$. Выберем некоторую точку a на окружности S^1 . Рассмотрим множество непрерывных отображений $f : S^1 \rightarrow X$, таких что $f(a) = x_0$. Множество гомотопических классов таких отображений имеет структуру группы. Действительно, умножение двух таких отображений определяется как конкатенация соответствующих путей. Обратный элемент представляет собой исходный путь, проходимый в обратном порядке. Очевидно, что данные операции, рассматриваемые с точностью до гомотопии, корректно определены.

Определение 1.1

Группа, описанная выше, называется *фундаментальной группой* топологического пространства X и обозначается через $\pi_1(X, x_0)$.

Лемма 1.2

Для связного пространства X группа $\pi_1(X, x_0)$ не зависит от выбора точки x_0 , т.е. $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$.

Доказательство мы оставляем в качестве упражнения.

Замечание 1.3

Не существует канонического способа задать изоморфизм фундаментальных групп, определенных для различных начальных точек.

Теорема 1.4

Фундаментальная группа является гомотопическим инвариантом топологического пространства.

Пусть топологическое пространство X представимо в виде объединения $X = X_1 \cup X_2$, где каждое из множеств X_1 , X_2 , $X_0 = X_1 \cap X_2$ непусто, открыто и линейно связно. Выберем точку $A \in X_0$. Предположим, что группы $\pi_1(X_1, A)$ и $\pi_1(X_2, A)$ задаются копредставлениями $\langle a_1, \dots \mid f_1 = e, \dots \rangle$ и $\langle b_1, \dots \mid g_1 = e, \dots \rangle$ соответственно. Пусть образующие c_1, c_2, \dots группы $\pi_1(X_0, A)$ (являющиеся элементами как $\pi_1(X_1, A)$, так и $\pi_1(X_2, A)$) выражаются как $c_i = c_i(a_1, \dots)$ и $c_i = c_i(b_1, \dots)$ через образующие групп $\pi_1(X_1, A)$ и $\pi_1(X_2, A)$ соответственно. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 1.5 (Теорема ван Кампена)

Группа $\pi_1(X, A)$ имеет копредставление

$$\langle a_i, b_i, \mid f_i = e, g_i = e, c_i(a) = c_i(b) \rangle.$$

Определение 1.6

Топологическое пространство X называется *односвязным*, если $\pi_1(X) = \{e\}$.

Следствие 1.7

Если пространства X_1 и X_2 , рассматриваемые в теореме ван Кампена, односвязны, то их объединение X тоже односвязно.

В качестве примера применения теоремы ван Кампена посчитаем фундаментальные группы 2-многообразий.

Теорема 1.8

Фундаментальная группа связной ориентируемой замкнутой двумерной поверхности рода g ($g > 0$) имеет копредставление

$$\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = e \rangle.$$

Группа узла

Пусть K — зацепление в \mathbb{R}^3 .

Пусть $M_K = \mathbb{R}^3 \setminus K$ — дополнение к зацеплению K . Очевидно, что при гладкой изотопии K в \mathbb{R}^3 дополнение также подвергается изотопии. Следовательно, все топологические инварианты дополнения, такие как фундаментальная группа, будут давать инварианты зацеплений.

Определение 2.1

Фундаментальная группа дополнения к зацеплению называется *группой зацепления (узла)*:

$$\pi(K) = \pi_1(M_K).$$

Группа зацепления — неполный инвариант

В работе [3] показано, что дополнение к узлу (точнее, к его малой трубчатой окрестности в \mathbb{R}^3) является полным инвариантом узлов с точностью до зеркального отражения.

Однако аналогичное утверждение для зацеплений неверно (см. Упражнение 2). Перед построением контрпримера, докажем следующую лемму.

Лемма 2.2

Пусть $D^3 \subset \mathbb{R}^3$ — трехмерный шар и $\gamma \subset D^3$ — полноторие, см. рис. 1. Тогда существует гомеоморфизм подмножества $\mathbb{R}^3 \setminus T$ в себя, отображающее кривые AB и CD (рис. 1.a) в AB и CD (рис. 1.b) и тождественное вне шара D^3 .

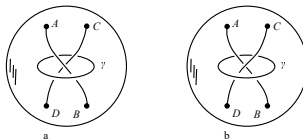


Рис. 1: Замена перекрестка

Доказательство леммы

Для более понятного описания представим, что внутренний диаметр полнотория γ очень большой (тогда “внутренняя” граница представляет собой высокий цилиндр) по сравнению со внешним. Тогда с центре будет цилиндр, окруженный полноторием, см. рис. 2.

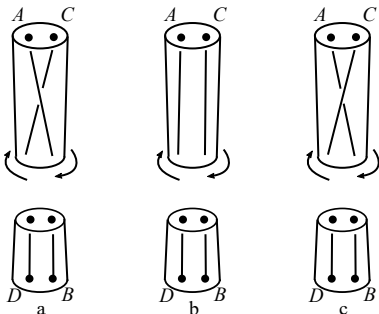


Рис. 2: Перекручивание верхней части цилиндра

Продолжение доказательства

Разрежем этот цилиндр посередине и перекрутим верхнюю часть, как показано на рис. 2. Данная операция становится возможной после вырезания полнотория γ из D^3 . После 180-градусного поворота мы получим конфигурацию, как на рис. 2.b. Затем перекрутим верхнюю часть еще раз. Так мы получим вложение на рис. 2.c. При этом точки разреза вернулись в начальную позицию. Значит, можно склеить обе части, так чтобы все пространство осталось прежним. Таким образом, мы построили гомеоморфизм многообразия $D^3 \setminus \gamma$ в себя. Этот гомеоморфизм продолжается до гомеоморфизма $\mathbb{R}^3 \setminus \gamma$ на себя, тождественного вне D^3 . Данный гомеоморфизм делает замену перекрестка.

Тем не менее, фундаментальная группа дополнения к зацеплению является очень сильным инвариантом. Например, она распознает тривиальное зацепление с любым числом компонент. Данный результат следует из теоремы Дена.

Теорема 2.3 (Ден)

Зацепление L с t компонентами тривиально тогда и только тогда, когда $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L)$ изоморфна свободной группе с t образующими.

Таким образом, теорема Дена сводит задачу распознавания тривиального зацепления к проблеме распознавания свободной группы (среди некоторого класса групп). Заметим, что в общем случае проблема распознавания тривиальной группы неразрешима. Теорема Дена вытекает из следующей леммы.

Лемма 2.4

Пусть M — это 3-мерное многообразие с краем и пусть γ — замкнутая кривая на крае ∂M . Тогда существует погруженный двумерный диск $D \rightarrow M$, такой что $\partial D = \gamma$, то существует **вложенный** диск $D' \subset M$ с той же границей $\partial D' = \gamma$.

Первое доказательство леммы принадлежит Дену [4], однако его доказательство имело пробелы. Первое строгое доказательство было предложено Папакирьякопулосом [6], использовавшего прекрасную технику башен двулистных накрытий.

Доказательство теоремы Дена

Имея узел $K \subset \mathbb{R}^3$ с трубчатой окрестностью $N(K)$, рассмотрим группу $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus N(K), A)$, где $A \in T(K) = \partial N(K)$. Меридиан μ , т.е. кривая на $T(K)$, которая лежит в малой окрестности точки на узле K и имеет коэффициент зацепления 1 с узлом K , не стягивается в дополнении к узлу. Параллель λ — это простая кривая в T , “параллельная узлу K ” и имеющая коэффициент 0 с K . Кривые μ и λ порождают фундаментальную группу тора T .

Предположим, что группа узла K изоморфна \mathbb{Z} . Изоморфизм задается коэффициентом зацепления с узлом K : $\gamma \mapsto lk(\gamma, K)$. Так как $lk(\lambda, K) = 0$, параллель λ гомотопна 0 в $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus N(K))$. Следовательно, найдется погруженный диск с краем λ . По Лемме 2.4 тогда существует вложенный в $\mathbb{R}^3 \setminus N(K)$ диск с краем λ . Стягивая $N(K)$ на K , мы получим диск, краем которого является K . Этот диск задает изотопию K к тривиальному узлу. Теорема доказана.

Замечание 2.5

Теорема Дена показывает, что группа узла является довольно сильным инвариантом. Однако, она не позволяет различить между собой зеркальные узлы. Впервые неэквивалентность между двумя зеркальными узлами, а именно, левым и правым трилистником была доказана Деном [5].

Заметим, что в доказательстве теоремы Дена использовалась не только группа узла, но и меридиан и параллель $T(K)$, которые образуют так называемую *периферическую систему* дополнения к узлу. Она и позволяет различить два трилистника. Более того, можно показать, что группа узла с периферической системой образуют полный инвариант узлов.

Позднее мы еще вернемся к этой структуре.

Копредставление Виртингера

Покажем, как можно явно описать группу зацепления. Рассмотрим произвольное зацепление L и некоторую его плоскую диаграмму \bar{L} . Выберем точку x над плоскостью диаграммы. Группа зацепления состоит из гомотопических классов петель с началом в x . В качестве образующих возьмем петли, выходящие из x и цепляющие дуги \bar{L} . Ориентация петли определяется по правилу буравчика, см. рис. 3.

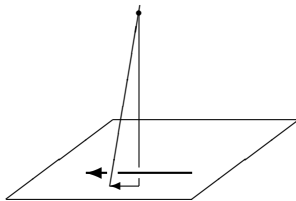


Рис. 3: Петля, соответствующая дуге диаграммы

Копределение Виртингера

Теперь найдем соотношения группы зацепления.

Нетрудно увидеть, что связь между петлями, отвечающим дугам, инцидентным некоторому перекрестку, имеет вид $b = cac^{-1}$, где переход c разделяет дуги прохода a и b , см. рис. 4.

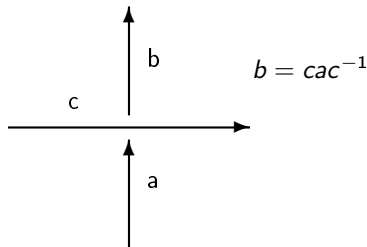


Рис. 4: Соотношение в перекрестке

Копредставление Виртингера

Покажем, что все соотношения в фундаментальной группе дополнения сводятся к данным соотношениям.

Рассмотрим проекцию петли на плоскость диаграммы \bar{L} и некоторую изотопию этой петли. При деформации выражение петли через образующие меняется только, когда проекция петли проходит через перекресток диаграммы, см. рис. 5.

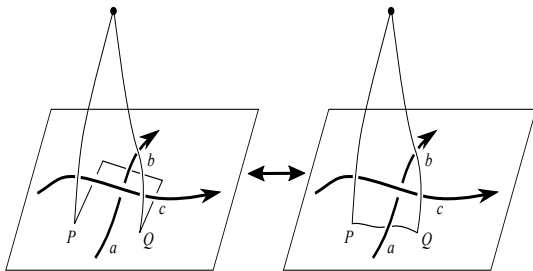


Рис. 5: Соотношение, возникающее при изотопии

Копредставление Виртингера

Петля в левой части рис. 5 выражается через образующие как $c^{-1}bc$, а петля в правой части — как a .

Таким образом, мы построили следующее копредставление группы зацепления: дуги диаграммы соответствуют образующим, а перекрестки — соотношениям группы: полагаем $cac^{-1} = b$ для смежных дуг a и b , разделенных дугой c , причем b находится слева от c с учетом ориентации дуги c .

Определение 2.6

Данное копредставление фундаментальной группы дополнения к зацеплению называется *копредставлением Виртингера*.

Копредставление Дена

Другой способ описать группу зацепления с помощью образующих и соотношений носит название *копредставления Дена*. В этом копредставлении роль образующих играют области, на которые диаграмма делит плоскость, а соотношения отвечают перекресткам диаграммы, см. рис. 6.

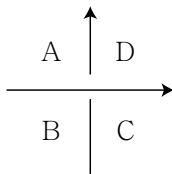


Рис. 6: $r(c) = AB^{-1}CD^{-1}$

Таким образом, группа зацепления задается как

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) = \langle \{\text{Области}\} \mid r(c) = 1 \rangle.$$

Группа узла и инвариант раскрасок

Теорема 2.7

Для любого узла K инвариант $CI(K) + 3$ равен числу гомоморфизмов из $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ симметрическую группу S_3 .

Доказательство

Рассмотрим узел K и произвольную его плоскую диаграмму. Чтобы построить гомоморфизм из $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ в S_3 , достаточно указать образы всех образующих, соответствующих дугам узла K . Предположим, что хотя бы одна образующая, соответствующая некоторой дуге s , отображается в четную перестановку. Тогда для любая дуга s' , отделенная от s переходом, отображается в сопряженный элемент, т.е. тоже в четную перестановку. Так как K узел, “через проходы” можно перейти от s к любой другой дуге. Значит, все образующие группы узла отобразятся в четные перестановки. Так как группа четных перестановок A_3 коммутативна, гомоморфизм переводит все образующие, соответствующие дугам, в один элемент в A_3 . Есть ровно три таких гомоморфизма.

Продолжение доказательства

Будем считать теперь, что хотя бы одна дуга (а значит, и все дуги) переходит в нечетную перестановку. Нечетных перестановок три: (12) , (23) , (31) . Сопряжение одной одной транспозиции с помощью другой дает третью транспозицию. Это соотношение полностью соответствует правилу раскраски.

Таким образом, гомоморфизмы группы $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ в S^3 , кроме трех “четных”, находятся во взаимно-однозначном соответствии с правильными раскрасками выбранной диаграммы узла K .

Упражнения

- 1 Покажите, что для связного X фундаментальная группа $\pi_1(X, x_0)$ не зависит от выбора точки x_0 , т.е. $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$.
- 2 Покажите, что зацепления L_1 и L_2 на рис. 7 не изотопны, но дополнения к ним гомеоморфны.

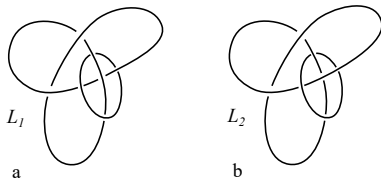


Рис. 7: Неизотопные зацепления с гомеоморфными дополнениями

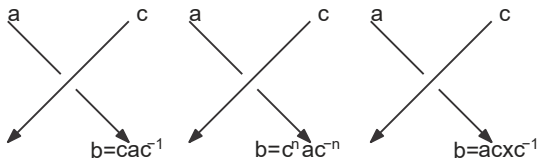
- 3 (повышенная сложность) Найти два неизотопных (и не зеркальных) узла с изоморфными группами узла.

- 4 Покажите, то группа тривиального узла изоморфна фундаментальной группе окружности, и обе эти группы изоморфны \mathbb{Z} .
- 5 Покажите, что группа тривиального n -компонентного зацепления изоморфна свободной группе с n образующими.
- 6 Найдите чисто алгебраическое доказательство того, что копредставления Виртингера двух диаграмм изотопных зацеплений задают одну и ту же группу.
- 7 Найдите копредставление Виртингера для трилистника и докажите, что группы с копредставлениями $\langle a, b \mid aba = bab \rangle$ и $\langle c, d \mid c^3 = d^2 \rangle$ изоморфны.

- 8 Покажите, что фундаментальная группа $\pi_1(A_1 \vee A_2)$ букета (объединения A_1 и A_2 с одной отождествленной точкой) изоморфна свободному произведению групп $\pi_1(A_1)$ и $\pi_1(A_2)$, когда оба пространства A_1 и A_2 линейно связны. Покажите, для левого и правого трилистников T_1 и T_2 , группы связных объединений $T_1 \# T_1$ и $T_1 \# T_2$ изоморфны.
- 9 Найдите копредставление Виртингера для узла восьмерка.
- 10 Найдите копредставление Виртингера для колец Борромео.

Исследовательские проблемы

Можно изменить группу узла в копредставлении Виртингера, рассматривая в перекрестках соотношения вида $b = c^n a c^{-n}$ вместо $b = c a c^{-1}$. Группа, которая получится таким образом, отличается от группы узла, но все еще является инвариантом.



Соотношения $b = a c x c^{-1}$ (для некоторого фиксированного элемента x) в перекрестках уже не задают инвариантную группу. Однако эта группа будет инвариантом для *оснащенных узлов*.

Исследовательские проблемы

С другой стороны, В.С. Куликов ввел понятие C -группы [7]. Более точно, C -группа задается копредставлением



$$\langle X = \{x_1, \dots, x_n\} | w_{i,j}^{-1} x_i w_{i,j} = x_j \rangle,$$

где $w_{i,j}$ — слово в X^\pm . Доказано, что любая C -группа является фундаментальной группой дополнения к некоторому n -мерному ($n \geq 2$) замкнутому ориентированному многообразию, вложенному в S^{n+2} , т.е. фундаментальной группой дополнения к многомерному узлу.

В.Г. Бардаков, М.В. Нецадим и М. Сингх [8] построили группу, образующие которой соответствуют дугам, а соотношения — перекресткам, причем каждый перекресток дает *два* соотношения.

Исследовательские проблемы

- Какие группы, допускающие копредставление с дугами-образующими и перекрестками-соотношениями, являются инвариантными относительно движений Рейдемейстера?
- Построить похожую на группу узла алгебраическую структуру с двумя бинарными операциями, которая отличала бы узел от обратного к нему.

-  V. O. Manturov *Knot theory: Second edition*, CRC press, 2018.
-  K. Murasugi, *Knot Theory and Its Applications*, Springer.
-  Gordan., C. McA, and Luecke, J. (1989), Knots are determined by their complements, *J. Amer. Math. Soc.*, **2**, pp. 371–415.
-  Dehn, M. (1914), Die beiden Kleeblattschlingen, *Mathematische Annalen*, **69**, ss. 137–168.
-  Dehn, M. (1914), Die beiden Kleeblattschlingen, *Mathematische Annalen*, **102**, ss. 402–413.
-  Papakyriakopoulos, C.D. (1957), On Dehn's lemma and asphericity of knots., *Annals of Mathematics*, **66**, pp. 1–26.
-  Vik. S. Kulikov, *Alexander polynomials of plane algebraic curves*, *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.* 57 (1993), no. 1, 76–101; translation in *Russian Acad. Sci. Izv. Math.* 42 (1994), no. 1, 67–89.
-  V.G. Bardakov, M.V. Neshchadim, M. Singh, *Virtually symmetric representations and marked Gauss diagrams*, arXiv:2007.07845.