

Лекция 2. Скобка Кауфмана и полином Джонса

С. Ким, В.О. Мантуров, И.М. Никонов

21 сентября 2021

Определение 1.1

Движения Рейдемейстера Ω_2 , Ω_3 и обратные к ним называются *регулярными движениями*. Если диаграмма узла D' может быть получена из диаграммы D с помощью регулярных движений Рейдемейстера, то говорят, что D и D' *регулярно эквивалентны*. Классы регулярной эквивалентности диаграмм называются *регулярными узлами*.

Классы эквивалентности диаграмм по движениям Ω_1^{fr} , Ω_2 , Ω_3 называются *оснащенными узлами*.

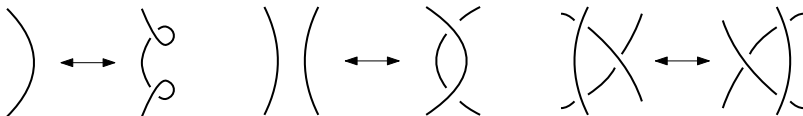


Рис. 1: Движения Рейдемейстера Ω_1^{fr} , Ω_2 , Ω_3

Определение 1.2

Пусть D — диаграмма ориентированного зацепления.

Перекрестки диаграммы делятся на два типа: положительные и отрицательные, как показано на рис. 2.

Обозначим *знак перекрестка* c через $sign(c)$.

Сумма $w(D) = \sum_{c : \text{перекресток в } D} sign(c)$ называется *числом закрученности диаграммы* D .

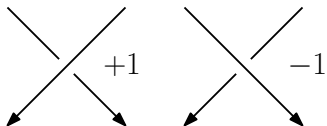


Рис. 2: Положительный и отрицательный перекрестки

Определение 1.3

Пусть K — неориентированный узел (либо зацепление) и D — диаграмма узла K . Диаграмму D можно *развести* в перекрестке с двумя способами, как показано на рис. 3.



Рис. 3: Разведения в перекрестке с

Используя разведения диаграммы в перекрестках, построим инвариант $\langle \cdot \rangle$, удовлетворяющий следующим условиям:

- $\langle D_C \rangle = a \langle D_A \rangle + b \langle D_B \rangle$,
- $\langle L \sqcup \bigcirc \rangle = \delta \cdot \langle L \rangle$.

Чтобы значение $\langle \cdot \rangle$ было инвариантно относительно второго движения Рейдемейстера, необходимы равенства $ab = 1$ и $aa + bb + ab\delta = 0$, см. рис. 5, то есть $b = a^{-1}$ и $\langle L \sqcup \bigcirc \rangle = (-a^2 - a^{-2}) \langle L \rangle$. Отсюда следует, что $\langle \cdot \rangle$ инвариантно также относительно третьего движения Рейдемейстера.

$$\begin{aligned}
 & \langle \text{Diagram 1} \rangle = a \langle \text{Diagram 2} \rangle + b \langle \text{Diagram 3} \rangle \\
 & = aa \langle \text{Diagram 4} \rangle + ab \langle \text{Diagram 5} \rangle + ba \langle \text{Diagram 6} \rangle + bb \langle \text{Diagram 7} \rangle \\
 & = (aa + \delta ab + bb) \langle \text{Diagram 8} \rangle + ba \langle \text{Diagram 9} \rangle = \langle \text{Diagram 10} \rangle
 \end{aligned}$$

Трюк Кауфмана

$$\begin{aligned}
 \langle \text{Diagram 1} \rangle &= a \langle \text{Diagram 2} \rangle + a^{-1} \langle \text{Diagram 3} \rangle \\
 \langle \text{Diagram 4} \rangle &= a \langle \text{Diagram 5} \rangle + a^{-1} \langle \text{Diagram 6} \rangle
 \end{aligned}$$

Рис. 4: Инвариантность относительно Ω_3 (трюк Кауфмана)

Теорема 1.4 ([4])

Пусть D — диаграмма неориентированного узла или зацепления K . Тогда имеется единственный полином $\langle D \rangle$ (полином Лорана от a), который удовлетворяет следующим условиям:

- 1 $\langle A \rangle$ инвариантно относительно регулярных движений;
- 2 если в связной диаграмме D нет перекрестков, то $\langle D \rangle = 1$;
- 3 если диаграмма D распадается на две отдельные части D_1 и D_2 , т.е. $D = D_1 \sqcup D_2$, то

$$\langle D \rangle = -(a^2 + a^{-2}) \langle D_1 \rangle \langle D_2 \rangle;$$

- 4 Пусть диаграммы D_A и D_B получаются из диаграммы D применением разведений типа A и B в некотором классическом перекрестке c , соответственно. Тогда справедливо следующее равенство:

$$\langle D \rangle = a \langle D_A \rangle + a^{-1} \langle D_B \rangle.$$

Инвариант $\langle \cdot \rangle$ называется скобкой Кауфмана.

Пример

$$\begin{aligned}
\langle \text{Hopf link} \rangle &= a^{-1} \langle \text{two circles, one inside the other} \rangle + a \langle \text{two circles, one inside the other, different orientation} \rangle \\
&= a^{-1} \left(a \langle \text{two circles, one inside the other} \rangle + a^{-1} \langle \text{two circles, one inside the other, different orientation} \rangle \right) \\
&\quad + a \left(a \langle \text{two circles, one inside the other} \rangle + a^{-1} \langle \text{two circles, one inside the other, different orientation} \rangle \right) \\
&= \langle \text{circle} \rangle + (a^2 + a^{-2}) \langle \text{two circles} \rangle + \langle \text{circle} \rangle \\
&= \langle \text{circle} \rangle + (a^2 + a^{-2})(-a^2 - a^{-2}) \langle \text{circle} \rangle \langle \text{circle} \rangle + \langle \text{circle} \rangle
\end{aligned}$$

Рис. 5: $\langle \text{зацепление Хопфа} \rangle = -a^4 - a^{-4}$

Формула для скобки Кауфмана

Замечание 1.5

Пусть D — диаграмма неориентированного зацепления K с n перекрестками. Будем считать, что перекрестки диаграммы занумерованы.

Состояние s — это любая последовательность символов A и B длины n . Состоянию $s \in \{A, B\}^n$ соответствует полное разведение $s(D)$ диаграммы D : i -перекресток разводится по типу s_i .

Обозначим: $\alpha(s)$ — число букв A в состоянии s , $\beta(s)$ — число букв B в s , $\gamma(s)$ — число компонент в диаграмме $s(D)$. Тогда

$$\langle D \rangle = \sum_{s \in \{A, B\}^n} a^{\alpha(s) - \beta(s)} (-a^2 - a^{-2})^{\gamma(s) - 1}.$$

Например, для зацепления Хопфа (рис. 5) скобка Кауфмана равна

$$\langle D \rangle = a^2(-a^2 - a^{-2}) + 1 + 1 + a^{-2}(-a^2 - a^{-2}) = -a^4 - a^{-4}.$$

Замечание 1.6

Отметим, что $\langle |D| \rangle$ не инвариантно при первом движении Рейдемейстера. Однако $\langle |D| \rangle$ можно превратить в инвариант при помощи *нормализации* многочлена $\langle |D| \rangle$.

Теорема 1.7

Пусть D — диаграмма ориентированного зацепления K , $|D|$ — диаграмма неориентированного зацепления, получающаяся из D забыванием ориентации. Тогда многочлен $X(D) = (-a)^{-3w(D)} \langle |D| \rangle$, где $w(D)$ — число закрученности D , является инвариантом ориентированных зацеплений, называемым полиномом Джонса.

Доказательство.

Пусть диаграмма D' получается из D добавлением перекрестка c' с помощью движения Ω_1 . Тогда $w(D') = w(D) + \text{sign}(c')$ и $\langle |D'| \rangle = (-a)^{3\text{sign}(c')} \langle |D| \rangle$ (проверьте!). Следовательно,

$$X(D') = (-a)^{-3(w(D)+\text{sign}(c'))} \cdot (-a)^{3\text{sign}(c')} \langle |D| \rangle = (-a)^{-3w(D)} \langle |D| \rangle = X(D).$$

Определение 2.1

Пусть D диаграмма неориентированного узла. *Длина скобки Кауфмана* — это число $\text{span}(\langle D \rangle) = \text{maxdeg}_a \langle D \rangle - \text{mindeg}_a \langle D \rangle$.

Лемма 2.2

Пусть D — связная диаграмма узла с n перекрестками. Тогда

$$\text{span}(\langle D \rangle) \leq 4n.$$

Теорема 2.3

Пусть D является альтернированной диаграммой узла (т.е. диаграммой, при обходе которой проходы чередуются с переходами) без точек распадаения (т.е. перекрестков, при удалении которых диаграмма как граф становится несвязной) с n перекрестками. Тогда $\text{span}(\langle D \rangle) = 4n$.

Доказательство Леммы 2.2

Вспомним формулу

$$\langle D \rangle = \sum_{s \in \{A, B\}^n} a^{\alpha(s) - \beta(s)} (-a^2 - a^{-2})^{\gamma(s) - 1}.$$

Пусть s_a — состояние со всеми разведениями A , а s_b — с разведениями B . Тогда

$$\begin{aligned} \text{span}(\langle D \rangle) &\leq \max_s (\alpha(s) - \beta(s) + 2(\gamma(s) - 1)) - \min_s (\alpha(s) - \beta(s) - 2(\gamma(s) - 1)) = \\ &(\alpha(s_a) - \beta(s_a) + 2(\gamma(s_a) - 1)) - (\alpha(s_b) - \beta(s_b) - 2(\gamma(s_b) - 1)) = 2n + 2(\gamma(s_a) + \gamma(s_b) - 2). \end{aligned}$$

Рассмотрим поверхность M , которая получается приклеиванием к графу D $(\gamma(s_a) + \gamma(s_b))$ дисков вдоль окружностей состояний s_a и s_b . Тогда эйлерова характеристика M равна

$$\chi(M) = n - 2n + (\gamma(s_a) + \gamma(s_b)) = (\gamma(s_a) + \gamma(s_b)) - n \leq 2.$$

Следовательно,

$$\text{span}(\langle D \rangle) \leq 2n + 2(\gamma(s_a) + \gamma(s_b) - 2) \leq 2n + 2(n + 2 - 2) = 4n.$$

Гипотезы Тейта

Теорема 2.4 (Первая гипотеза Тейта)

Пусть K — зацепление и D — его альтернированная диаграмма без точек распада. Тогда D является минимальной диаграммой зацепления K .

Доказательство.

Пусть D — альтернированная диаграмма без точек распада с n перекрестками. По Теореме 2.3 имеем $\text{span}(\langle D \rangle) = 4n$. Рассмотрим произвольную диаграмму D' с n' перекрестками, которая получается из D с помощью движений Рейдемейстера. Так $\text{span}(\langle \cdot \rangle)$ является инвариантом, то

$$\text{span}(\langle D \rangle) = 4n = \text{span}(\langle D' \rangle) \leq 4n',$$

и следовательно, $n \leq n'$. Таким образом, диаграмма D минимальна. □

Гипотезы Тейта: продолжение

Теорема 2.5 (Вторая гипотеза Тейта)

Пусть D_1 и D_2 — две альтернированные диаграммы без точек распадаения одного зацепления K . Тогда $w(D_1) = w(D_2)$.

Первая гипотеза Тейта была доказана Л.Х. Кауфманом [3], К. Мурасуги [5, 6] и М.Б. Тистлтуэйтом [7, 8].

Теорема 2.6 (Третья гипотеза Тейта, [9, 10])

Предположим, что D_1 и D_2 — две альтернированные диаграммы без точек распадаения одного зацепления K . Тогда диаграмму D_1 можно превратить в D_2 с помощью конечного числа флипов, см. рис. 6.

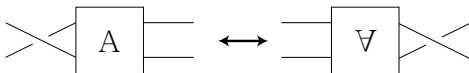


Рис. 6: Флип

Определение 2.7

Обозначим как $s(D)$ диаграмму, которая получается разведением диаграммы D согласно состоянию s . Обозначим состояния, включающие только A -разведения (соотв., B -разведения) перекрестков как s_a (соотв., s_b). Пусть $|s(D)|$ — число компонент в $s(D)$.

Определение 2.8 (Адекватность)

Диаграмма зацепления D называется *адекватной*, если $|s_a(D)| > |s(D)|$ для всех состояний s с одним B -разведением и $|s_b(D)| > |s(D)|$ для всех состояний s с одним A -разведением.



адекватная диаграмма



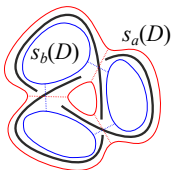
неадекватная диаграмма

Определение 2.7

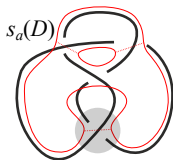
Обозначим как $s(D)$ диаграмму, которая получается разведением диаграммы D согласно состоянию s . Обозначим состояния, включающие только A -разведения (соотв., B -разведения) перекрестков как s_a (соотв., s_b). Пусть $|s(D)|$ — число компонент в $s(D)$.

Определение 2.8 (Адекватность)

Диаграмма зацепления D называется *адекватной*, если $|s_a(D)| > |s(D)|$ для всех состояний s с одним B -разведением и $|s_b(D)| > |s(D)|$ для всех состояний s с одним A -разведением.



адекватная диаграмма



неадекватная диаграмма

Лемма 2.9

Для любой диаграммы D имеем

$$\max \deg_a \langle D \rangle \leq c(D) + 2|s_a(D)| - 2,$$

$$\min \deg_a \langle D \rangle \geq -c(D) - 2|s_b(D)| + 2.$$

В случае, когда диаграмма D адекватна, неравенства обращаются в равенства.

Следствие 2.10

Пусть D — диаграмма зацепления K . Если D адекватна, то она является минимальной диаграммой зацепления K .

Лемма 2.11

Любая альтернированная диаграмма без точек распадаения адекватна.

Мы оставляем доказательство Леммы 2.11 в качестве упражнения.

Мутация

Определение 2.12

Предположим, что узел K разлагается как показано на рис. 7. Тогда узел K' на рис. 7 называется *мутацией узла K* .

Лемма 2.13

Скобка Кауфмана не различает узлы-мутанты.

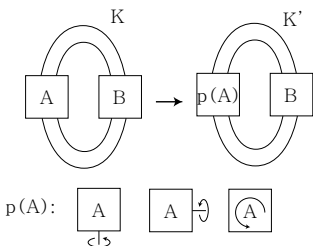


Рис. 7: K' является мутацией узла K

Связная сумма

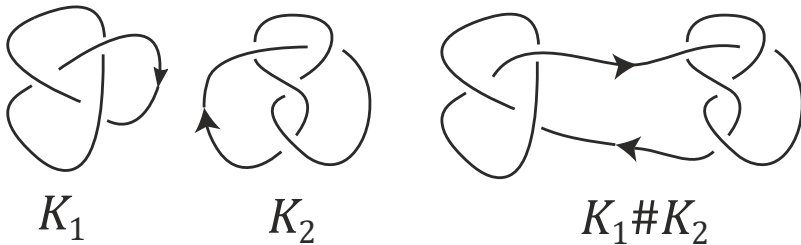


Рис. 8: Связная сумма $K_1 \# K_2$ ориентированных диаграмм узлов K_1 и K_2

Сателлитный узел

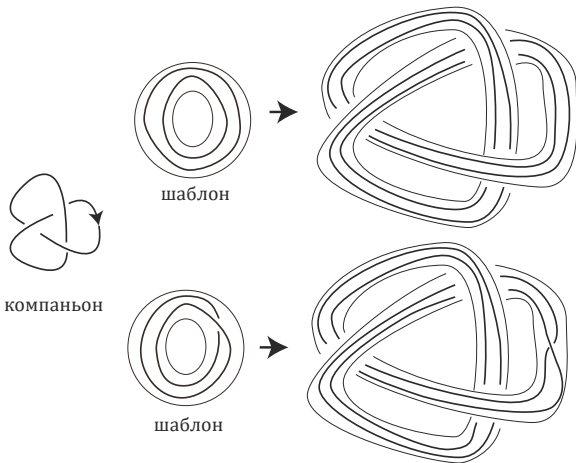


Рис. 9: Сателлитный узел задается компаньоном и шаблоном

Упражнения I

- 1 Вычислите число закрученности стандартных диаграмм следующих зацеплений:
 - правое и левое зацепление Хопфа
 - правый и левый трилистник
 - узел восьмерка
 - зацепление Уайтхеда
 - зацепление Борромео
- 2 Вычислите скобку Кауфмана и полином Джонса следующих зацеплений:
 - правое и левое зацепление Хопфа
 - правый и левый трилистник
 - узел восьмерка
 - зацепление Уайтхеда
 - зацепление Борромео
- 3 Пусть диаграмма D' получается из ориентированной диаграммы D с помощью одного увеличивающего движения Ω_1 . Покажите, что $\langle D' \rangle = (-a)^{\pm 3} \langle D \rangle$.

Упражнения II

- 4 Покажите, что скобка Кауфмана зеркального образа зацепления L получается из скобки Кауфмана зацепления L заменой переменной $a \rightarrow a^{-1}$.
- 5 Докажите равенство $X(-K) = X(K)$, где $-K$ — узел с обращенной ориентацией.
- 6 Докажите, что полином Джонса несвязной суммы зацеплений $K_1 \sqcup K_2$ равен $X(K_1 \sqcup K_2) = (-a^2 - a^{-2})X(K_1) \cdot X(K_2)$.
- 7 Докажите, что полином Джонса связной суммы зацеплений $K_1 \# K_2$ равен $X(K_1 \# K_2) = X(K_1) \cdot X(K_2)$.
- 8 Докажите, что скобка Кауфмана для любого зацепления не равна нулю как полином.
- 9 Покажите, что диаграмма узла $K_1 \# K_2$ на рис. 8 является адекватной, но не является альтернированной.

Упражнения III

- 10 Докажите следующее соотношения для полинома Джонса:

$$a^{-4}X(L_+) - a^4X(L_-) = (a^2 - a^{-2})X(L_0),$$

где L_+, L_- и L_0 — три ориентированные диаграммы, изображенные на рис. 10.

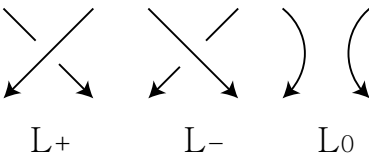


Рис. 10: Диаграммы скейн-соотношения L_+, L_-, L_0

- 11 Докажите, что скобка Кауфмана не различает узлы-мутанты.
- 12 (повышенная сложность) Докажите минимальность адекватных диаграмм, используя только полином Джонса. (Указание. Оцените длину полинома Джонса для сателлитных узлов с данным компаньоном.)

Задачи для исследования

Рассмотрим раскраску узла K конечным набором цветов (например, p цветами с правилом раскраски $c = 2a - b$). Теперь попробуем найти инварианты *раскрашенных узлов*, приписывая некоторые значения раскрашенной диаграмме. Диаграмме узла K раскрашенными дугами мы сопоставляем элементы A_{ij} в некотором кольце, как показано ниже:

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c} a \quad b \\ \diagdown \quad / \\ \quad \quad \quad \diagdown \quad / \\ \quad \quad \quad \quad \quad c \end{array} = A_{a,b} \quad \left(\begin{array}{c} + \\ B_{a,b} \end{array} \right) \begin{array}{c} \text{cup} \\ \text{cap} \end{array} \\
 \begin{array}{c} b \quad c \\ \diagdown \quad / \\ \quad \quad \quad \diagdown \quad / \\ \quad \quad \quad \quad \quad a \end{array} = C_{a,b} \quad \left(\begin{array}{c} + \\ D_{a,b} \end{array} \right) \begin{array}{c} \text{cup} \\ \text{cap} \end{array}
 \end{array}$$








Рис. 11: Крашенная скобка

Вопрос: Можно ли усилить полиномиальный инвариант с помощью данного подхода?




Открытые проблемы

- Распознает ли полином Джонса тривиальный узел?

Литература I

-  V. O. Manturov Knot theory: Second edition CRC press 560 April 4, 2018.
-  K. Murasugi, Knot Theory and Its Applications, Springer.
-  L. H. Kauffman, State Models and the Jones Polynomial, Topology 26, 395-407, 1987.
-  L. H. Kauffman, An invariant of regular isotopy, Transactions of the American Mathematical Society. 318 (2): 417–471, 1990.
-  K. Murasugi, The Jones Polynomial and Classical Conjectures in Knot Theory, Topology 26, 187-194, 1987.
-  K. Murasugi, Jones Polynomials and Classical Conjectures in Knot Theory II, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 102, 317-318, 1987.
-  M.B. Thistlethwaite, A Spanning Tree Expansion of the Jones Polynomial, Topology 26, 297-309, 1987.

Литература II

-  M.B. Thistlethwaite, Kauffman's Polynomial and Alternating Links, *Topology* 27, 311-318, 1988.
-  W. Menasco, M. Thistlethwaite, The Tait Flying Conjecture, *Bull. Amer. Math. Soc.* 25, 403-412, 1991.
-  W. Menasco, M. Thistlethwaite, The Classification of Alternating Links, *Ann. Math.* 138, 113-171, 1993.