

# Лекция. Лежандровы узлы и их инварианты

# Содержание

- 1 Лежандровы многообразия и лежандровы кривые
  - Контактные структуры
  - Плоские проекции лежандровых зацеплений
- 2 Проекция лежандровых узлов и их свойства
  - Фронтальная проекция
  - Лагранжева проекция
- 3 Движения Фукса–Табачникова (Святковского)
- 4 Числа Маслова и Беннекина
- 5 Инварианты конечного типа лежандровых узлов
- 6 Дифференциальная градуированная алгебра (DGA) лежандрова узла
- 7 Инварианты Чеканова–Пушкаря
- 8 Примеры

Теория узлов Лежандра, впервые представленная Дмитрием Фуксом и Сергеем Табачниковым, лежит на стыке теории узлов, теории волновых фронтов и контактной геометрии.

Лежандровы узлы в  $\mathbb{R}^3$  представляют собой одномерный случай лежандровых многообразий (в общем случае лежандрово многообразии представляет собой  $k$ -мерное подмногообразие в  $(2k + 1)$ -мерном многообразии, удовлетворяющем некоторым условиям). Теория узлов Лежандра интересна тем, что она позволяет ввести новую эквивалентность для узлов: помимо топологической изотопии, можно рассмотреть более тонкую изотопию в пространстве узлов Лежандра.

# Содержание

- 1 Лежандровы многообразия и лежандровы кривые
  - Контактные структуры
  - Плоские проекции лежандровых зацеплений
- 2 Проекции лежандровых узлов и их свойства
  - Фронтальная проекция
  - Лагранжева проекция
- 3 Движения Фукса–Табачникова (Святковского)
- 4 Числа Маслова и Беннекина
- 5 Инварианты конечного типа лежандровых узлов
- 6 Дифференциальная градуированная алгебра (DGA) лежандрова узла
- 7 Инварианты Чеканова–Пушкаря
- 8 Примеры

Один из основных вопросов теории дифференциальных уравнений — найти огибающую кривую для семейства прямых на плоскости.

Хорошо известно, что в гладком случае эта задача имеет решение в соответствии с теоремой существования и единственности.

Если мы рассмотрим поле, скажем, плоскостей в  $\mathbb{R}^3$  или, более общо, гиперплоскостей в нечетномерном пространстве  $\mathbb{R}^{2n+1}$ , огибающая поверхность не всегда существует.

В общем положении, называемом “максимально неинтегрируемым случаем”, максимальный размер поверхности, касательной к этим гиперплоскостям в каждой точке, равен  $n$ .

Для случая  $n = 1$  мы получаем просто кривые в  $\mathbb{R}^3$ , т.е. узлы (которые могут быть касательными к данному семейству плоскостей).

Максимально неинтегрируемые поля гиперплоскостей тесно связаны с контактными структурами.

# Содержание

- 1 Лежандровы многообразия и лежандровы кривые
  - Контактные структуры
  - Плоские проекции лежандровых зацеплений
- 2 Проекции лежандровых узлов и их свойства
  - Фронтальная проекция
  - Лагранжева проекция
- 3 Движения Фукса–Табачникова (Святковского)
- 4 Числа Маслова и Беннекина
- 5 Инварианты конечного типа лежандровых узлов
- 6 Дифференциальная градуированная алгебра (DGA) лежандрова узла
- 7 Инварианты Чеканова–Пушкаря
- 8 Примеры

Давайте определим понятие контактной структуры.

### Определение 1.1

*Контактная структура (форма)* на нечетномерном многообразии  $M^{2n+1}$  — это гладкая 1-форма  $\omega$  на  $M$ , такая что  $\omega \wedge \underbrace{d\omega \wedge \cdots \wedge d\omega}_n$  невырожденная форма.

Имея контактную форму, в каждой точке получаем гиперплоскость в касательном пространстве: множество векторов  $v$ , таких что  $\omega(v) = 0$ .

Рассмотрим случай  $\mathbb{R}^3$  и формы  $\omega = -xdy + dz$ . Очевидно, что в каждой точке  $(x, y, z)$  ядро формы генерируется двумя векторами  $(1, 0, 0)$  и  $(0, 1, x)$ . Обозначим это поле плоскостей через  $\tau$ .

## Определение 1.2

*Лежандрово зацепление* — это множество непересекающихся ориентированных кривых в  $\mathbb{R}^3$ , которые в каждой точке касаются  $\tau$ .

Можно рассмотреть проекцию лежандрова зацепления на плоскость, т.е. его плоскую диаграмму. Оказывается, проекции на разные плоскости обладают интересными свойствами.

Обратите внимание, что даже в  $\mathbb{R}^3$  существуют неэквивалентные контактные структуры, такие как *тугая* и *перекрученная*. Для каждой контактной структуры существует своя теория узлов Лежандра.

Мы не будем вдаваться в подробности и ограничимся приведенной выше структурой.



# Содержание

- 1 Лежандровы многообразия и лежандровы кривые
  - Контактные структуры
  - Плоские проекции лежандровых зацеплений
- 2 Проекции лежандровых узлов и их свойства
  - Фронтальная проекция
  - Лагранжева проекция
- 3 Движения Фукса–Табачникова (Святковского)
- 4 Числа Маслова и Беннекина
- 5 Инварианты конечного типа лежандровых узлов
- 6 Дифференциальная градуированная алгебра (DGA) лежандрова узла
- 7 Инварианты Чеканова–Пушкаря
- 8 Примеры

## Фронтальная проекция

Сначала рассмотрим проекцию лежандрова зацепления  $L$  на плоскость  $Oyz$ . Пусть  $\gamma$  — проекция компоненты  $L$ . Рассмотрим  $\dot{\gamma} = (0, \dot{y}, \dot{z})$ . По определению  $x\dot{y} = \dot{z}$ , и мы приходим к выводу, что координата  $x$  лежандровой кривой  $L$  равна отношению  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , или, другими словами, абсцисса равна наклону касательной к кривой. Единственное неудобство здесь в том, что  $\dot{y}$  не может быть равно нулю.

Этого эффекта можно избежать, позволяя  $x$  быть равным  $\infty$ ; т.е. рассматривая  $\mathbb{R}^2 \times S^1$  вместо  $\mathbb{R}^3$ . Действительно, в этом случае возникает прекрасная теория лежандровых зацеплений (как и в любом трехмерном многообразии, которой расслаивается над двумерной поверхностью  $M^2$  со слоем  $S^1$ , например, единичное расслоение  $UT_*M$  над  $M$ ). Однако здесь мы рассматриваем узлы и зацепления в  $\mathbb{R}^3$ ; таким образом, мы должны принять ограничение  $\dot{y} \neq 0$ .

# Фронтальная проекция

Это означает, что на плоскости  $Oyz$  наша кривая не имеет “вертикальных” касательных линий. Таким образом, единственная возможность изменить знак  $\dot{y}$  — это наличие каспа; см. рис. 1.

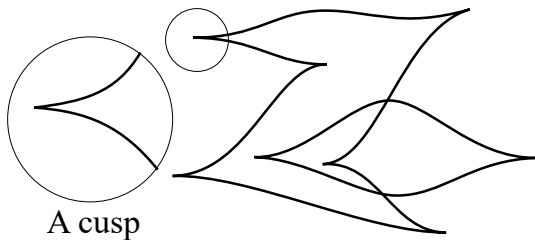


Figure 1: Касп при фронтальной проекции

# Фронтальная проекция

В общем, касп имеет форму полукубической параболы: типичным примером является кривая  $(\frac{3t}{2}, t^2, t^3)$  (касп находится в точке  $(0,0,0)$ ).

По любой кусочно-гладкой ориентированной кривой (гладкой везде, кроме каспов, где  $\dot{y}$  меняет знак), можно легко восстановить лежандрову кривую в  $\mathbb{R}^3$ , полагая

$$x = \frac{\dot{z}}{\dot{y}}.$$

Очевидно, что если взять кривую  $\gamma$  в общем положении (только с двойными точками пересечения), то получится зацепление  $L$  имеющее проекцию  $\gamma$ . Итак, для построения тени зацепления, изотопного  $L$ , нужно просто сгладить все каспы.

Кроме того, точки пересечения однозначно определяют структуру перекрестка зацепления. А именно, координата  $x$ -больше для того участка кривой, где наклон касательной больше.

# Фронтальная проекция

Можно слегка исказить проекцию  $\gamma$  (не меняя изотопический тип соответствующего лежандрова зацепления) таким образом, чтобы два пересекающихся участка кривой  $\tilde{\gamma}$  имели направления с севера-запада на юго-восток и с северо-востока на юго-запад; см. рис. 2

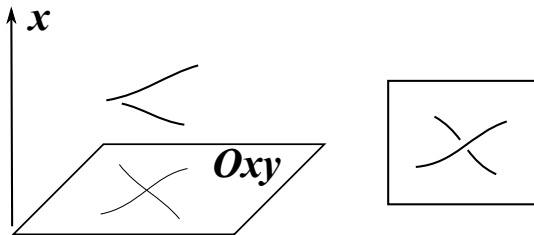


Figure 2: Восстановление типа перекрестка по фронтальной проекции

## Фронтальная проекция

В этом случае ветвь, идущая с северо-востока на юго-запад, образует переход.

Следовательно, мы знаем, как построить плоские диаграммы зацеплений по диаграммам проекций лежандровых зацеплений на  $Oyz$ .

Обратная процедура описана в доказательстве следующей теоремы.

### Теорема 1.3

*Для каждого класса изотопии зацепления существует лежандрово зацепление  $L$ , представляющее этот класс.*

# Лагранжева проекция

Теперь давайте посмотрим, что произойдет, если взять проекцию на  $Oxy$ .

В этом случае удобнее рассматривать каждую компоненту зацепления отдельно.

Пусть  $\gamma$  - кривая проекции. Если взять отрезок этой кривой, начинающийся в точке  $A$  и заканчивающийся в точке  $B$ , мы получим из  $\dot{z} = x\dot{y}$  что  $z_B - z_A = \int_A^B xdy$ . Если взять интеграл по всей кривой  $\gamma$  (от  $A$  до  $A$ ), то увидим, что

$$\oint_{\gamma} xdy = 0,$$

или по теореме Гаусса - Остроградского,

$$S(M_{\gamma}) = 0, \tag{1}$$

где  $S$  означает ориентированную площадь, а  $M_{\gamma}$  — область, ограниченная  $\gamma$  (со знаками).

Уравнение (1) — это единственное необходимое и достаточное условие замкнутости лежандровой кривой.

# Лагранжева проекция

Если мы хотим получить информацию о перекрестках для лежандрова узла, мы должны взять перекресток  $P$  и посчитать интеграл вдоль  $\gamma$  от  $P$ , лежащей на одной ветви  $\gamma$ , до  $P$  на другой ветви  $\gamma$ . Если значение этого интеграла положительное, то первая ветвь является переходом; в противном случае это проход.

Если рассмотреть  $n$ -компонентное зацепление, можно легко задать перекрестки для каждой из его компонент. Далее имеется  $n - 1$  степень свободы в расположении компонент.

Таким образом, в случае зацепления структура перекрестков не может быть восстановлена однозначно.



# Содержание

- 1 Лежандровы многообразия и лежандровы кривые
  - Контактные структуры
  - Плоские проекции лежандровых зацеплений
- 2 Проекции лежандровых узлов и их свойства
  - Фронтальная проекция
  - Лагранжева проекция
- 3 Движения Фукса–Табачникова (Святковского)
- 4 Числа Маслова и Беннекина
- 5 Инварианты конечного типа лежандровых узлов
- 6 Дифференциальная градуированная алгебра (DGA) лежандрова узла
- 7 Инварианты Чеканова–Пушкаря
- 8 Примеры

Здесь мы воспользуемся обозначениями из [Che2, ChPu]. Мы дадим определения только для случая узлов; конструкции для зацеплений получаются аналогичным образом.

Рассмотрим гладкий узел в стандартном контактном пространстве  $\mathbb{R}^3 = \{q, p, u\}$  с контактной формой  $\alpha = du - pdq$  (новые координаты  $u, p, q$  заменяют  $z, x, y$  соответственно).

### Определение 2.1

Гладкий узел  $L$  называется *лежандровым*, если ограничение  $\alpha$  на  $L$  обнуляется.

### Определение 2.2

Два лежандровых узла называются *лежандрово изотопными*, если один из них можно получить из другого с помощью диффеоморфизма  $g$  в  $\mathbb{R}^3$ , такого, что  $g^*\alpha = \phi\alpha$ , где  $\phi > 0$ .

Есть два удобных способа представления узлов Лежандра путем проецирования их на разные плоскости. Проекция  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(q, p, u) \rightarrow (q, p)$  называется *лагранжевой проекцией*, а проекция  $\sigma : (q, p, u) \rightarrow (q, u)$  называется *фронтальной проекцией*.

# Содержание

- 1 Лежандровы многообразия и лежандровы кривые
  - Контактные структуры
  - Плоские проекции лежандровых зацеплений
- 2 Проекции лежандровых узлов и их свойства
  - **Фронтальная проекция**
  - Лагранжева проекция
- 3 Движения Фукса–Табачникова (Святковского)
- 4 Числа Маслова и Беннекина
- 5 Инварианты конечного типа лежандровых узлов
- 6 Дифференциальная градуированная алгебра (DGA) лежандрова узла
- 7 Инварианты Чеканова–Пушкаря
- 8 Примеры

По фронтальной проекции можно восстановить лежандров узел следующим образом. Мы просто сглаживаем все каспы и задаем перекрестки в соответствии с правилом: *переход – это ветвь, имеющая больший наклон*. Поскольку фронтальная проекция не имеет вертикальных касательных, перекресток однозначно определен; см. рис. 3.

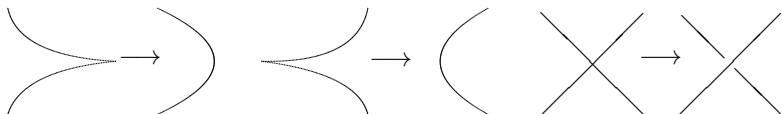


Figure 3: Восстановление диаграммы по фронтальной проекции

Фронтальная проекция называется  $\sigma$ -общего положения, если все перекрестки имеют различные координаты  $q$ .

Обратная процедура может быть выполнена так. После небольшого возмущения можно построить диаграмму, не имеющую вертикальных касательных в перекрестках. Теперь заменим все окрестности точек с вертикальными касательными на каспы. Все “хорошие” пересечения просто заменяются на перекрестки. А все “плохие” перекрестки заменяются, как показано на рис. 4.



Figure 4: Построение фронтальной диаграммы

Таким образом, мы доказали, что каждый узел можно представить как фронтальную проекцию, т.е. **у каждого узла есть лежандров представитель**. Значит, мы доказали теорему 1.3.

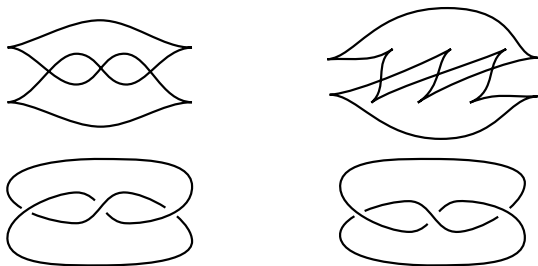


Figure 5: Левый и правый трилистники

На рис. 5 показаны диаграммы и фронты для двух трилистников. Асимметрия этих двух диаграмм вытекает из соглашения о “хороших” перекрестках.

# Содержание

- 1 Лежандровы многообразия и лежандровы кривые
  - Контактные структуры
  - Плоские проекции лежандровых зацеплений
- 2 Проекции лежандровых узлов и их свойства
  - Фронтальная проекция
  - Лагранжева проекция
- 3 Движения Фукса–Табачникова (Святковского)
- 4 Числа Маслова и Беннекина
- 5 Инварианты конечного типа лежандровых узлов
- 6 Дифференциальная градуированная алгебра (DGA) лежандрова узла
- 7 Инварианты Чеканова–Пушкаря
- 8 Примеры



В обычном случае лагранжева проекция гладкая (не имеет каспов или других особенностей, в отличие от фронтальной проекции). Как и в случае с фронтальной проекцией, лагранжева проекция позволяет нам восстановить структуру перекрестков и, следовательно, сам топологический узел.

Более точно, лагранжева проекция называется  $\pi$ -общей, если все ее самопересечения являются трансверсальными двойными точками.

Имея плоскую диаграмму  $L$  узла, давайте зафиксируем на ней некоторую точку  $P$ , отличную от пересечения, и положим  $u(P) = 0$ .

Теперь мы можем восстановить координату  $u$  для всех точек  $L$ .

Принимая во внимание, что  $du = pdq$  вдоль кривой, мы видим, что разность  $u_A - u_B$  равна ориентированной площади области, ограниченной частью кривой от  $A$  до  $B$ .

Таким образом, если у нас есть некоторая проекция  $L$  (комбинаторная диаграмма узлов) и мы хотим, чтобы она была лагранжевой, мы должны проверить следующее условие: если пройти вдоль узла из некоторой точки  $A$  в саму себя, получится уравнение для областей, вырезанных  $L$ . Все типы перекрестков регулируются уравнениями.

### Упражнение 2.3

Выпишите эти уравнения в явном виде.

Это показывает, что некоторые проекции нельзя реализовать как лагранжевы.

Например, заплетенная диаграмма (см. рис. 6) не может быть лагранжевой, потому что уравнение представляет собой сумму положительных чисел с положительными коэффициентами, которая должна быть равна нулю: мы обходим каждую область положительное число раз, и каждая область является положительной. Таким образом, сумма не может быть равна нулю.

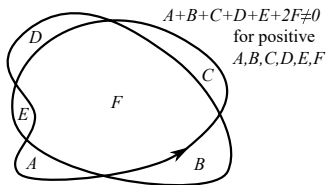


Figure 6: Заплетенная диаграмма, не являющаяся лагранжевой

В этом смысле лагранжевы диаграммы противоположны заплетенным диаграммам.

### Замечание 2.4

Третья проекция  $(q, p, u) \rightarrow (p, u)$  не представляет интереса.

Лежандров узел  $L \subset \mathbb{R}^3$  называется  $\pi$ -общим, если все самопересечения погруженной кривой  $\pi(L)$  — это трансверсальные двойные точки. В данном случае эта проекция, наделенная структурой проходов-переходов, представляет собой диаграмму узлов, которая называется *лагранжевой диаграммой*.

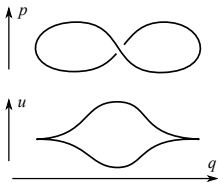


Figure 7: Лагранжева проекция и фронтальная проекция

Конечно, не каждая абстрактная диаграмма узлов в  $\mathbb{R}^2$  является диаграммой лежандрова узла или ориентированно диффеоморфно такой диаграмме.

Для данного лежандрова узла  $L \subset \mathbb{R}^3$  его  $\sigma$ -проекция, или *фронт*  $\sigma(L) \subset \mathbb{R}^3$  представляет собой сингулярную кривую без вертикальных касательных векторов.

# Содержание

- 1 Лежандровы многообразия и лежандровы кривые
  - Контактные структуры
  - Плоские проекции лежандровых зацеплений
- 2 Проекция лежандровых узлов и их свойства
  - Фронтальная проекция
  - Лагранжева проекция
- 3 Движения Фукса–Табачникова (Святковского)
- 4 Числа Маслова и Беннекина
- 5 Инварианты конечного типа лежандровых узлов
- 6 Дифференциальная градуированная алгебра (DGA) лежандрова узла
- 7 Инварианты Чеканова–Пушкаря
- 8 Примеры

Лежандровы узлы и зацепления в их фронтальной проекции допускают комбинаторное описание, как и обычные узлы и зацепления. А именно, существует набор элементарных движений, преобразующих одну фронтальную проекцию лежандрова зацепления в каждую другую проекцию того же зацепления.

Справедлива следующая теорема.

### Теорема 3.1 (Фукс, Табачников [FT])

Два фронта представляют лежандрово эквивалентные зацепления тогда и только тогда, когда один из них может быть преобразована в другой последовательностью движений 1-3, показанных на рис. 8. При добавлении 4-го движения получаем обычную (топологическую) эквивалентность зацеплений.

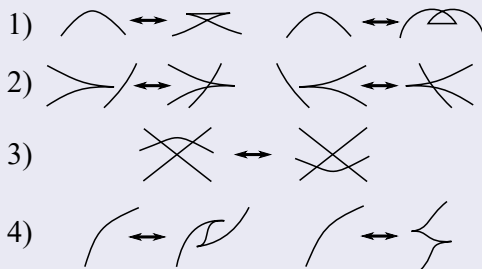


Figure 8: Движения Фукса–Табачникова

Обратите внимание, что касательное движение (когда две линии проходят друг через друга) не является лежандровой изотопией: это касание в  $\mathbb{R}^2$  образует пересечение в  $\mathbb{R}^3$  (третья координата определяется наклоном касательной). Таким образом, это движение изменяет изотопический тип лежандрова узла и не является вторым движением Рейдемейстера.

Заметим, что представление зацеплений *прямоугольными диаграммами* позволяет получить удобный способ кодирования лежандровых зацеплений: из множества движений мы исключаем некоторые стабилизации.



# Содержание

- 1 Лежандровы многообразия и лежандровы кривые
  - Контактные структуры
  - Плоские проекции лежандровых зацеплений
- 2 Проекция лежандровых узлов и их свойства
  - Фронтальная проекция
  - Лагранжева проекция
- 3 Движения Фукса–Табачникова (Святковского)
- 4 Числа Маслова и Беннекина**
- 5 Инварианты конечного типа лежандровых узлов
- 6 Дифференциальная градуированная алгебра (DGA) лежандрова узла
- 7 Инварианты Чеканова–Пушкаря
- 8 Примеры

Число Беннекина (также называемое числом Терстона–Беннекина)  $\beta(L)$  зацепления  $L$  — это коэффициент зацепления между  $L$  и  $s(L)$ , где  $s$  — небольшой сдвиг зацепления в направлении  $u$ .

Число Маслова  $m(L)$  — это число вращения проекции  $L$  на плоскость  $(q, p)$ .

Изменение ориентации на  $L$  изменяет знак  $m(L)$  и сохраняет  $\beta(L)$ . Оба эти инварианта могут быть определены комбинаторно с помощью фронтальной проекции лежандрова узла. А именно, число Маслова равно половине разности между числами положительных и отрицательных каспов; см. рис. 9.

### Упражнение 4.1

Докажите эквивалентность двух определений числа Маслова.

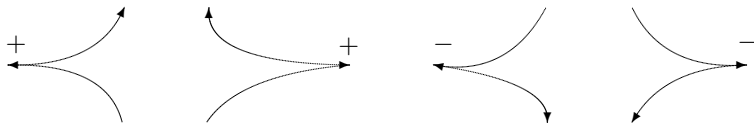


Figure 9: Положительные каспы

Отрицательные каспы

## Определение 4.2

Перекресток называется *положительным*, если ориентации двух ветвей фронта направлены в разных полуплоскости, и *отрицательным* в противном случае; см. рис. 10.

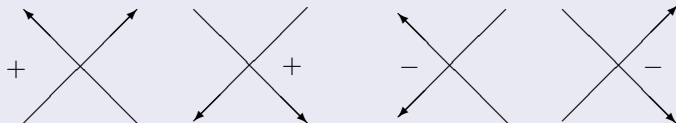


Figure 10: Положительные перекрестки  
перекрестки

Отрицательные

Число Беннекина равно

$\frac{1}{2}(\# \text{ каспы}) + (\# \text{ положительные перекрестки}) - (\# \text{ отрицательные перекрестки})$ .

## Упражнение 4.3

Покажите эквивалентность двух определений числа Беннекина.

# Содержание

- 1 Лежандровы многообразия и лежандровы кривые
  - Контактные структуры
  - Плоские проекции лежандровых зацеплений
- 2 Проекция лежандровых узлов и их свойства
  - Фронтальная проекция
  - Лагранжева проекция
- 3 Движения Фукса–Табачникова (Святковского)
- 4 Числа Маслова и Беннекина
- 5 Инварианты конечного типа лежандровых узлов**
- 6 Дифференциальная градуированная алгебра (DGA) лежандрова узла
- 7 Инварианты Чеканова–Пушкаря
- 8 Примеры

По определению, каждый лежандров узел является топологическим узлом; кроме того, два эквивалентных лежандровых узла являются топологически эквивалентными узлами. Таким образом, инвариант каждого узла представляет собой инвариант узлов Лежандра. В том числе инварианты узлов конечного типа. Более того, можно легко определить инварианты конечного типа узлов Лежандра и показать, что все инварианты конечного типа, приходящие из “топологических узлов”, имеют конечный тип в смысле Лежандра.

### Упражнение 5.1

Докажите, что число Маслова и число Беннекина являются инвариантами конечного типа: первое из них имеет порядок ноль, а второе — один.

Наиболее важное достижение (классификация) инвариантов конечного типа описывается следующим образом.

### Теорема 5.2 (Фукс, Табачников)

*Все инварианты Васильева узлов Лежандра можно получить из топологических инвариантов конечного типа и чисел Маслова и Беннекина.*

Это означает, что теория инвариантов конечного типа для лежандровых зацеплений не так богата. Мы покажем, что существуют более сильные инварианты, которые нельзя представить в терминах инвариантов конечного порядка.

Теорема вытекает из следующего наблюдения

### Теорема 5.3

*Для любых двух диаграмм лежандровых узлов  $L$  и  $L'$  одного и того же топологического типа, имеющих одинаковый индекс Маслова и числа Терстона–Беннекина, существует диаграмма  $D$  топологически тривиального лежандрова узла, такая, что  $L \# D = L' \# D$  как лежандровы узлы.*

**Доказательство теоремы 5.3** Доказательство заключается в следующем. Мы рассматриваем  $D$  как диаграмму, состоящую из достаточного количества зигзагов (см. рис. 8.4)). Реализуем топологическую изотопию между  $D$  и  $D'$  в виде последовательности движений. С третьими движением Рейдемейстера проблем нет, но для первого или второго движения Рейдемейстера, нам может понадобиться касп. Этот касп можно взять из  $D$ . Мы можем взять  $D$  достаточно большим, чтобы иметь возможность выполнить все возможные первые и вторые движения Рейдемейстера. После завершения изотопии, мы можем вернуть все “вспомогательные” каспы из  $D$  обратно.  $\square$

м

Эта теорема показывает, что с точки зрения инвариантов Васильева лежандровы узлы не так уж сильно отличаются от классических узлов. В следующем разделе мы рассмотрим совершенно новые и мощные инварианты.



# Содержание

- 1 Лежандровы многообразия и лежандровы кривые
  - Контактные структуры
  - Плоские проекции лежандровых зацеплений
- 2 Проекция лежандровых узлов и их свойства
  - Фронтальная проекция
  - Лагранжева проекция
- 3 Движения Фукса–Табачникова (Святковского)
- 4 Числа Маслова и Беннекина
- 5 Инварианты конечного типа лежандровых узлов
- 6 Дифференциальная градуированная алгебра (DGA) лежандрова узла**
- 7 Инварианты Чеканова–Пушкаря
- 8 Примеры

# Алгебра Чеканова

В настоящем разделе мы поговорим о дифференциальной градуированной алгебре (свободной ассоциативной алгебре с единичным элементом) лежандрова узла, предложенной Чекановым. Оказывается, что гомологии этой алгебры являются инвариантами лежандровых узлов. Мы будем работать с лагранжевыми диаграммами лежандровых узлов.

Сопоставим каждому  $\pi$ -общему лежандрову узлу  $K$  DGA  $(A, \partial)$  над  $\mathbb{Z}_2$  (см. [Che]).

## Замечание 6.1

Аналогичная конструкция была предложена Элиашбергом, Гивенталем и Хофером, см. [EGH, Eli]).

Пусть  $L$  — лагранжева диаграмма лежандрового узла. Обозначим перекрестки этой диаграммы через  $\{a_1, \dots, a_n\}$ .

Рассмотрим тензорную алгебру  $T(a_1, \dots, a_n)$  с образующими  $a_1, \dots, a_n$ . Эта алгебра является  $\mathbb{Z}_{m(L)}$ -градуированной алгеброй (свободной, ассоциативной и с единицей).

## Алгебра Чеканова

Прежде всего, определим градуировку в этой алгебре. Пусть  $a_j$  — перекресток  $L$ . Пусть  $z_+, z_-$  — прообразы  $a_j$  в  $\mathbb{R}^3$  при лагранжевой проекции, причем  $z_+$  имеет большую координату  $u$ , чем  $z_-$ .

Не теряя общности, предположим, что две ветви лагранжевой проекции в точке  $a_j$  ортогональны.

Эти точки делят диаграмму  $L$  на две части,  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , и мы ориентируем каждую из этих частей от  $z_+$  к  $z_-$ .

Для  $\epsilon \in \{1, 2\}$ , число вращения кривой  $\pi(\gamma_\epsilon)$  равно  $\frac{N_\epsilon}{2} + \frac{1}{4}$ , где  $N_\epsilon \in \mathbb{Z}$ . Очевидно, что  $N_1 - N_2$  равно  $\pm m(L)$ . Таким образом,  $N_1$  и  $N_2$  представляют собой один и тот же элемент группы  $\mathbb{Z}_{m(L)}$ , который мы определим как градуировку  $a_j$ .

Определим теперь дифференциал  $\partial$ . Для каждого натурального  $k$  рассмотрим изогнутый выпуклый  $k$ -угольник  $\Pi_k \subset \mathbb{R}^2$ , вершины которого  $x_0^k, \dots, x_{k-1}^k$  пронумерованы против часовой стрелки.

## Алгебра Чеканова

Форма  $dq \wedge dp$  задает ориентацию на плоскости. Обозначим через  $W_k(L)$  набор гладких погружений с сохранением ориентации  $f : \Pi_k \rightarrow \mathbb{R}^2$ , таких, что  $f(\partial\Pi_k) \subset L$ . Заметим, что  $f \in W_k(L)$  означает, что  $f(x_i^k) \in \{a_1, \dots, a_n\}$ .

Рассмотрим эти погружения с точностью до комбинаторной эквивалентности (параметризации) и обозначим множество классов эквивалентности через  $\tilde{W}_k(L)$ . Диаграмма  $L$  делит окрестность каждого перекрестка на четыре сектора. Два из них помечены как положительные (в противоположность способу, используемому при определении скобки Кауфмана), а два других считаются отрицательными. Для каждой вершины  $x_i^k$  многоугольника  $\Pi_k$  погружение  $f \in \tilde{W}_k(L)$  отображает окрестность  $\Pi_k$  либо в положительный, либо в отрицательный сектор; в этих случаях мы будем называть  $x_i^k$  *положительным* или *отрицательным*, соответственно.

Определим множество  $W_k^+(L)$ , состоящее из погружений  $f \in \tilde{W}_k(L)$  таких, что вершина  $x_0^k$  является единственной положительной вершиной для  $f$ ; а все остальные вершины отрицательны. Пусть

$W_k^+(L, a_j) = \{f \in W_k^+(L) \mid f(x_0^k) = a_j\}$ . Положим

$A_1 = \{a_1, \dots, a_n\} \otimes \mathbb{Z}_2 \subset A, A_k = A_1^{\otimes k}$ . Тогда  $A = \bigoplus_{l=0}^{\infty} A_l$ .

# Алгебра Чеканова

Определим  $\partial = \sum_{k \geq 0} \partial_k$ , где  $\partial_k(A_i) \in A_{i+k-1}$  и

$$\partial_k(a_j) = \sum_{f \in W_{k+1}^+(L, a_j)} f(x_1^{k+1}) \cdots f(x_k^{k+1}).$$

Продолжим этот дифференциал на алгебру  $A$  с помощью линейности и правила Лейбница. Следующая теорема гласит, что  $(A, \partial)$  действительно является дифференциальной градуированной алгеброй.

## Теорема 6.2

*Дифференциал  $\partial$  корректно определен. Имеем  $\deg \partial = -1$  и  $\partial^2 = 0$ .*

Основная теорема (см. [Che], а также [Che2]) следующая.

## Теорема 6.3

*Пусть  $(A, \partial), (A', \partial')$  — DGA ( $\pi$ -общих) диаграмм лежандровых узлов  $L, L'$ . Если  $L$  и  $L'$  лежандрово изотопны, то кольца гомологий  $H(A, \partial)$  и  $H(A', \partial')$  изоморфны.*

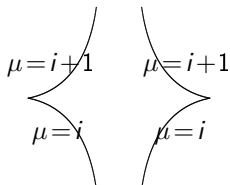
Доказательство состоит в прямой проверке.

# Содержание

- 1 Лежандровы многообразия и лежандровы кривые
  - Контактные структуры
  - Плоские проекции лежандровых зацеплений
- 2 Проекция лежандровых узлов и их свойства
  - Фронтальная проекция
  - Лагранжева проекция
- 3 Движения Фукса–Табачникова (Святковского)
- 4 Числа Маслова и Беннекина
- 5 Инварианты конечного типа лежандровых узлов
- 6 Дифференциальная градуированная алгебра (DGA) лежандрова узла
- 7 Инварианты Чеканова–Пушкаря**
- 8 Примеры

Инварианты, описанные в этом разделе, являются чисто комбинаторными. Они определяются в терминах фронтальной проекции. Хотя они комбинаторны и доказательство их инвариантности можно легко получить, просто проверив все движения Рейдемейстера, они имеют глубокие гомологические основания.

Пусть дан  $\sigma$ -общий ориентированный лежандров узел  $L$ . Обозначим через  $C(L)$  множество его точек, соответствующих каспам  $\sigma_L$ . индекс Маслова  $\mu : L/C(L) \rightarrow \Gamma = \mathbb{Z}_m$  является локально постоянной функцией, однозначно определяемой с точностью до аддитивной константы с помощью следующего правила: значение  $\mu$  изменяется в точках  $C(L)$  на  $\pm 1$ , как показано на рис. 11. Перекресток называется *перекрестком Маслова*, если  $\mu$  принимает одинаковое значение на обеих его ветвях.



Предположим, что  $\Sigma = \sigma(L)$  представляет собой объединение замкнутых кривых  $X_1, \dots, X_n$ , которые имеют конечное число пересечений и самопересечений. Назовем неупорядоченный набор  $\{X_1, \dots, X_n\}$  *разложением*  $\Sigma$ .

Разложение называется *допустимым*, если удовлетворяет некоторым условиям.

1. Каждая кривая  $X_i$  ограничивает топологически вложенный диск:  $X_i = \partial B_i$ .
2. Для каждого  $i$  и  $q \in \mathbb{R}$  множество  $B_i(q) = \{u \in \mathbb{R} \mid (q, u) \in B_i\}$  является либо дугой, либо состоит из одной точки  $u$ , такой, что  $(q, u)$  — касп в  $\sigma_L$ , либо пустое.



Условия 1 и 2 означают, что каждая кривая  $X_i$  имеет ровно два каспа (и, следовательно, количество кривых равно половине числа каспов). Каждый  $X_i$  разделен каспами на две части, на которых координата  $q$  является монотонной функцией. Вблизи пересечения  $x \in X_i \cap X_j$ , разложение  $\Sigma$  может выглядеть одним из трех способов, представленных на рисунке 12. Первый тип пересечения, показанный на рис. 12.a, автоматически исключается в соответствии с условиями 1,2. Второй тип пересечения (см. рис. 12.b) называется *переключающим*. Третий тип (рис. 12.c) называется *непереключающим*.

3. Если  $(q_0, u) \in X_i \cap X_j$  переключающий для некоторого  $i \neq j$ , то для каждого  $q \neq q_0$ , достаточно близкого к  $q$ , множество  $B_i(q) \cap B_j(q)$  либо совпадает с  $B_i(q)$ , либо с  $B_j(q)$ , либо является пустым.

4. Каждое переключающее пересечение является перекрестком Маслова.

### Определение 7.1

Разложение называется *допустимым*, если оно удовлетворяет условиям 1-3 и *градуированным допустимым*, если оно также удовлетворяет условию 4.

Обратите внимание, что существует три типа пересечений в зависимости от расположения  $X_i$ , показанные на рис. 12.

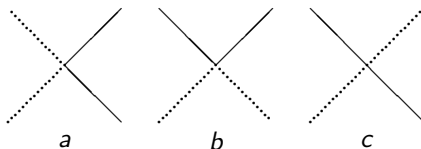


Figure 12: Три типа пересечений

Обозначим через  $Adm(\Sigma)$  (соответственно,  $Adm_+(\Sigma)$ ) множество допустимых (соответственно, градуированных допустимых) разложений  $\Sigma$ . Для  $D \in Adm(\Sigma)$  обозначим через  $Sw(D)$  множество его точек переключения. Положим  $\Theta(D) = \#(D) - \#Sw(D)$ .

Теперь мы готовы сформулировать основную теорему об инвариантах Чеканова–Пушкаря.

### Теорема 7.2

Если  $\sigma$ -общие лежандровы узлы  $L, L' \subset \mathbb{R}^3$  лежандрово изотопны, то существует взаимно однозначное отображение

$$g : \text{Adm}(\sigma(L)) \rightarrow \text{Adm}(\sigma(L')),$$

такое что

$$g(\text{Adm}_+(\sigma(L))) = \text{Adm}_+(\sigma(L'))$$

и  $\Theta(g(D)) = \Theta(D)$  для всех  $D \in \text{Adm}(\sigma(L))$ .

В частности, числа  $\#(\text{Adm}(\sigma(L)))$  и  $\#(\text{Adm}_+(\sigma(L)))$  являются инвариантами лежандровой изотопии.

**Доказательство** Достаточно установить соответствие между разложениями в случае, когда  $L$  и  $L'$  отличаются движением Фукса–Табачникова; см. рис. 8.

Для первого движения перекресток движения должен быть переключающим, а два каспа должны спариваться.

Для второго движения ни один из перекрестков движения не может быть переключением, поэтому структура разложений не меняется.

Для третьего шага естественная биекция между перекрестками диаграмм  $L$  и  $L'$  индуцирует биекцию между разложениями.  $\square$

# Содержание

- 1 Лежандровы многообразия и лежандровы кривые
  - Контактные структуры
  - Плоские проекции лежандровых зацеплений
- 2 Проекция лежандровых узлов и их свойства
  - Фронтальная проекция
  - Лагранжева проекция
- 3 Движения Фукса–Табачникова (Святковского)
- 4 Числа Маслова и Беннекина
- 5 Инварианты конечного типа лежандровых узлов
- 6 Дифференциальная градуированная алгебра (DGA) лежандрова узла
- 7 Инварианты Чеканова–Пушкаря
- 8 Примеры

Как инварианты Чеканова, так и инварианты Чеканова–Пушкаря не могут быть выражены в терминах инвариантов конечного типа. Чтобы показать это (с учетом теоремы Фукса–Табачникова), достаточно найти пару узлов Лежандра, которые представляют один и тот же топологический узел (таким образом, имеют все одинаковые топологические инварианты конечного порядка) и имеют одинаковые числа Маслова и Беннекина. Такая пара узлов называется парой Чеканова. Их фронтальные проекции показаны на рисунке 13. Левая диаграмма имеет одно градуированное допустимое разложение с переключениями в перекрестках 1 и 4. Правая диаграмма имеет два градуированных допустимых разложения с наборами переключающих перекрестков  $\{1, 2\}$  и  $\{1, 2, 4, 5\}$ .

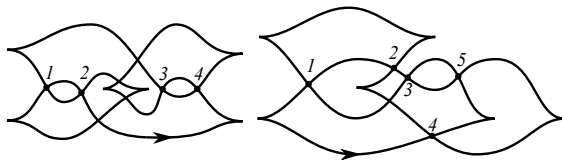











Figure 13: Пара Чеканова. Перекрестки Маслова помечены точками и занумерованы

# References I

-  V. O. Manturov, Knot theory: Second edition CRC press 560 April 4, 2018.
-  Chekanov, Yu. (2002), Differential algebras of Legendrian links, *Inventiones Mathematicae*, **150**(3), pp. 441–483.
-  Chekanov, Yu. V. (2002), Invariants of Legendrian knots, In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Beijing, 2*, pp. 385–394., (Beijing: Higher Education Press)
-  Chekanov, Yu.V., Pushkar, P.E. (2005), Differential algebras of Legendrian links, *Russian Math. Surveys*, **60**(1), pp. 95–149.
-  Eliashberg, Ya., Givental, A. and Hofer, H. (2002), An introduction to symplectic field theory, *Geom Funct. Anal.*, Special Volume, Part II, pp. 560–673.

# References II

-  Eliashberg, Ya. (1993), Legendrian and transversal knot invariants in tight contact 3-manifolds *Topological methods in modern mathematics*, Publish or Perish, Houston, pp. 171–193.
-  Fuchs, D. and Tabachnikov, S. (1997), Invariants of Legendrian and transverse knots in the standard contact space, *Topology*, **36**, pp. 1025–1053.
-  Swiatkowski, J. (1992), On the isotopy of Legendrian knots, *Ann. Glob. Anal. Geom.*, **10**, pp. 195–207.
-  Thistlethwaite, M. (1987), A spanning tree expansion for the Jones polynomial, *Topology*, **26**, pp. 297–309.