Инварианты Виттена–Решетихина–Тураева

Содержание

1. Оснащенные перестройки
2. Движения Кирби
3. Алгебра Темперли–Либа
4. Идемпотент Джонса–Венцля
   - Идемпотент Джонса–Венцля
   - Идемпотенты как сумма танглов
5. Основная конструкция
6. Инварианты зацеплений в 3-многообразиях
7. Виртуальные 3-многобразия и их инварианты
8. Упражнения

Оснащенные зацепления

Оснащенные перестройки определяются для оснащенных зацеплений в 3-сфере. Фактически, их можно представить как приклеивание ручки в 4-мерному шару, краем которого является наша 3-сфера.

Определение 1.1

Оснащенное зацепление — это зацепление в $\mathbb{R}^3$, компонентам которого приписаны целые числа.

Каждое оснащенное зацепление можно представить в виде ленты: для каждой компоненты зацепления рассмотрим ленту в ее окрестности, так что коэффициент зацепления между краями ленты равен метке компоненты, см. рис. 1. Один край ленты должен лежать в торической окрестности второго края и пересекать каждый меридиональный диск последнего только один раз.

Оснащенные зацепления

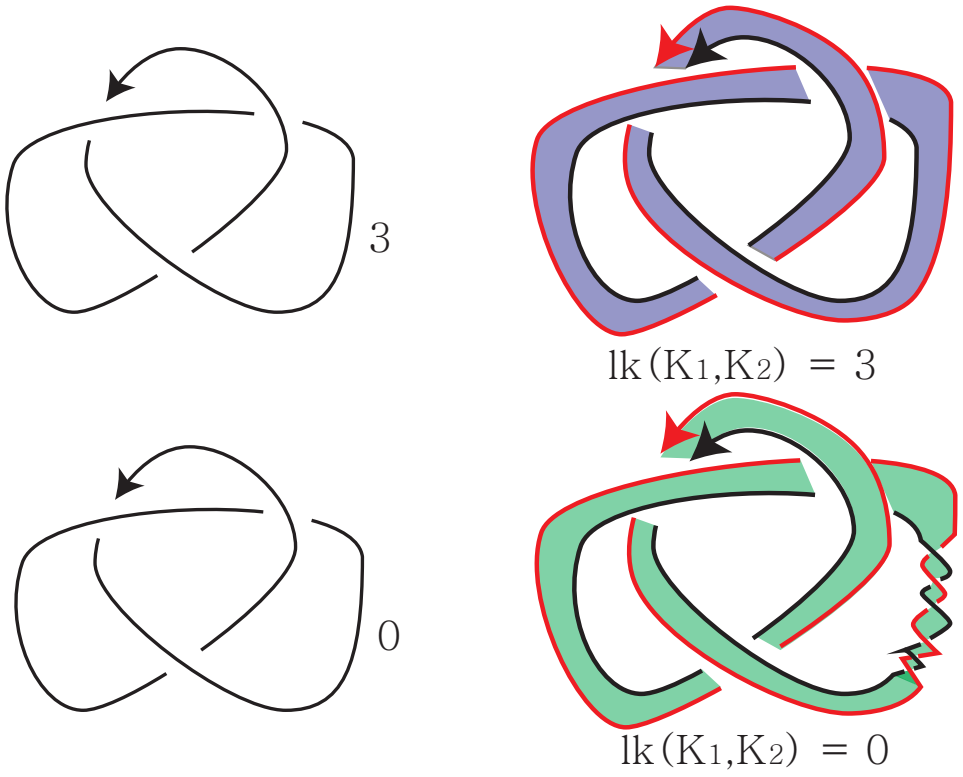


Рис. 1: Оснащенные узлы и соответствующие ленты

Определение 1.2

Два оснащенных зацепления *изотопны*, если соответствующие ленты изотопны.

Оснащенные перестройки

По оснащенному зацеплению L можно построить 3-многообразие следующим образом.

Для каждой компоненты K зацепления L рассмотрим ее оснащение $n(K)$. Теперь мы можем построить ленту: мы берем узел K', коллинеарный K, таким образом, чтобы коэффициент зацепления между K и K' был равен n. Обратите внимание, что этот выбор однозначно определен (с точностью до изотопии): изменяя ориентации K и K' одновременно, мы не меняем коэффициент зацепления.

Таким образом, мы выбрали кривую для (каждой) компоненты зацепления.

Следующий шагом построения такой. Мы вырезаем все полнотория — трубчатые окрестности компонент, а затем вклеиваем новые так, чтобы их меридианы отображались в выбранные кривые, именуемые *параллелями*.

Пример

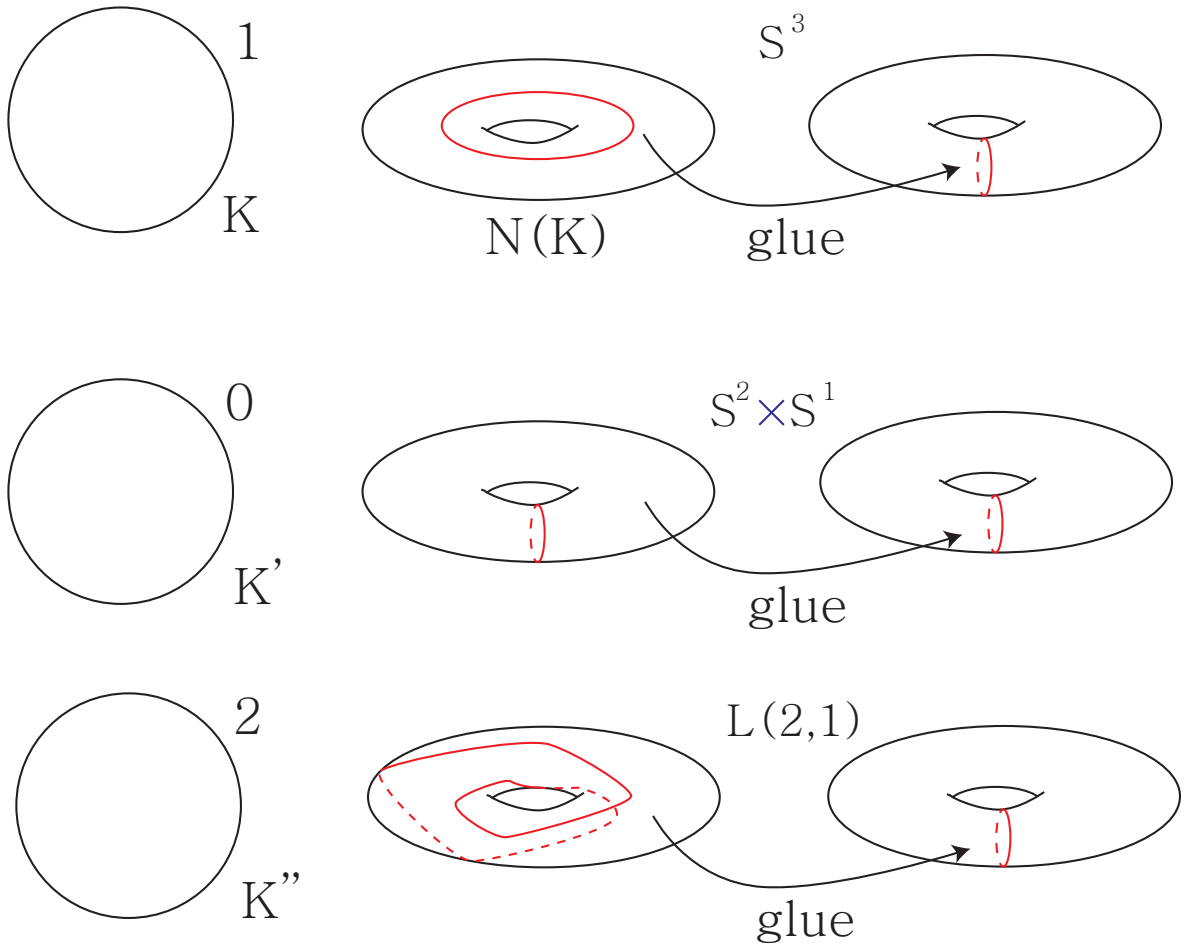


Рис. 2: Оснащенный узел и многообразие, соответствующее перестройке вдоль узла

Основная теорема

Теорема 1.3

Каждое ориентируемое 3-мерное многообразие можно получить из стандартной 3-мерной сферы с помощью оснащенной перестройки.

Фактически, мы можем получить любое ориентированное 3-многообразие из любого другого ориентированного 3-многообразия с помощью так называемой *целочисленной перестройки*.

Идея доказательства заключается в следующем: многообразие можно склеить из двух тел с g ручками по некоторому гомеоморфизму края S_g; каждый гомеоморфизм S_g можно свести к 'элементарным гомеоморфизмам"; последние могут быть реализованы с помощью торических перестроек, как указано выше.

Теорема Дена–Ликориша

Здесь следует упомянуть важную теорему Дена и Ликориша.

Теорема 1.4 (Ден–Ликориш)

Каждый сохраняющий ориентацию гомеоморфизм поверхности S_g может быть представлен как композиция скручиваний Дена и гомеоморфизмов, изотопных тождественному.

Поскольку каждое скручивание Дена можно интерпретировать как оснащенную перестройку, доказательство завершено.

Замечание 1.5

Первое доказательство Теоремы 1.4 (с некоторыми пробелами) получено Деном в [1]. Первое строгое доказательство найдено Ликоришем [8].

Как рисовать ленты

Оснащенное зацепление легко задать плоской диаграммой зацепления: оснащение здесь означает коэффициент самозацепления компоненты (его можно задать с помощью движений Ω_1; каждое движение меняет оснащение на ± 1). Если мы хотим рассматривать зацепления вместе с оснащением, мы должны взять следующий набор движений на плоских диаграммах: движения Ω_2, Ω_3, а также двойное перекручивание Ω_1'; см. рис. 3.

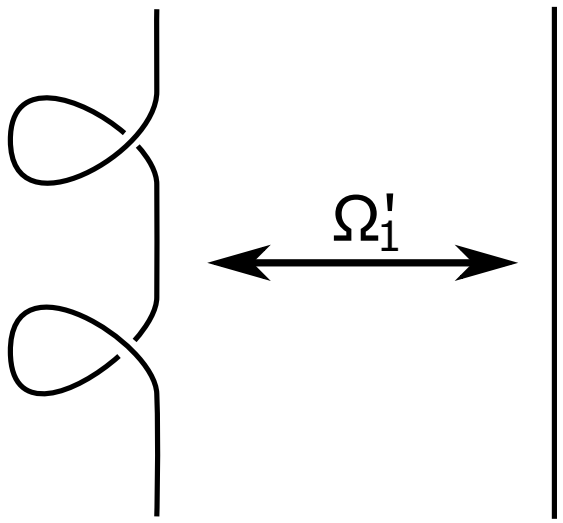


Рис. 3: Двойное перекручивание

Движения Кирби

Очевидно, что разные зацепления могут кодировать одно и то же 3-многообразие (с точностью до диффеоморфизма). Оказывается, что существуют два движения, которые сохраняют 3-многообразие. Первое движение Кирби — это добавление (удаление) изолированной окружности с оснащением ± 1, см. рис. 4.

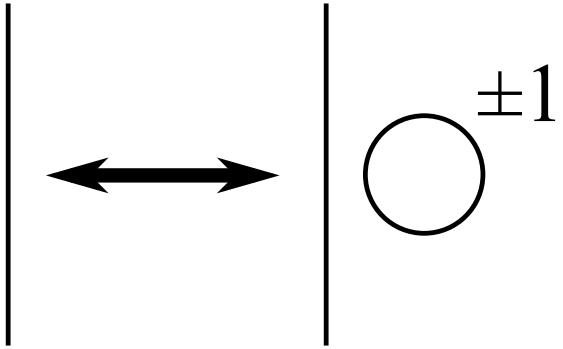


Рис. 4: Первое движение Кирби

Движения Кирби

Второе движение показано на рис. 5. При выполнении этого движения мы протягиваем одну компоненту с оснащением k вдоль другой (при этом оснащение l остается неизменным). Преобразованная компонента будет иметь оснащение $k + l$.

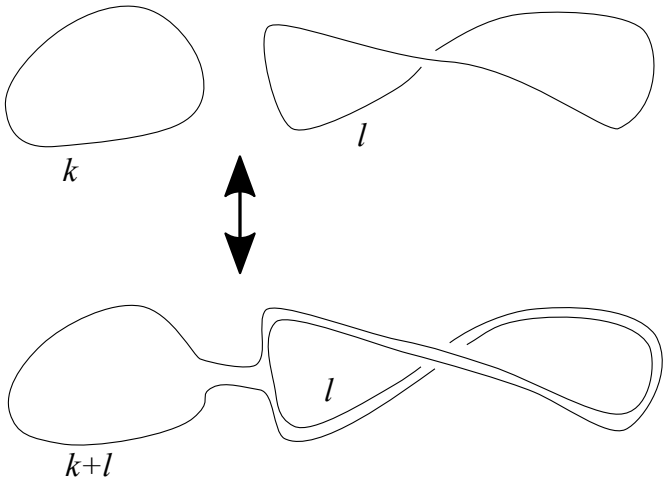


Рис. 5: Второе движение Кирби

Движения Кирби

Теорема 2.1 (Кирби [7])

Два оснащенных зацепления порождают одно и то же 3-многообразие, если одно из них может быть преобразовано в другое с помощью последовательности движений Кирби и оснащенных изотопий.

Замечание 2.2

Известно, что любое замкнутое ориентированное 3-многообразие является границей некоторого ориентированного 4-многообразия. То есть оснащенные перестройки можно использовать не только для изучения 3-многообразий, но и для изучения 4-многообразий.

Но *различные 4-многообразия могут иметь одну и ту же границу.* Например, если мы возьмем связную сумму с $\mathbb{CP}^2$, край не изменится. Это связное суммирование называется “расширением”; обратная операция называется “уменьшением”. Оно возникает, когда мы применяем первое движение Кирби.

Содержание

1. Оснащенные перестройки
2. Движения Кирби
3. Алгебра Темперли–Либа
4. Идемпотент Джонса–Венцля
   - Идемпотент Джонса–Венцля
   - Идемпотенты как сумма танглов
5. Основная конструкция
6. Инварианты зацеплений в 3-многообразиях
7. Виртуальные 3-многобразия и их инварианты
8. Упражнения

В настоящей секции мы планируем дать набросок введения к *знаменитой теории инвариантов Виттена–Решетихина–Тураева.* Первая статья Виттенав данной области [14] была посвящена конструкции инвариантов зацеплений в 3-многообразиях. Однако математики не были полностью удовлетворены уровнем строгости этой работы. Математические основы этой теории созданы благодаря Виро, Тураеву и Решетихину [12, 13]. Здесь мы следуем работе Ликориша [9], где он упростил работу этих трех авторов для случая 3-многообразий (без вложенных зацеплений).

Основная идея описания состоит в использовании скобки Кауфмана (которая инвариантна при изотопии лент) и применении ее к некоторым сложным комбинациям зацеплений так, чтобы полученный результат был инвариантен при движениях Кирби. В частности, чтобы показать инвариантность при втором движении Кирби, используется специальный элемент, *идемпотент Джонса–Венцля*, который является ключом к структуре и применению алгебр Темперли–Либа в теории представлений, операторных алгебрах и математической физике.

Алгебра Темперли–Либа является классическим объектом в теории операторных алгебр. Она имеет много общего с алгеброй Гекке. Однако она реализована как *скейн-алгебра*. Мы опишем, как скобка Кауфмана может быть использована для построения инвариантов 3-многообразий с помощью алгебры Темперли–Либа.

Пусть M^3 - многообразие, представленное с помощью оснащенного зацепления в S^3. Мы будем использовать ленты на плоскости (или просто плоские диаграммы), чтобы определить оснащение. Изотопии этих диаграмм рассматриваются с точностью до Ω_2, Ω_3 и двойного закручивания Ω_1', показанного на рис. 3.

Алгебра Темперли–Либа является частным случаем так называемых скейн-модулей. Ниже мы приведем несколько примеров, которые будут полезны в будущем.

С каждой диаграммой D оснащенного зацепления ассоциируется скобка Кауфмана $\langle D \rangle$ с переменной a. Для конкретного значения $a_0 \in \mathbb{C}$ из a значение $\langle D \rangle$ определяется как ненормализованная скобка Кауфмана, вычисленная в a_0, при условии, что $\langle \bigcirc \rangle$ равна единице, а не $-a_0^2 - a_0^{-2}$. Пусть V — линейное пространство над $\mathbb{C}$, состоящее из конечных линейных комбинаций диаграмм зацеплений. В пространстве V рассмотрим подпространство V_0, порожденное векторами типа

$$\{ \quad - a_0 \quad - a_0^{-1} \quad , \; D \sqcup \bigcirc + (a_0^{-2} + a_0^2) D \}.$$

Пусть $S = V/V_0$. Набор S называется *скейн-модулем* для $\mathbb{R}^2$. В естественной проекции $p : V \to V/V_0 = S$ элемент D преобразуется в λe_1, где λ — это значение многочлена $\langle D \rangle$ при $a = a_0$, и $e_1 \in S$ — это образ диаграммы, состоящей из одной окружности.

Действительно, пусть E_i — диаграмма, состоящая из i попарно непересекающихся окружностей. Из построения $\langle D \rangle$ следует, что $D = \sum \lambda_i E_i + w_1$ и $\sum \lambda_i E_i = \lambda E_1 + w_2$, где $w_1, w_2 \in V_0$, а λ - это значение $\langle D \rangle$ в a_0.
Теперь пусть e — ненулевой элемент S. Тогда $p(D) = f(D)e$, где $f(D) \in \mathbb{C}$. Для e удобно выбрать элемент e_0, соответствующий пустой диаграмме. Такой выбор базового элемента будет соответствовать умножению для f в отношении операции связной суммы.
Следовательно,

$$f(D_1 \cup D_2) = \sum_{i,j} (c^i)^{\lambda_i} \times (c^j)^{\mu_j}$$

$$= \sum_i (c^i)^{\lambda_i} \times \sum_j (c^j)^{\mu_j} = f(D_1) f(D_2).$$

Построение S допускает следующее обобщение. Пусть F — ориентированная 2-поверхность с границей ∂F (возможно, $\partial F = \emptyset$). Фиксируем $2n$ точек на ∂F (в случае пустого ∂F, $n = 0$). *Диаграммой* на F назовем граф (возможно, не связный или содержащий окружности) Γ на F такой, что $\Gamma \cap \partial F$ состоит точно из $2n$ выбранных точек; эти точки являются единственными вершинами Γ валентности один; все остальные вершины имеют валентность четыре и наделены структурой перекрестка (как в в случае диаграмм узлов). Эти диаграммы рассматриваются с точностью до изотопии (без изменения комбинаторной структуры и движения конечных точек).

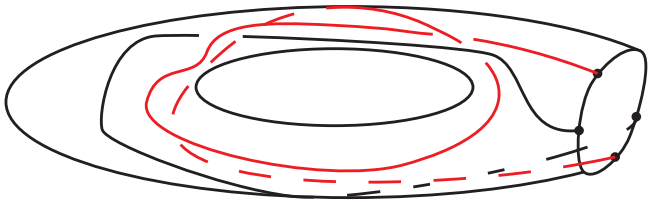


Рис. 6: Диаграмма на поверхности с краем

Зафиксируем $a_0 \in \mathbb{C}$ и рассмотрим векторное пространство $V(F, 2n)$ над $\mathbb{C}$, состоящее из конечных линейных комбинаций изотопических классов диаграмм. Пусть $V_0(F, 2n)$ - подмножество $V(F, 2n)$, порождаемое векторами типа

$$\{ \quad - a_0 \quad - a_0^{-1} \quad , \; D \sqcup \bigcirc + (a_0^{-2} + a_0^2) D \}.$$

Положим $S(F, 2n) = V(F, 2n)/V_0(F, 2n)$. Для простоты обозначим $S(F, 0)$ через $S(F)$.

Замечание 3.1

Важно учитывать ориентацию поверхности, чтобы иметь возможность различать перекрестки и .

Теорема 3.2

Образ $P(D)$ диаграммы D при естественной проекции на $S(F, 2n)$ инвариантен относительно Ω_1' (см. рис. 3), Ω_2, Ω_3.

Доказательство этой теоремы полностью аналогично доказательству инвариантности скобки Кауфмана.

Теорема 3.3

Базис $S(F, 2n)$ состоит из образов (при естественном изоморфизме) всех изотопических классов диаграмм D_i, не содержащих ни пересечений, ни стягиваемых кривых.

Следующее утверждение очевидно.

Утверждение 3.4

$S(S^2) \cong S(\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{C}$.

Утверждение 3.5

Пространство $S(I \times S^1)$ имеет естественную структуру алгебры над $\mathbb{C}$. Эта алгебра изоморфна $\mathbb{C}[\alpha]$.

Доказательство. По теореме 3.3, в качестве базиса можно взять семейство диаграмм, состоящих из n окружностей, параллельных основанию цилиндра $I \times S^1$. Умножение определяется путем присоединения нижнего основания одного цилиндра к верхнему основанию другого цилиндра и изменения масштаба высоты цилиндра. Пусть α — образ (в естественной проекции) диаграммы, состоящей из одной окружности, проходящей вдоль параллели цилиндра. Остальная часть предложения очевидна. $\square$

Теперь рассмотрим пространство $S(D^2, 2n)$. Согласно теореме 3.3, базис этого пространства состоит из попарно непересекающихся дуг с конечными точками на ∂D. Количество элементов базиса равно n-му числу Каталана c_n. Эти числа обладают следующими свойствами:

1. $c_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} c_i c_{n-i}$;
2. $c_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}$.

Пространство $S(D^2, 2n)$ имеет структуру алгебры, однако эта структура не является канонической. Чтобы определить умножение, рассмотрим диск D^2 с фиксированными $2n$ точками как квадрат, имеющий n фиксированных точек на одной стороне и n точек на другой стороне. После этого умножение производится простым наложением одного квадрата на другой и изменением масштаба; см. рис. 7.

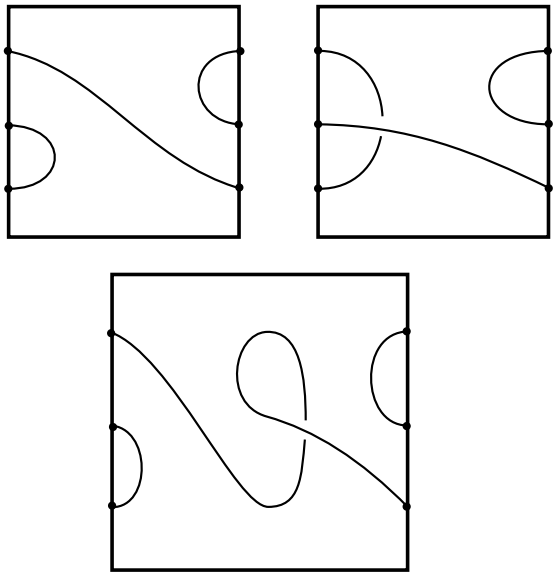


Рис. 7: Умножение в алгебре Темперли–Либа

Определение 3.6

Алгебра, определенная выше, называется *алгеброй Темперли - Либа*. **Обозначение:** TL_n.

Пусть e_i — элемент TL_n, соответствующий диаграмме, показанной на рис. 8.

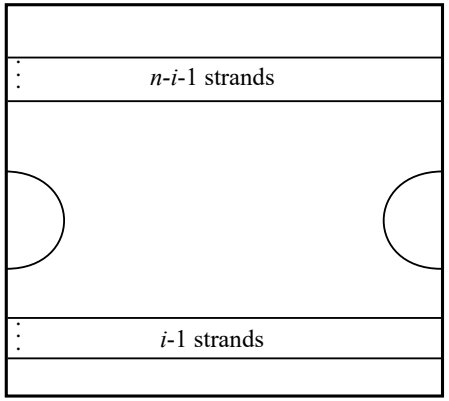


Рис. 8: Элемент e_i

Далее, пусть 1_n является элементом TL_n, соответствующим диаграмме, состоящей из n параллельных дуг.

Теорема 3.7

Элемент 1_n — единица TL_n. Элементы $e_1, \ldots, e_{n-1}$ представляют собой мультипликативный базис алгебры TL_n.

Доказательство очевидно.
Также легко видеть, что следующий набор соотношений является достаточным порождающим набором для TL_n:

1. $e_i^2 = e_i(-a_0^2 - a_0^{-2})$;
2. $e_i e_{i+1} e_i = e_i$.

Содержание

1. Оснащенные перестройки
2. Движения Кирби
3. Алгебра Темперли–Либа
4. Идемпотент Джонса–Венцля
   - Идемпотент Джонса–Венцля
   - Идемпотенты как сумма танглов
5. Основная конструкция
6. Инварианты зацеплений в 3-многообразиях
7. Виртуальные 3-многобразия и их инварианты
8. Упражнения

Идемпотент Джонса–Венцля

Чтобы продолжить, следует ввести идемпотентный элемент $f^{(n)}$ в алгебре Темперли–Либа TL_n, который называется *идемпотентом Джонса–Венцля*.
Пусть A_n — подалгебра в TL_n, порожденная $e_1, \ldots, e_{n-1}$ (без 1_n).
Тогда элемент $f^{(n)}$ определяется следующими соотношениями:

$$f^{(n)} A_n = A_n f^{(n)} = 0; \tag{1}$$

$$1_n - f^{(n)} \in A_n. \tag{2}$$

Такой элемент существует только в том случае, если мы предполагаем некоторые ограничения для $a_0 \in \mathbb{C}$.

Идемпотент Джонса–Венцля

Теорема 4.1

Пусть $a_0^{4k} \neq 1$ для каждого $k = 1, \ldots, n-1$. Тогда существует единственный элемент $f^{(n)} \in TL_n$, удовлетворяющий описанным выше свойствам. Этот элемент является идемпотентным: $f^{(n)} \cdot f^{(n)} = f^{(n)}$.

Обратите внимание, что *существование* $f^{(n)}$ дает единственность и идемпотентность. А именно, единственность означает единственность единичного элемента $1_n - f^{(n)}$ в A_n. Более того, поскольку $1_n - f^{(n)}$ является единичным элементом A_n, мы имеем $(1 - f^{(n)})(1 - f^{(n)}) = (1 - f^{(n)})$. Из этого уравнения мы легко выводим идемпотентность $f^{(n)}$.

Построение $f^{(n)}$

Конструкция $f^{(n)}$ использует индукцию n. Нам понадобится еще одна конструкция и некоторые ее свойства. Определим элемент $\Delta_n \in (\mathbb{R}^2)$ как замыкание $f^{(n)}$; см. рис. 9. Более точно, $f^{(n)}$ — это линейная комбинация диаграмм; нужно взять их замыкания, как показано на рис. 9, а затем взять соответствующую линейную комбинацию. Аналогично, определяется элемент $S_n(\alpha) \in S(S^1 \times I)$: это ‘замыкание"$f^{(n)}$ в кольцо; см. рис. 10. Здесь α обозначает образующую кольца многочленов $S(S^1 \times I)$. Очевидно, что Δ_n получается из S_n при естественной проекции $S(S^1 \times I) \to S(\mathbb{R}^2)$ (внутренняя окружность заклеивается диском).

Построение $f^{(n)}$

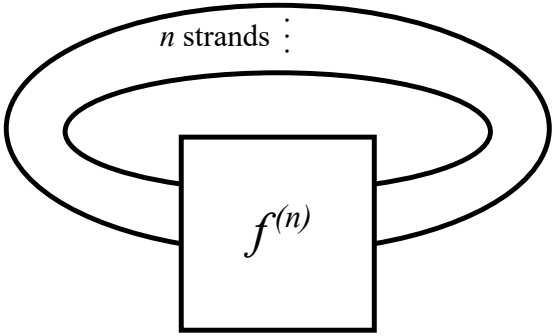


Рис. 9: Элемент Δ_n

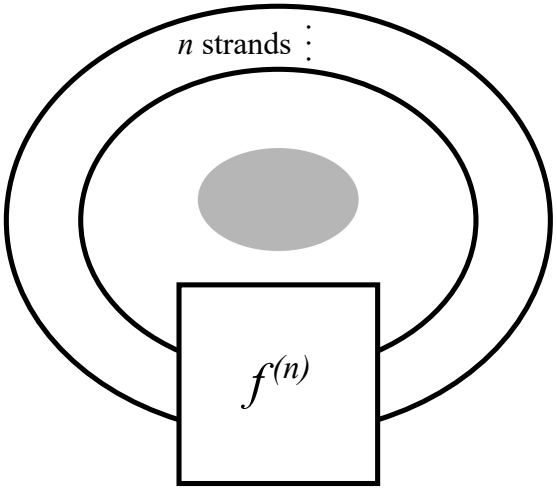


Рис. 10: Элемент S_n

Построение $f^{(n)}$

Элементы Δ_n можно определить по индукции
$\Delta_{n+1} = (-a_0^{-2} - a_0^2)\Delta_n - \Delta_{n-1}$.
Очевидно, что $\Delta_1 = -a_0^2 - a_0^{-2}$. Кроме того, если $a_0^{4(n+1)} \neq 1$, то $\Delta_n \neq 0$; точнее, $\Delta_n = \frac{(-1)^n(a_0^{2(n+1)} - a_0^{-2(n+1)})}{a_0^2 - a_0^{-2}}$.
Мы приведем только конкретную индуктивную формулу для $f^{(n)}$:

$$f^{(n+1)} = f_1^{(n)} - \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} f_1^{(n)} e_n f_1^{(n)},$$

где $f_1^{(n)}$ обозначает элемент из A_n, полученный из $f^{(1)}$ (все слагаемые с коэффициентами) путем добавления $(n-1)$ горизонтальной линии, см. рис. 11.
Элементы $S_n(\alpha)$ можно построить индуктивно по формуле:

$$S_{n+1}(\alpha) = \alpha S_n - S_{n-1}.$$

Построение $f^{(n)}$

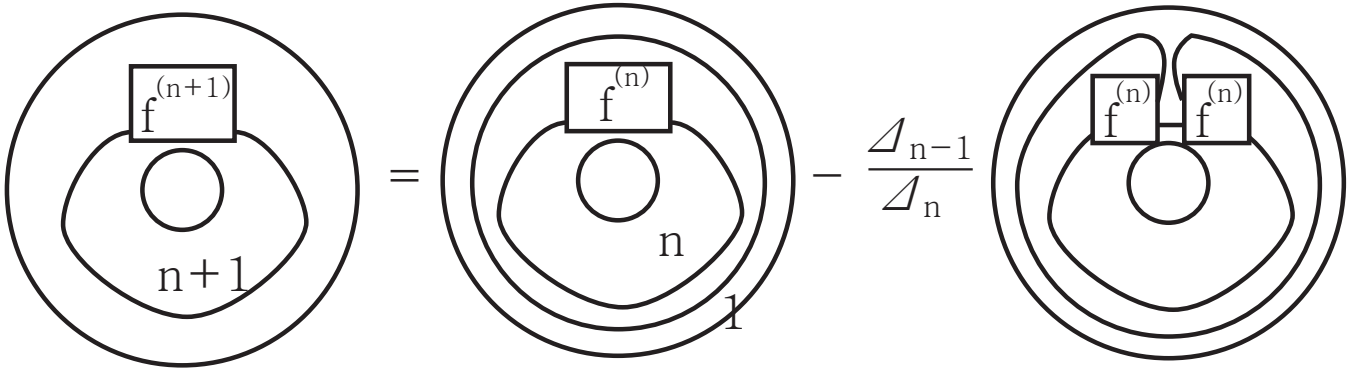
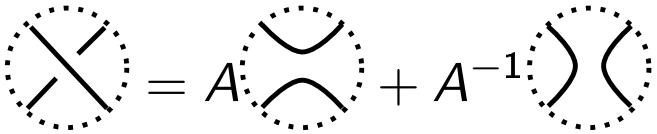


Рис. 11: $f^{(n+1)} = f_1^{(n)} - \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} f_1^{(n)} e_n f_1^{(n)}$,

Содержание

1. Оснащенные перестройки
2. Движения Кирби
3. Алгебра Темперли–Либа
4. Идемпотент Джонса–Венцля
   - Идемпотент Джонса–Венцля
   - Идемпотенты как сумма танглов
5. Основная конструкция
6. Инварианты зацеплений в 3-многообразиях
7. Виртуальные 3-многобразия и их инварианты
8. Упражнения

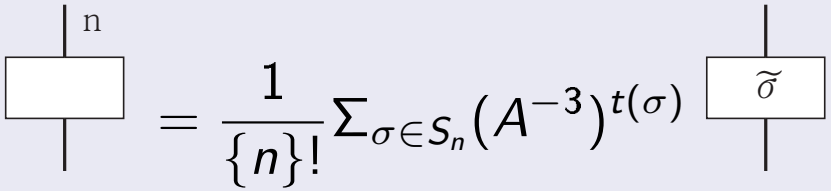
Заметим, что любой n-тангл с помощью соотношения скобки



можно представить как элемент алгебры Темперли–Либа.

Определение 4.2

Пусть



$$= \frac{1}{\{n\}!}\Sigma_{\sigma\in S_n}(A^{-3})^{t(\sigma)}$$

где $\{n\}! = \Sigma_{\sigma\in S_n}(A^{-4})^{t(\sigma)} = \Pi_{k=1}^{n}(\frac{1-A^{-4k}}{1-A^{-4}})$. Здесь S_n обозначает симметричную группу из n букв, так что $\sigma \in S_n$ можно рассматривать как перестановку $1, 2, ..., n,$, а $\tilde{\sigma}$ обозначает полученный n-тангл, получаемый из любого минимального представления σ как произведения транспозиций, так что каждая перестановка заменяется косой в виде σ_i (обратите внимание на положительность) для $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Например, перестановка $a = (1, 3, 2)$ соответствует косе $\sigma =$.

Целое число $t(\sigma)$ — это количество транспозиций в минимальном представлении перестановки σ. В приведенном выше примере $t(\sigma) = 2$.

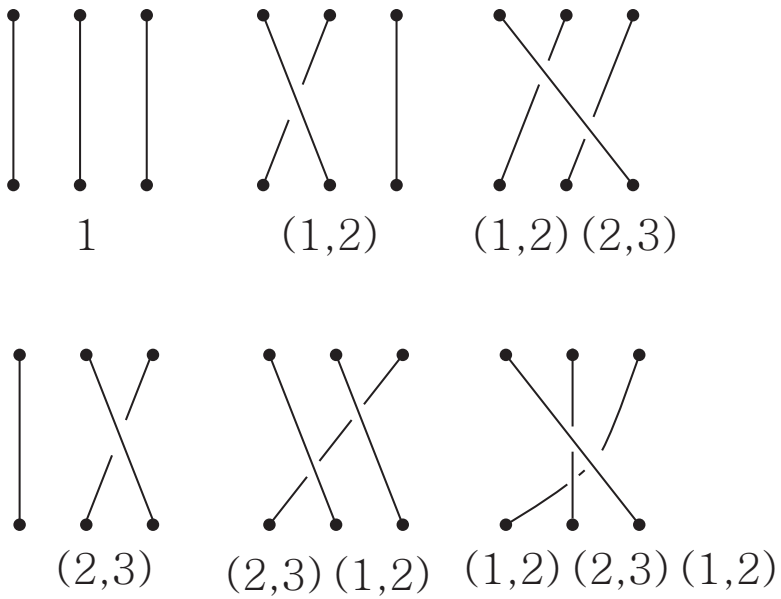
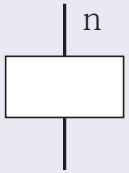


Рис. 12: Коса, соответствующая перестановке $\sigma \in S_3$

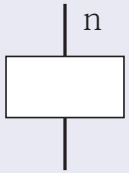
Член $\{n\}!$ — это версия $q-$деформации факториала, где $\sqrt{q} = A$. При $A = 1$ или -1, $\{n\}!$ — обычная функция факториала.

Утверждение 4.3

Если $g_n \in TL_n$ обозначает образ 

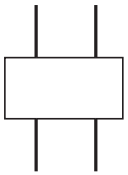
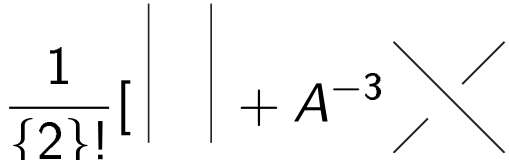
в алгебре Темперли–Либа TL_n, то

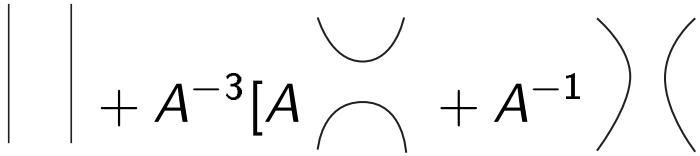
1. $g_n^2 = g_n$
2. $g_n e_i = e_i g_n = 0$ *для* $i = 1, 2, \ldots, n-1$. *Следовательно,*

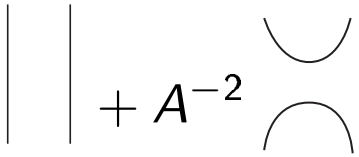
$f_{n-1} =$ 

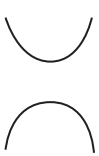
$= g_n.$

Пример

$g_2 =$  $= \frac{1}{\{2\}!}[$  $]$

$= \frac{1}{1+A^{-4}}[$  $]]$

$= \frac{1}{1+A^{-4}}[(1+A^{-4}$  $]]$

$=$  $+ \frac{1}{A^2+A^{-2}}$

$= f_1$ (где $d = -A^2 - A^{-2}$).

Доказательство утверждения 4.3

Из канонической индуктивной конструкции множества кос легко видеть, что $\{\tilde{\sigma}|\sigma \in S_n\}$ для любого $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ можно записать, как непересекающееся объединение множества кос W и множества $W' = \{w\sigma_i|w \in W\}$. (Обратите внимание, что из этого следует, что ни одно представление косы в W не заканчивается на σ_i или σ_i^{-1} из-за минимальности.) В результате имеем

$$\{n\}!g_n = \Sigma_{w \in W}(A^{-3})^{t(w)}w + (A^{-3})^{t(w)+1}w\sigma_i.$$

Поскольку $w\sigma_i e_i = (-A^3)we_i$ в TL_n, то $g_n e_i = 0$ для $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Это завершает доказательство свойства (2).

Доказательство утверждения 4.3

Далее утверждается, что коэффициент 1_n в $\tilde{g}_n = \Sigma_{\sigma \in S_n} \hat{\sigma}$ точно равен $\{n\}!$, так что коэффициент 1_n в g_n равен 1. Чтобы это увидеть, заметьте, что для каждого $\hat{\sigma}_i$ его разложение в TL_n содержит одну копию 1_n . Следовательно, $\hat{\sigma}$ вносит вклад $(A^{-3})^{t(\sigma)}(A^{-1})^{t(\sigma)}$ в коэффициент при 1_n. Множитель $(A^{-1})^{t(\sigma)}$ является произведением меток состояний [1] в разложении скобки, которое приводит к состоянию 1_n. Следовательно, коэффициент 1_n в $\tilde{g}_n$ равен сумме $\Sigma_{\sigma \in S_n}(A^{-3})^{t(\sigma)} = \{n\}!$, как утверждалось. Таким образом, мы знаем, что g_n можно записать в виде $g_n = 1_n + \mathcal{U}$, где $\mathcal{U}$ — это сумма произведений e_i. Следовательно,

$$g_n^2 = g_n(1_n + \mathcal{U}) = g_n + g_n\mathcal{U} = g_n + 0 = g_n,$$

поскольку $g_n e_i = 0$ для $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Таким образом, $g_n^2 = g_n$ и доказательство завершено. □

[1] *Метка состояния* s — это множитель вида A^k, , соответствующий s . Например, для диаграммы с 3 пересечениями, состояние с двумя A-разведениями и одним B-разведением имеет метку $A^2A^{-1} = A$.

Содержание

1. Оснащенные перестройки
2. Движения Кирби
3. Алгебра Темперли–Либа
4. Идемпотент Джонса–Венцля
   - Идемпотент Джонса–Венцля
   - Идемпотенты как сумма танглов
5. Основная конструкция
6. Инварианты зацеплений в 3-многообразиях
7. Виртуальные 3-многобразия и их инварианты
8. Упражнения

Основная конструкция

Теперь мы готовы определить инвариант Виттена–Решетихина–Тураева для трехмерных многообразий.
Сопоставим каждой диаграмме зацепления D с компонентами $K_1, \ldots, K_n$ полилинейное отображение

$$\langle \cdot, \cdots, \cdot \rangle_D : S_1 \times \cdots \times S_n \to S(\mathbb{R}^2),$$

где $S_i \cong S(I \times S^1)$. Чтобы определить это отображение, достаточно определить элементы $\langle \alpha_1^{k_1}, \ldots, \alpha_n^{k_n} \rangle_D \in S(\mathbb{R}^2)$, где α_i — образующая S_i, соответствующая образующей α алгебры $S(I \times S^1)$.
Будем работать с плоскими диаграммами неориентированных зацеплений.
Чтобы получить диаграмму (и, наконец, число), соответствующую элементу $\langle \alpha_1^{k_1}, \ldots, \alpha_n^{k_n} \rangle_D$, рассмотрим ленты B_i, соответствующие K_i, и на каждой ленте B_i, нарисуем k_i копий непересекающихся кривых, параллельно ее границе.

Предположим, что оснащенные диаграммы D и D' эквивалентны с помощью $\Omega_1', \Omega_2, \Omega_3$. Тогда диаграммы $\langle \alpha_1^{k_1}, \ldots, \alpha_n^{k_n} \rangle_D$ и $\langle \alpha_1^{k_1}, \ldots, \alpha_n^{k_n} \rangle_{D'}$ также получаются друг от друга с помощью Ω_1', Ω_2 и Ω_3. Таким образом, образы этих двух диаграмм в $S(\mathbb{R}^2)$ совпадают. Следовательно, **построенное выше полилинейное отображение — инвариант оснащенных зацеплений**.

Замечание 5.1

Заметим, что полилинейное отображение является инвариантом со значениями в $\mathbb{C}$, то есть оно содержит числа, а не многочлены. Построить полиномиальный инвариант 3-многообразий, который бы расширял многочлен Джонса,— большая проблема.

Теперь построим следующий инвариант, используя $\langle \cdot, \ldots, \cdot \rangle$. Но поскольку мы строим инвариант 3-многообразий, нам также следует позаботиться о движениях Кирби.
Чтобы получить инвариантность относительно второго движения Кирби, мы будем использовать элемент

$$\omega = \sum_{0}^{r-2} \Delta_n S_n(\alpha) \in S(I \times S^1),$$

где $r \geq 3$ — целое число.

Теорема 5.2

Предположим, что a_0 таково, что a_0^4 является примитивным корнем из единицы степени r. Предположим, что диаграммы D и D' получены друг из друга вторым движением Кирби. Тогда имеем:

$$\langle \omega, \omega, \ldots, \omega \rangle_D = \langle \omega, \omega, \ldots, \omega \rangle_{D'}.$$

Доказательство теоремы 5.2

Второе движение Кирби можно представить как на рис. 13. Достаточно показать, что две диаграммы в (B) на рис. 13 эквивалентны в $S(\mathbb{R}^2)$. Для этого сначала проверим, как они связаны в $S(I \times S^1)$, а затем с помощью проекции $S(I \times S^1) \to S(\mathbb{R}^2)$ получим равенство.

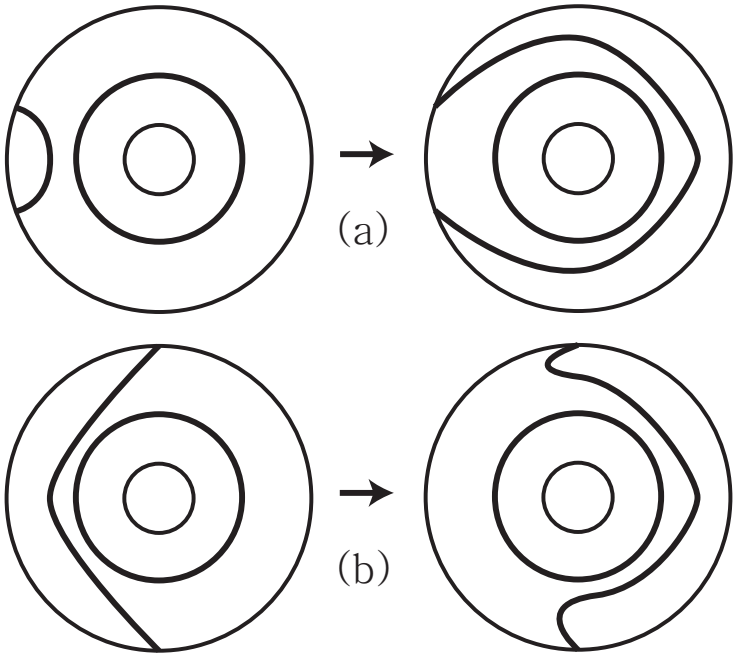


Рис. 13:

Лемма 5.3

Разность двух диаграмм в (B) на рис. 13 есть линейная комбинация диаграмм, каждая из которых содержит $f^{(n-1)}$ в качестве поддиаграммы.

Доказательство. Заметим, что $f^{(n+1)}$ получается рекуррентно как на рис. 14.

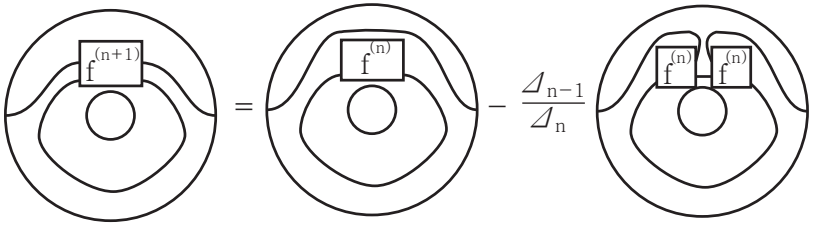


Рис. 14:

Из $f^n f^n = f^n$ получаем равенство на рис. 15.

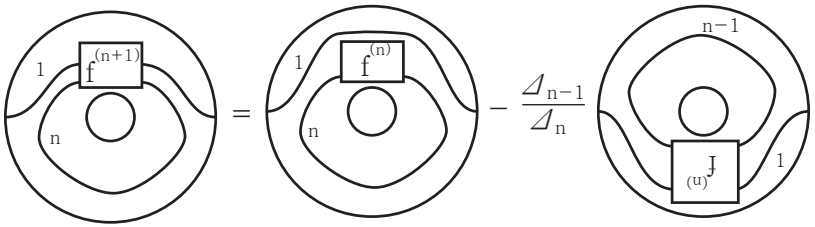


Рис. 15:

Если $\Delta_n \neq 0$, то получаем равенство на рис. 16.

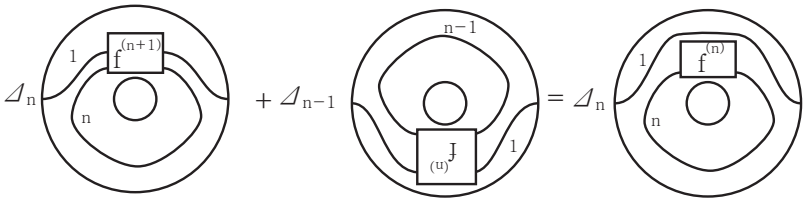


Рис. 16:

Вращая на 180°, получим равенство на рис. 17.

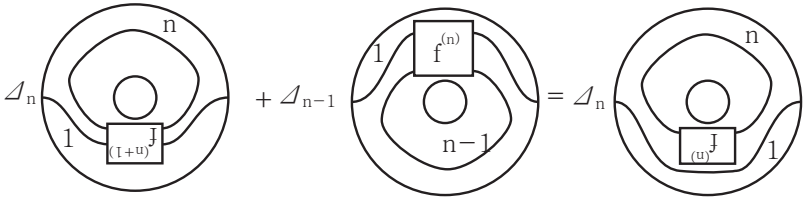


Рис. 17:

Обратите внимание, что сумма правой части равенства на рис. 16 для $n = 1, \ldots, r-2$ является элементом, представленным как (a) на рис. 18.

В частности, w равно сумме элементов в виде (c) на рис. 18.

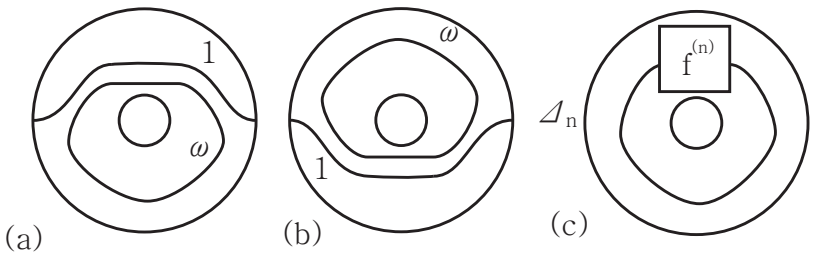


Рис. 18:

Аналогично, сумма правой части равенства на рис. 17 для $n = 1, \ldots, r-2$ равна элементу (b) на рис. 18. Разница в правых частях рисунка. 16 и на рис. 17 совпадает с разницей их левых сторон, и, следовательно, легко видеть, что разница их левых сторон для $n = 1, \ldots, r-2$ представлена элементами на рис. 19.□

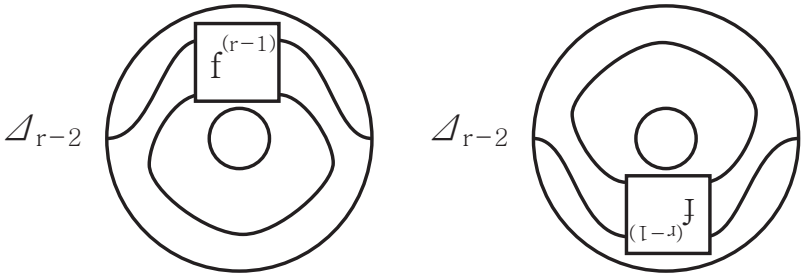


Рис. 19:

Можно показать, что, поскольку $a_0^{4r} = 1$ и a_0^4 является примитивным корнем, мы имеем $\Delta_n \neq 0$ для $n = 1, \ldots, r-2$, но $\Delta_{r-1} = 0$, и все эти слагаемые исчезают. С помощью следующей леммы мы можем завершить доказательство теоремы 5.2.

Лемма 5.4

Предположим, что $\Delta_{r-1} = 0$. Тогда каждый элемент d в $S(\mathbb{R})$, содержащий $f^{(r-1)}$, тривиален.

Доказательство. По Предложению 3.4 $S(\mathbb{R}^2) \cong S(S^2)$. Без потери общности предположим, что две границы цилиндра не пересекаются на всех диаграммах, которыми разделен элемент d. Тогда d представлено в $S(\mathbb{R}^2)$ как замыкание $f^{(r-1)}x$, когда мы заклеиваем две границы диском; здесь x — это некоторый элемент TL_{r-1}, см. рис. 20.

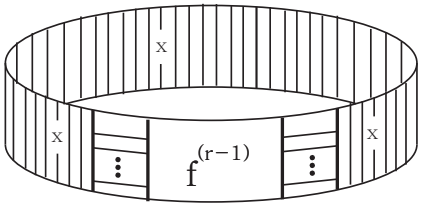


Рис. 20:

Поскольку $x = \lambda 1_{r-1} + x'$, где $x' \in A_{r-1}$, получаем $f^{(r-1)}x = \lambda f^{(r-1)}$. Теперь рассмотрим отображение из S^2 в $S(\mathbb{R}^2)$. В результате получаем, что d является замыканием $\lambda f^{(r-1)}$ при вложении $I \times S^1$ в $\mathbb{R}^2$. Следовательно, $d = \lambda \Delta_{r-1} = 0$. $\square$

Теперь рассмотрим первое движение Кирби. Нам понадобится *матрица коэффициентов зацепления*.
Для любой n-компонентной диаграммы зацепления L можно построить симметричную $(n \times n)$-матрицу коэффициентов зацепления (ранее мы ориентировали все компоненты зацепления). Для диагональных элементов мы берем коэффициент самозацепления (который равен оснащению). Обозначим полученную матрицу через B. Поскольку B симметрична, все собственные значения этой матрицы действительны. Пусть b_+ - число положительных собственных значений B, а b_- - число отрицательных собственные значения B. Для построения инвариантов связей нам понадобится не сама матрица B, а только b_+, b_-.
Легко видеть, что изменение ориентации некоторых компонентов B приводит к преобразованию $B \to B' = X^T BX$ для некоторого ортогонального X, таким образом, это не меняет b_+ и b_-.

Давайте теперь убедимся, что b_+ и b_- инвариантны относительно второго движения Кирби. Для этого достаточно доказать следующую теорему.

Теорема 5.5

При втором движении Кирби матрица B изменяется следующим образом: $B' = X^T BX$, где X - некоторая невырожденная вещественная матрица.

Рассмотрим три стандартные оснащенные диаграммы U_+, U_-, U_0, показанные на рис. 21. Они представляют собой тривиальный узел с оснащением $1, 0$, и -1 соответственно. В случае, когда $\langle\omega\rangle_{U_+}\langle\omega\rangle_{U_-} \neq 0$, для каждой диаграммы D можно рассмотреть следующее комплексное число:

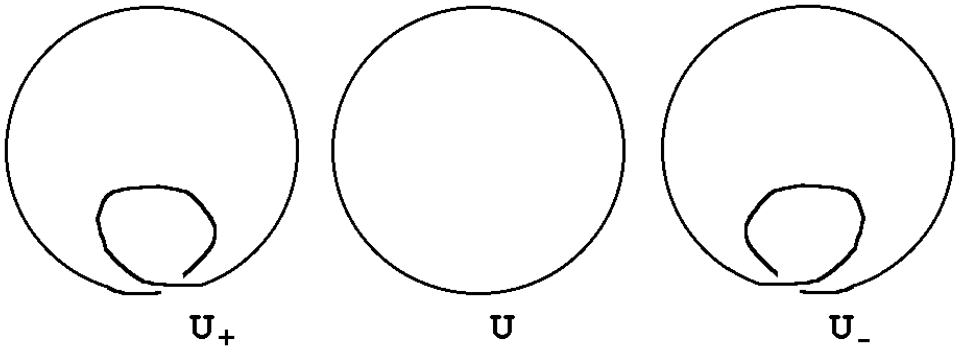


Рис. 21:

$$I(D) = \langle\omega, \ldots, \omega\rangle_D \langle\omega\rangle_{U_+}^{-b_+} \langle\omega\rangle_{U_-}^{-b_-}.$$

Утверждение 5.6

Комплексное число $I(D)$ является топологическим инвариантом 3-многообразия, определяемого D, если $\langle\omega\rangle_{U_+}\langle\omega\rangle_{U_-} \neq 0$.

Для выполнения вышеуказанных условий необходимо установить следующие ограничения на a_0. А именно, условия выполняются, если a_0 является примитивным корнем из единицы степени $4r$ или примитивным корнем из единицы степени $2r$ для нечетного r. В обоих случаях a_0^4 является примитивным корнем из единицы (так что он удовлетворяет условию теоремы 5.2).
Доказательство утверждения 5.6 очень сложное и состоит из множества шагов. Здесь мы собираемся привести только тот шаг, который встречается в этом доказательстве.

Лемма 5.7

Предположим, что a_0 — комплексное число, как указано выше. Тогда мы имеем:

1. *при $1 \leq n \leq r-3$ каждая диаграмма, содержащая D_n (см. рис. 22), равна нулю.;*
2. *для $n = r-2$ в случае, когда a_0 является примитивным корнем степени $4r$, каждая диаграмма, содержащая D_n, также равна нулю, а в другом случае (степень $2r$ для нечетного r) диаграмму D_n можно заменить на $\langle\omega\rangle_U f^{(n)}$.*
   (Здесь под "диаграммами"мы подразумеваем их образы в $S(\mathbb{R}^2)$).

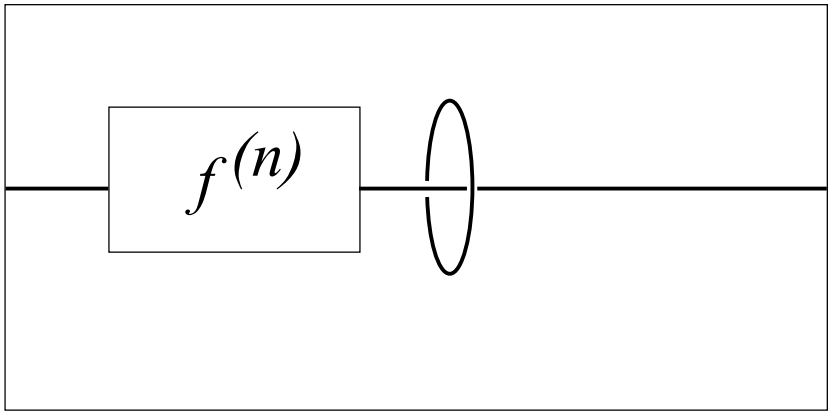


Рис. 22: Диаграмма D_n

Собирая результаты теорем 5.2 и 5.5 и утверждения 5.6, мы получаем основную теорему.

Теорема 5.8

Если $a_0 \in \mathbb{C}$ является либо примитивным корнем из единицы степени $4r$, либо примитивным корнем из единицы степени $2r$ для нечетных r и $r \geq 3$, то

$$W(M^3) = I(D) = \langle \omega, \ldots, \omega \rangle_D \langle \omega \rangle_{U_+}^{-b_+} \langle \omega \rangle_{U_-}^{-b_-}$$

является топологическим инвариантом компактных трехмерных многообразий без края (здесь D — диаграмма оснащенного зацепления, задающая M^3).

Этот инвариант называется *инвариантом Виттена - Решетихина - Тураева для 3-многообразий*.

Пример 5.9

Сфера S^3 *может быть представлена пустой диаграммой; таким образом,* $I(S^3) = 1$.
Многообразие $S^1 \times S^2$, *задается диаграммой* U. *Матрица коэффициентов зацепления для* U *равна* $B = (b_{11})$, *где* $b_{11} = 0$. *Таким образом,* $b_+ = b_- = 0$. *Следовательно,* $I(S^1 \times S^2) = \langle \omega \rangle_U$.

Содержание

1. Оснащенные перестройки
2. Движения Кирби
3. Алгебра Темперли–Либа
4. Идемпотент Джонса–Венцля
   - Идемпотент Джонса–Венцля
   - Идемпотенты как сумма танглов
5. Основная конструкция
6. Инварианты зацеплений в 3-многообразиях
7. Виртуальные 3-многобразия и их инварианты
8. Упражнения

Построение инвариантов трехмерных многообразий, описанное выше, также может быть использовано для более сложных объектов, узлов трехмерных многообразий. Мы определим эти инварианты следующим образом.
Рассмотрим компактное ориентируемое многообразие M^3 без края. Многообразие M^3 можно получить из сферы S^3 перестройкой по оснащенному зацеплению. Это означает, что есть гомеоморфизм

$$f : S^3 \backslash L_M \to M^3 \backslash \tilde{L}_M,$$

где $\tilde{L}_M$ — зацепление в M^3. Не теряя общности, можно предположить, зацепление $\tilde{L}_M$ не пересекается с L (этого можно добиться с помощью небольшого возмущения). Пусть $L_L = f^{-1}(L)$ — прообраз $L \subset M^3$ в сфере S^3. Если L оснащено, то L_L также оснащено. Таким образом, оснащенное зацепление L в M^3 можно задать парой оснащенных зацеплений (L_L, L_M) в сфере S^3; количество компонент в L_L совпадает с количеством компонент в L.

Обсудим следующий вопрос: когда две пары (L_L, L_M) и (L'_L, L'_M) порождают одно оснащенное зацепление L в M^3? Перестройка сферы вдоль оснащенных зацеплений L_M и L'_M должно порождать одно и то же многообразие M^3; таким образом, L'_M можно получить из L_M с помощью движений Кирби и изотопии. Более того, во время изотопии зацепление L_M не должно пересекаться с L_L. Дело в том, что изотопия, которая преобразует L_M в L'_M, индуцирует гомоморфизм

$$f : S^3 \backslash L_M \to M^3 \backslash \tilde{L}_M.$$

Ясно, что в общем случае движение Кирби не затрагивает малой окрестности зацепления L_L. После того, как мы выполнили движения Кирби и изотопии, можно считать, что $L'_M = L_M$. Таким образом, мы можем применять движения Кирби и изотопии к $L_L \cup L_M$, если L_L подвергается только изотопии.

Таким образом, мы должны прояснить связь между L_L и L'_L в случае, когда $L_M = L'_M$. В этом случае, после перестройки S^3 вдоль L_M, мы получим многообразие M^3, где образы зацеплений L_L и L'_L изотопны. Во время этой изотопии изображения L_L и L'_L могут пересекать образ L_M. Таким образом, эта изотопия не сводится к изотопии L_L и L'_L в S^3. Точнее, если в M^3 компонента K_K зацепления K_L пересекается с компонентой K_M зацепления L_M, а затем сфера S^3 подвергается второму движению Кирби: а именно, к ленте K_L добавляется лента, параллельная K_M.

Обратим внимание на следующие два важных обстоятельства:

1. число компонент у L_L и L'_L одинаково;
2. при втором движении Кирби никогда не добавляются ленты, параллельные компонентам L.

Оснащенного зацепление $L_L \cup L_M$ задается оснащенной диаграммы $D_L \cup D_M$. Для L_M рассмотрим матрицу B коэффициентов зацепления. Пусть b_+ и b_- — числа положительных и отрицательных собственных значений этой матрицы; а n — количество компонент в L. Зафиксируем произвольные элементы

$$p_1(\alpha), \ldots, p_n(\alpha) \in S(I \times S^1) \cong \mathbb{C}[\alpha]$$

(здесь мы используем предыдущее обозначение).

Теорема 6.1

Пусть $r \geq 3$ — целое число, a — комплексное число, а a_0 такое, что: либо a_0 — примитивный корень из единицы степени $4r$ или r нечетно, а a_0 является примитивным корнем из единицы степени $2r$. Тогда комплексное число

$$W(M^3, L) = \langle p_1(\alpha), \ldots, p_n(\alpha), \omega, \ldots \omega \rangle_{D_L \sqcup D_M} \langle \omega \rangle_{U_+}^{-b_+} \langle \omega \rangle_{U_-}^{-b_-} \qquad (3)$$

инвариант оснащенного зацепления L в M^3.

Доказательство. Во-первых, обратите внимание, что n — инвариант: это число компонент L. Доказательство инвариантности числа (3) при допустимых преобразованиях зацепления $L_L \cup L_M$ почти такое же, как доказательство для инварианта Виттена. Единственным дополнительным аргументом является следующий. Во время выполнения второго движения Кирби никогда не нужно добавлять ленты, параллельные L_L. Это позволяет нам использовать альтернативную маркировку: $p_1(\alpha), \ldots p_n(\alpha) \in S(I \times S^1)$, а не только ω. $\square$

Замечание 6.2

Формула (3) определяет не единственный инвариант, а бесконечную серию инвариантов со следующими параметрами: $\alpha_0, p_1, p_2, \ldots, p_n$; число α_0 должно удовлетворять приведенным выше условиям.

Содержание

1. Оснащенные перестройки
2. Движения Кирби
3. Алгебра Темперли–Либа
4. Идемпотент Джонса–Венцля
   - Идемпотент Джонса–Венцля
   - Идемпотенты как сумма танглов
5. Основная конструкция
6. Инварианты зацеплений в 3-многообразиях
7. Виртуальные 3-многобразия и их инварианты
8. Упражнения

Л. Кауфман и Х. Дай [3, 5], (см. также диссертацию Дай [2]) обобщили теорию Кирби для случая виртуальных узлов, построили так называемые "виртуальные трехмерные многообразия" и обобщили инварианты, описанные здесь, на виртуальный случай. Другое определение "виртуальных трехмерных многообразий" было дано С.В.Матвеевым ([10]).

Дело в том, что все описанные выше конструкции допускают непосредственное обобщение.

Чтобы определить виртуальное 3-многообразие, нужно рассмотреть диаграммы виртуальных зацеплений (так же, как в классическом случае). После этого между ними допускается эквивалентность, порожденная обобщенными движениями Рейдемейстера (кроме Ω_1) и двумя движениями Кирби.

Что касается первого движеня Кирби, ситуация совершенно ясна: мы просто добавляем окружность с оснащением 1.

Что касается второго перемещения Кирби, единственное, что мы должны сделать точно, - это определить его для компонент, имеющих виртуальное пересечение. Это движение называется *виртуальное движение ручки*; оно показано на рис. 23.

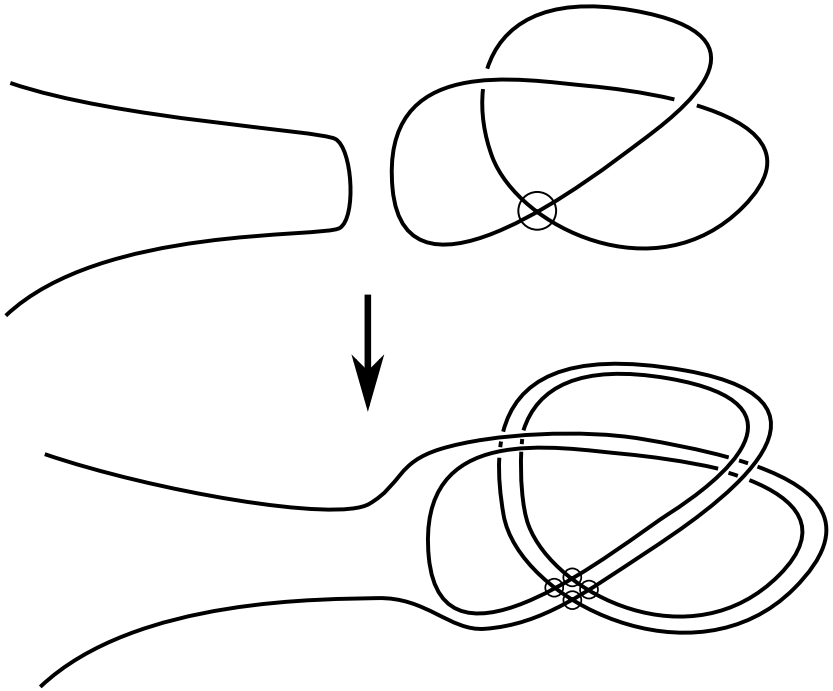


Рис. 23: Виртуальное перемещение ручки

Эти классы эквивалентности порождают *виртуальные трехмерные многообразия*. После такого определения сразу возникает следующий вопрос.

Теперь возникает довольно интересный момент.
Во-первых, гипотеза Пуанкаре, очевидно, не верна в этом смысле. Кроме того, если даны две классические диаграммы K_1 и K_2, представляющие эквивалентные многообразия (в смысле виртуальной теории Кирби); представляют ли они одни и те же классические 3-многообразия в обычном смысле этого слова?
Теперь, что нам нужно сделать, это определить инвариант Виттена–Решетихина–Тураева для виртуальных узлов. На самом деле, у нас уже есть все, что нам нужно для его определения: а именно, мы используем нормализованную скобку Кауфмана и идемпотент Джонса–Венцля, смотрите теорему 5.8. Более подробная информация в оригинальной работе [2].

Содержание

1. Оснащенные перестройки
2. Движения Кирби
3. Алгебра Темперли–Либа
4. Идемпотент Джонса–Венцля
   - Идемпотент Джонса–Венцля
   - Идемпотенты как сумма танглов
5. Основная конструкция
6. Инварианты зацеплений в 3-многообразиях
7. Виртуальные 3-многобразия и их инварианты
8. Упражнения

Упражнения

1. Выразите J_1, J_2 и J_3 как линейные комбинации элементов e_i в TL_n.

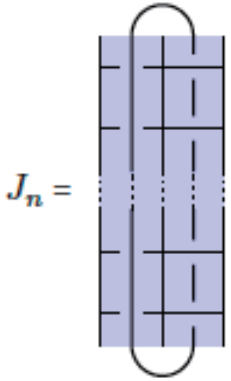


Рис. 24: Рисунок взят из работы [4].

2. Покажите, что $J_n x = x J_n$ для всех $x \in TL_n$.
3. Вычислите идемпотенты Джонса–Венцля $f^{(2)}$ и $f^{(3)}$.

Литература I

- Dehn, M. (1910), Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes, *Mathematische Annalen*, **69**, ss. 137–168.
- Dye, H.A. (2003), Detection and Characterization of Virtual Knot Diagrams, Ph.D. Thesis, University of Illinois at Chicago.
- Dye, H.A. and Kauffman, L.H. (2005), Virtual knot diagrams and the Witten-Reshetikhin-Turaev invariant, *J. Knot Theory Ramifications*, **14**(8), pp. 1045–1075.
- Jim de Groot, *An introduction to the representation theory of Temperley-Lieb algebras,* Bachelorscriptie Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde Universiteit van Amsterdam.
- Kauffman, L.H. (2003), e-mail to the author, May, 2003.
- L.H. Kauffman, S.L. Lins, *Temperley-Lieb Recoupling Theory and Invariants of 3-Manifolds,* PRINCETON UNIVERSITY PRESS, ISBN 0-691-03641-1

Литература II

- R.Kirby, *A calculus for framed links in S^3*, Inventiones mathematicae, volume 45, pages 35 – 56 (1978).
- Lickorish, W. B. R. (1962), A representation of orientable combinatorial 3–manifolds, *Annals of Mathematics*, **76**, pp. 531–540.
- Lickorish, W. B. R. (1993), The skein method for three–manifold invariants,*Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **2**(2), pp. 171–194.
- Matveev, S.V. (2009), Virtual 3-manifolds, *Siberian electronic mathematical reports*, **6**, pp. 518–521.
- Prasolov, V.V. and Sossinsky, A.B. (1997), *Knots, Links, Braids, and 3–Manifolds*, Translation Math. Monographs, (AMS, Providence, R.I.).
- Reshetikhin, N. and Turaev, V. (1990), Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups, *Comm. Math. Phys.*, **127**, pp. 1–26.

Литература III

- Turaev, V.G. and Viro, O.Ya. (1992), State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols, *Topology*, **31**(4), pp. 865–902.
- Witten E. (1989), Quantum field theory and the Jones Polynomial, *Comm. Math. Phys.*, **121** (1989), pp. 351–399.