

Лекция 1: Узлы, движения Рейдемейстера, инвариант раскрасок, индекс зацепления

С. Ким, В.О. Мантуров, И.М. Никонов

14 сентября 2021

Определение 1.1

Узлом называется гладкое вложение окружности S^1 в пространство \mathbb{R}^3 (либо в сферу S^3), а также образ этого вложения.

Определение 1.2

Два узла K_1 и K_2 называются эквивалентными, или изотопными, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм \mathbb{R}^3 (либо S^3) в себя, который переводит K_1 в K_2 .

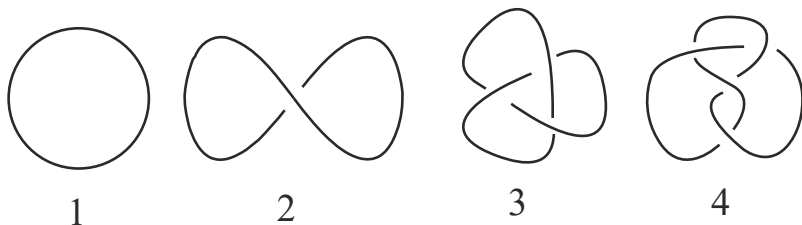


Рис. 1: Примеры узлов

Замечание 1.3

В теории узлов рассматриваются “гладкие” вложения окружностей. Если допустить всего лишь непрерывные вложения окружностей в \mathbb{R}^3 , то можно столкнуться с так называемыми *дикими узлами* вроде того, что изображен ниже.

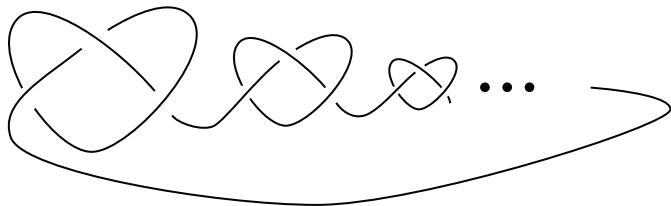


Рис. 2: Дикий узел

Определение 1.4

Зацепление — это упорядоченный набор попарно не пересекающихся узлов $K_1 \sqcup \dots \sqcup K_n$. Иными словами, зацепление представляет собой гладкое вложение набора окружностей $S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1$ в \mathbb{R}^3 . Узлы K_i называются *компонентами* зацепления.

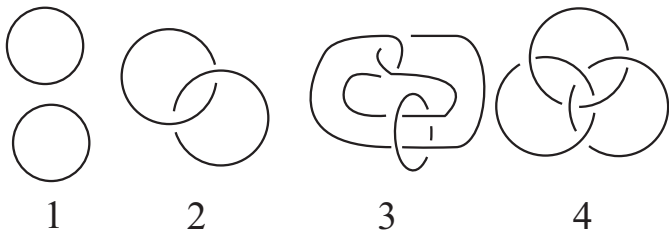


Рис. 3: Примеры зацеплений

Определение 1.5

Два зацепления $L = K_1 \sqcup \dots \sqcup K_m$ и $L' = K'_1 \sqcup \dots \sqcup K'_m$ эквивалентны при выполнении следующих двух условий:

- 1 $m = n$
- 2 существует сохраняющий ориентацию диффеоморфизм \mathbb{R}^3 , который переводит K_i в K'_i для всех $i \in \{1, \dots, n\}$.

Определение 1.6

Для зацепления $L \in \mathbb{R}^3$ рассмотрим проекцию общего положения L на плоскость вдоль некоторого направления v . Образ проекции называется *тенью*. В каждой двойной точке тени можно задать структуру *прохода-перехода*, как показано на рис. 4. Тень с заданными проходами-переходами называется *диаграммой зацепления*.

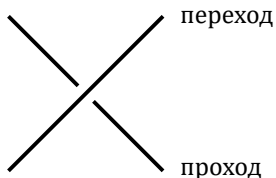


Рис. 4: Перекресток диаграммы

Теорема 1.7

Две диаграммы D_1 и D_2 гладких зацеплений соответствуют эквивалентным зацеплениям тогда и только тогда, когда диаграмму D_1 можно преобразовать в D_2 с помощью конечной последовательности плоских изотопий и трех движений Рейдемейстера $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, см. рис. 5.

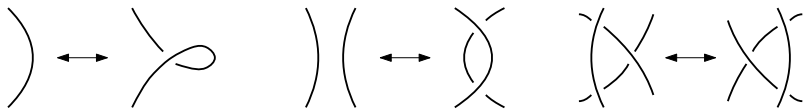


Рис. 5: Движения Рейдемейстера $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$

Ориентированные зацепления

Определение 1.8

Ориентированный узел (или зацепление) — это гладкое вложение ориентированной окружности (или набора ориентированных окружностей) в \mathbb{R}^3 . Неформально говоря, на каждой компоненте ориентированного зацепления задано направление обхода.

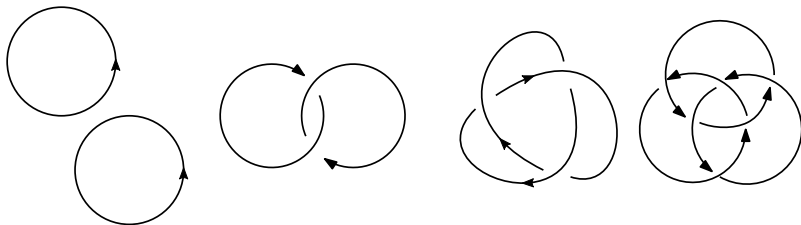


Рис. 6: Ориентированные зацепления

Теорема 1.9

Две ориентированные диаграммы D_1 и D_2 гладких зацеплений соответствуют эквивалентным зацеплениям тогда и только тогда, когда диаграмму D_1 можно преобразовать в D_2 с помощью конечной последовательности плоских изотопий и трех ориентированных движений Рейдемейстера $\Omega_1, \Omega_2, \Omega'_2, \Omega_3$, см. рис. 7.

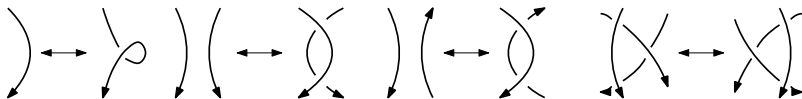


Рис. 7: Ориентированные движения Рейдемейстера $\Omega_1, \Omega_2, \Omega'_2, \Omega_3$

Обращение ориентации

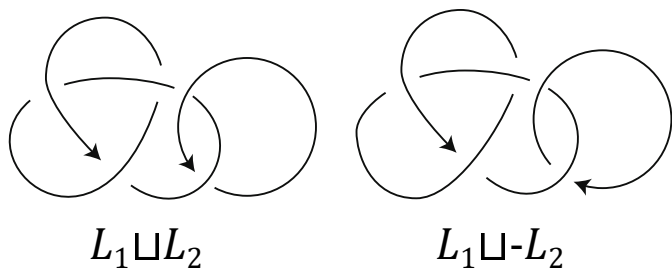
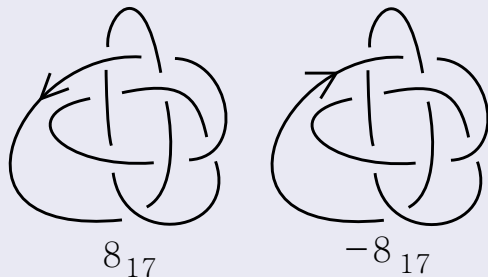


Рис. 8: Обращение ориентации

Определение 1.10

Ориентированный узел K называется *обратимым*, если он эквивалентен узлу $-K$; в противном случае узел K *необратимый*.

Пример 1.11

Рис. 9: Необратимый узел 8_{17}

Многие инварианты узлов не в состоянии отличить узел K от его обращения $-K$. Существование (бесконечного числа) необратимых узлов было доказано Х.Ф. Троттером с использованием “pretzel knots” и “группы узла”.

Определение 1.12

Пусть $L = L_1 \sqcup \dots \sqcup L_n$ — диаграмма ориентированного зацепления с n компонентами.

Каждому перекрестку диаграммы сопоставим знак $+1$ или -1 в соответствии с рис. 10.

Обозначим так определенный знак перекрестка c как $\text{sign}(c)$.

Для компонент L_i и $L_j, i \neq j$, коэффициент зацепления $lk(L_i, L_j)$ между ними есть сумма знаков $lk(L_i, L_j) = \frac{1}{2} \sum_{c \in L_i \cap L_j} \text{sign}(c)$.

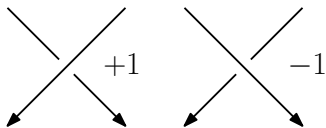


Рис. 10: Положительный и отрицательный перекрестки

Пример 1.13

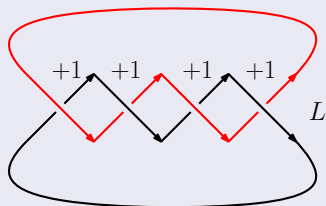


Рис. 11: $lk(L_1, L_2) = \frac{1}{2} \sum \text{sign}(c) = 2$

Замечание 1.14

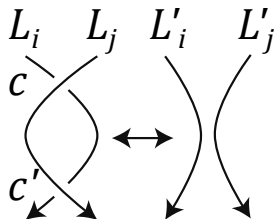
Коэффициент зацепления впервые был определен К.Ф. Гауссом, который дал явную формулу для его вычисления в виде двойного интеграла, *интеграла Гаусса*:

$$\begin{aligned} lk(L_1, L_2) &= \frac{1}{4\pi} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} \frac{r_1 - r_2}{|r_1 - r_2|^3} \cdot (dr_1 \times dr_2) \\ &= \frac{1}{4\pi} \iint_{S^1 \times S^1} \frac{(\dot{\gamma}_1(s), \dot{\gamma}_2(t), \gamma_1(s) - \gamma_2(t))}{|\gamma_1(s) - \gamma_2(t)|^3} ds dt, \end{aligned}$$

где $\gamma_1, \gamma_2 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Впоследствии эта формула была обобщена М.Л. Концевичем в виде так называемого *интеграла Концевича*.

Теорема 1.15

Пусть $L = L_1 \sqcup \dots \sqcup L_n$ — ориентированное зацепление с n компонентами. Для любых $i, j \in \{1, \dots, n\}$ коэффициент зацепления $lk(L_i, L_j)$ инвариантен при движениях Рейдемейстера.



$$lk(L_i, L_j) = lk(L'_i, L'_j) + \text{sign}(c) + \text{sign}(c') = lk(L'_i, L'_j)$$

Рис. 12: $lk(L_1, L_2) = lk(L'_1, L'_2)$ при втором движении Рейдемейстера

Определение 1.16

Пусть D — диаграмма зацепления и $A(D)$ — множество дуг диаграммы. Для простого числа p p -раскраской Фокса (или просто p -раскраской) называется функция $f : A(D) \rightarrow \mathbb{Z}_p$, удовлетворяющая условию рис. 13.

Раскраска вида $f(a) = r$ для всех $a \in A(D)$ и некоторого $r \in \mathbb{Z}_p$ называется *тривиальной*.

Диаграмма D , допускающая нетривиальную p -раскраску называется *p -раскрашиваемой*.

Число p -раскрасок Фокса диаграммы D обозначается как $c_p(D)$.

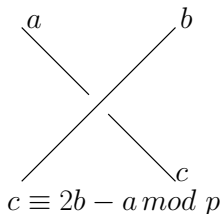
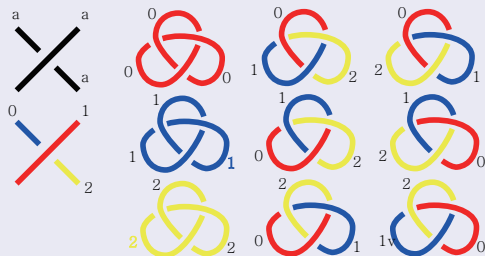


Рис. 13: Условие p -раскраски

Пример 1.17

Рис. 14: Раскраски трилистника элементами \mathbb{Z}_3

Теорема 1.18

Пусть D — диаграмма зацепления. Для любого простого числа p число раскрасок $c_p(D)$ инвариантно при движениях Рейдемейстера.

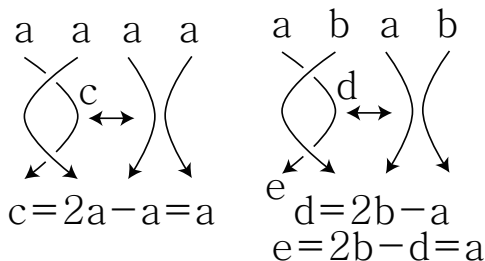


Рис. 15: $c_p(D)$ инвариантно при втором движении Рейдемейстера

Отступление 1

Замечание 1.19

Можно рассмотреть узлы \mathbb{R}^4 , то есть вложения S^1 в \mathbb{R}^4 . Однако известно, что каждый узел в \mathbb{R}^4 изотопен тривиальному узлу \mathbb{R}^4 , то есть краю 2-мерного диска в $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$ (докажите). С другой стороны, двумерные “поверхности” в \mathbb{R}^4 дают нетривиальную теорию *заузленных поверхностей*.

Отступление 2

Замечание 1.20

Зацепление на рис. 16 называется *кольца Борромео*. Это зацепление обладает замечательным свойством: если удалить одну из компонент, получится тривиальное зацепление, однако само зацепление Борромео нетривиально. Зацепления с таким свойством называются *Брунновыми зацеплениями*. Доказательство нетривиальности Брунновых зацеплений в общем случае — дело непростое. Эта задача тесно связана с понятием *гомотопий зацеплений*.

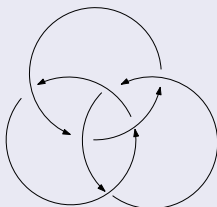
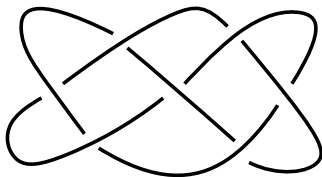


Рис. 16: Кольца Борромео

Упражнения

- 1 Найти пример диаграммы D тривиального узла, к которой нельзя применить уменьшающих движений Рейдемейстера Ω_1 и Ω_2 , а также движения Ω_3 .
- 2 Показать, что узел трилистник (как правый, так и левый) является обратимым узлом.
- 3 Показать, что узел восьмерка изотопен своему зеркальному отражению.
- 4 Показать, что любая диаграмма “узла” с 0, 1 или 2 перекрестками распутывается, то есть является диаграммой тривиального узла.








5. Диаграмма узла называется *нисходящей*, если при движении по ней от некоторой точки каждый перекресток проходится в первый раз по переходу, а во второй раз — по проходу. Показать, что нисходящая диаграмма узла эквивалентна тривиальной диаграмме. Показать, что любую диаграмму узла можно путем замены проходов на переходы в некоторых перекрестках можно превратить в диаграмму тривиального узла.
6. Определим *число заузленности узла* как минимальное число замен перекрестков, превращающих его в тривиальный узел.
- Проверьте, что числа заузленности трилистника и узла восьмерка не превосходят 1.
 - Проверьте, что число заузленности узла 7_4 , изображенного на рис. 17 не превосходит 2. Верно ли, что число заузленности для 7_4 равно 2?



7_4

- 7 Проверьте инвариантность коэффициента зацепления $lk(L_i, L_j)$ при третьем движении Рейдемейстера.
- 8 Пусть $L = L_1 \sqcup L_2$ — ориентированное зацепление. Покажите, что $lk(L_1, L_2) = lk(L_2, L_1)$.
- 9 Пусть $L = L_1 \sqcup L_2$ — ориентированное зацепление. Покажите, что $-lk(L_1, L_2) = lk(-L_1, L_2)$.
- 10 Вычислите коэффициенты зацепления для компонент
 - зацепления Хопфа
 - колец Борromeо (для любых двух)
 - зацепления Уайтхеда
- 11 Вычислите число 3-раскрасок для:
 - правого и левого трилистников
 - узла восьмерка
 - колец Борromeо

- 12 Покажите, что число p -раскрасок зацепления равно p^n для некоторого $n \in \mathbb{N}$. (Указание: воспользуйтесь линейной алгеброй.)
- 13 Докажите, что число заузленности больше или равно $\log_3(c_3(K)) - 1$.
- 14 (Проблема)
 - Оценить число движений Рейдемейстера, необходимое для перехода между эквивалентными диаграммами с n и m перекрестками.
 - Оценить число перекрестков в промежуточной диаграмме при переходе от диаграммы с n перекрестками к эквивалентной диаграмме с m перекрестками.

-  C.F. Gauss, Integral formula for linking number, in *Zur mathematischen theorie der electrodynamische wirkungen*, Collected Works, Vol 5, Koniglichen Gesellschaft des Wissenschaften, Gottingen, 2nd edition, page 605.
-  M. Kontsevich, Vassiliev's knot invariants, *Adv. in Soviet Math.* **16**:2 (1993), pp. 137–150.
-  Мантуров В. О. Теория узлов, Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005 г.
-  V. O. Manturov *Knot theory: Second edition* CRC press 560 April 4, 2018 (на английском)
-  K. Murasugi, *Knot Theory and Its Applications*, Springer.
-  K. Reidemeister, *Knotentheorie*, Berlin: Springer, 1932, *перев. на англ: Knot Theory*, New York: Chelsea Publ. & Co.
-  H.F. Trotter, “Non-invertible knots exist”, *Topology*, 2: 275–280.