

Трехмерные многообразия и исчисление Кирби

Содержание

- 1 Разбиение Хегора
- 2 Оснащенные перестройки
- 3 Движения Кирби

Триангуляция многообразий

Утверждение 1.1 ([6])

Любое 3-многообразие допускает триангуляцию. Более того, каждое 3-многообразие имеет гладкую структуру.

В частности, существование гладкой структуры эквивалентно существованию триангуляции.

Вопрос Каждое ли гладкое многообразие можно триангулировать?

Ответ Да. (идея: функция Морса порождает разбиение на ручки, которые затем можно триангулировать.)

В размерности 4 существование гладкой структуры также эквивалентно существованию триангуляции.

Для многомерных многообразий существуют триангуляции, которым не соответствуют гладкие структуры (инвариант Кирби-Зибенмана).

Пусть 3-многообразие M^3 . Построим два тела с ручками M_1 и M_2 из частей тетраэдров построенной триангуляции, так что $M^3 = M_1 \cup M_2$. Каждый тетраэдр T делится на две части T_1 и T_2 , как показано на рис. 1.

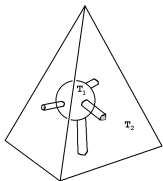


Рис. 1: Разбиение тетраэдра

Теперь построим многообразие M_1 из T_1 , а M_2 — из T_2 . Легко видеть, что M_1 и M_2 — тела с ручками (ориентируемость сразу следует из ориентируемости M). Количество ручек в M_1 и M_2 совпадает, поскольку они имеют общую границу.

Разбиение Хегора

Определение 1.2

Разбиением Хегора ориентированного замкнутого многообразия M^3 называется представление M^3 как объединения двух тел с ручками.

Теорема 1.3

Каждое ориентированное 3-многообразие M без края допускает разбиение Хегора.

Существуют различные способы склеивания двух тел с ручками. Каждый способ характеризуется системой меридианов — стягиваемых кривых в теле с ручками.

Диаграмма Хегора

Итак, чтобы построить 3-многообразие, можно взять два тела с ручками M_1 и M_2 с одинаковым числом ручек g и абстрактную поверхность N , гомеоморфную ∂M_1 (а значит, ∂M_2).

Затем фиксируем две системы меридианов u_1, \dots, u_g для M_1 и v_1, \dots, v_g для M_2 , а также согласованные отображения $f_1: \partial M_1 \rightarrow N$ и $f_2: \partial M_2 \rightarrow N$, соответственно.

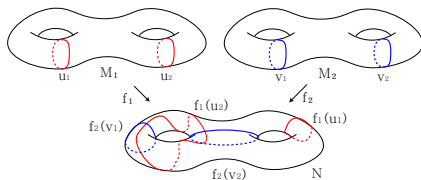


Рис. 2: Диаграмма Хегора

Диаграмма Хегора

Определение 1.4

Система кривых $\{f_1(u_i)\}$ и $\{f_2(v_i)\}$ называется *диаграммой Хегора* данного разбиения Хегора.

Каждому разбиению Хегора 3-многообразия можно сопоставить диаграмму Хегора.

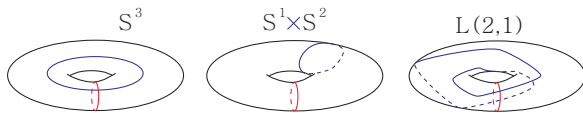


Рис. 3: 3-многообразия и диаграмма Хегора

Пример: S^3

Как изображено на рис. 4, $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} = M_1 \cup M_2$, где M_1 и M_2 — полнотория, такие что $\partial M_1 = \partial M_2 = N$. Меридиан в ∂M_1 (синяя кривая на рис. 4) переходит в меридиан N , а меридиан ∂M_2 (синяя кривая на рис. 4) переходит в параллель N . В итоге получаем диаграмму Хегора на рис. 4.

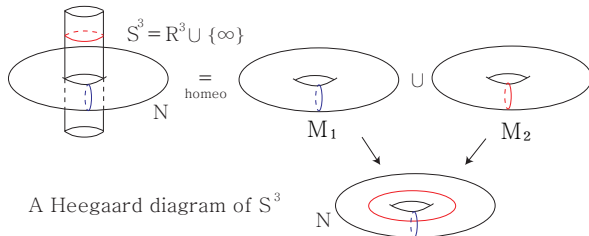


Рис. 4: $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} = M_1 \cup M_2$

Пример: $S^2 \times S^1$

Для $S^2 \times S^1$, так как $S^2 = D_1^2 \cup D_2^2$, где D_1^2 и D_2^2 — диски, то $S^2 \times S^1 = D_1^2 \times S^1 \cup D_2^2 \times S^1$. Пусть $M_1 = D_1^2 \times S^1$ и $M_2 = D_2^2 \times S^1$, где $\partial M_1 = \partial M_2 = S^1 \times S^1 = N$. Рассмотрим кривые $m_i = \partial D_i^2 \times \{*\}$ как меридианы ∂M_1 и ∂M_2 .

Меридианы m_1 и m_2 отображаются в две копии меридиана N , и мы получаем диаграмму Хегора на рис. 5.

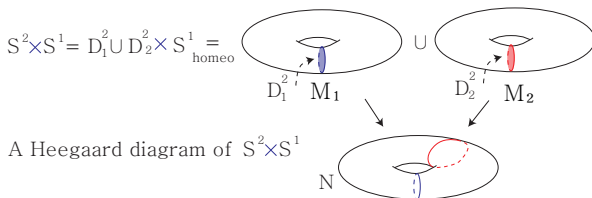


Рис. 5: Многообразию $S^2 \times S^1$ и его диаграмма Хегора

Пример: линзовые пространства $L(p, q)$ I

Линзовые пространства $L(p; q)$ — это фактор сферы S^3 под действием группы \mathbb{Z}/p . Точнее, пусть p и q — взаимно простые числа, а S^3 — единичная сфера в \mathbb{C}^2 . Действие \mathbb{Z}/p на S^3 , порожденное гомеоморфизмом

$$\phi_{p,q} : (z_1, z_2) \mapsto (e^{2\pi i/p} \cdot z_1, e^{2\pi i q/p} \cdot z_2)$$

является свободным. Соответствующее фактор-пространство называется *линзовым пространством* $L(p; q)$.

Полагая $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$, рассмотрим тор

$$N = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} z_1, \frac{1}{\sqrt{2}} z_2 \right) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 = |z_2|^2 = 1 \right\} \cong T^2$$

в S^3 . Тогда $S^3 \setminus N = X_1 \sqcup X_2$, где $\partial X_1 = \partial X_2 = N$. Значит S^3 разбивается на $M_1 = cl(X_1)$ и $M_2 = cl(X_2)$.

Пример: линзовые пространства $L(p, q)$

Рассмотрим линзовое пространство $L(p, q) = S^3 / \sim$. Тогда $L(p, q) = M'_1 \sqcup M'_2$, где M'_1 и M'_2 — образы M_1 и M_2 при проекции $S^3 \rightarrow L(p, q)$, более того, $\partial M'_1 = \partial M'_2 = N'$ — тор. Можно считать, что меридиан m_2 в $\partial M'_2$ соответствует меридиану в N . Тогда меридиан m_1 в $\partial M'_1$ соответствует простой замкнутой кривой на торе N , которая идет p раз вдоль параллели N и q вдоль меридиана N . Так мы получим диаграмму Хегора. Например, пространству $L(2, 1)$ соответствует диаграмма Хегора на рис. 6.

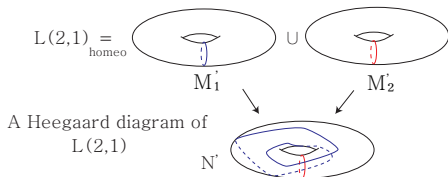


Рис. 6: $L(2, 1)$ и его диаграмма Хегора

Диаграмма Хегора

При восстановлении многообразия с помощью диаграммы Хегора мы сталкиваемся с некоторой неопределенностью: образы меридианов не полностью определяют отображение склеивания.

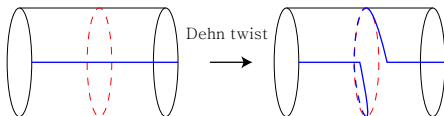


Рис. 7: Скручивание Дена

Однако, имеет место следующая теорема.

Теорема 1.5

Если многообразия M и M' имеют одинаковые диаграммы Хегора, то они гомеоморфны.

Диаграмма Хегора

Доказательство теоремы 1.5 Пусть M разбивается на M_1 и M_2 , а M' — на M'_1 и $M'_2 = M_2$.

Пусть $f_i : \partial M_i \rightarrow N, i = 1, 2$, — склеивающие гомеоморфизмы для M ; гомеоморфизмы для M' обозначим как $f'_i, i = 1, 2$.

Так как диаграммы Хегора у M и M' совпадают, образы меридианов $f_1(u_i)$ и $f'_1(u'_i)$ совпадают для всех $i = 1, \dots, g$. Покажем, что тождественный гомеоморфизм $h_2 : M_2 \rightarrow M'_2$ продолжается до гомеоморфизма $h : M \rightarrow M'$. Гомеоморфизм $(f'_1)^{-1} \circ f_1 : \partial M_1 \rightarrow \partial M'_1$ переводит меридианы M_1 в соответствующие меридианы M'_1 , см. рис. 8.

Диаграмма Хегора

Поскольку каждый гомеоморфизм одной окружности в другую может быть продолжен до гомеоморфизма дисков (по радиусам), то гомеоморфизм меридианов можно продолжить до гомеоморфизма дисков, ограниченных этими меридианами в M_1 и M'_1 . После разрезания M_1 и M'_1 вдоль этих дисков мы получим многообразия D_1 и D'_1 , гомеоморфные 3-шару.

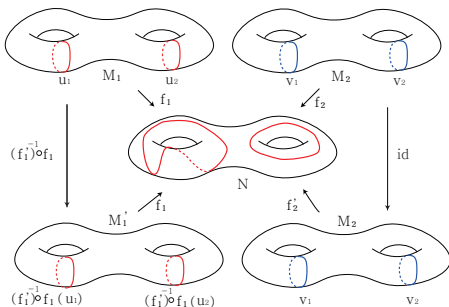


Рис. 8:

Диаграмма Хегора

Поскольку каждый гомеоморфизм между двумя 2-сферами может быть продолжен до гомеоморфизма между ограниченными шарами (вдоль радиусов), то гомеоморфизм между краями шаров D_1 и D'_1 можно распространить на гомеоморфизм между шарами. Таким образом, мы построили гомеоморфизм между M и M' . На этом доказательство теоремы завершено.

Движения на диаграммах Хегора

Теорема 1.6

Любые две диаграммы Хегора 3-многообразия M связаны последовательностью движений, изображенных на рис. 9.

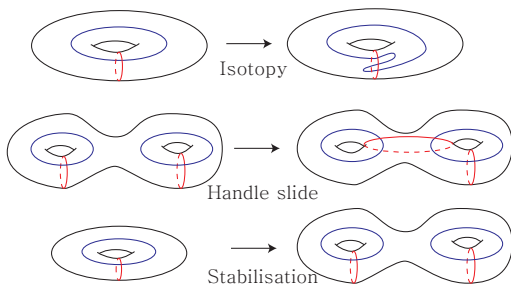


Рис. 9: Движения на диаграммах Хегора

Оснащенные зацепления

Оснащенные перестройки определяются для оснащенных зацеплений в 3-сфере. Фактически, их можно представить как приклеивание ручки в 4-мерному шару, краем которого является наша 3-сфера.

Определение 2.1

Оснащенное зацепление — это зацепление в \mathbb{R}^3 , компонентам которого приписаны целые числа.

Каждое оснащенное зацепление можно представить в виде ленты: для каждой компоненты зацепления рассмотрим ленту в ее окрестности, так что коэффициент зацепления между краями ленты равен метке компоненты, см. рис. 10. Один край ленты должен лежать в торической окрестности второго края и пересекать каждый меридиональный диск последнего только один раз.

Оснащенные зацепления

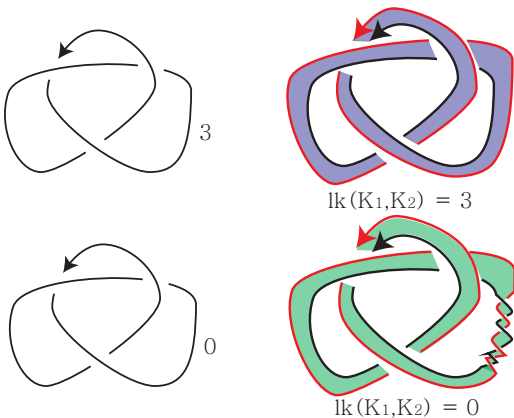


Рис. 10: Оснащенные узлы и соответствующие ленты

Определение 2.2

Два оснащенных зацепления *ИЗОТОПНЫ*, если соответствующие ленты *ИЗОТОПНЫ*.

Оснащенные перестройки

По оснащеному зацеплению L можно построить 3-многообразие следующим образом.

Для каждой компоненты K зацепления L рассмотрим ее оснащение $n(K)$. Теперь мы можем построить ленту: мы берем узел K' , коллинеарный K , таким образом, чтобы коэффициент зацепления между K и K' был равен n . Обратите внимание, что этот выбор однозначно определен (с точностью до изотопии): изменяя ориентации K и K' одновременно, мы не меняем коэффициент зацепления.

Таким образом, мы выбрали кривую для (каждой) компоненты зацепления.

Следующий шаг построения такой. Мы вырезаем все полнотория — трубчатые окрестности компонент, а затем клеиваем новые так, чтобы их меридианы отображались в выбранные кривые, именуемые *параллелями*.

Пример

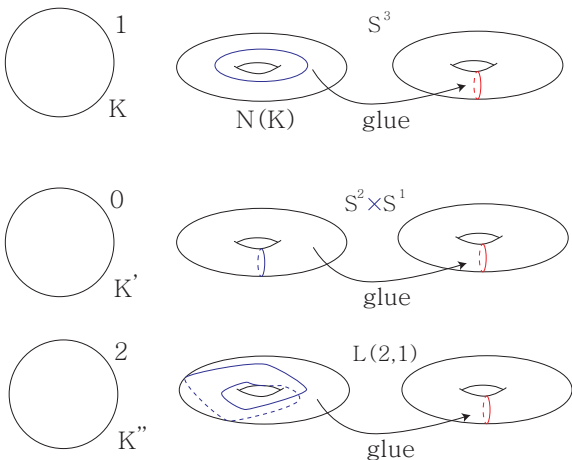


Рис. 11: Оснащенный узел и многообразие, соответствующее перестройке вдоль узла

Основная теорема

Теорема 2.3

Каждое ориентируемое 3-мерное многообразие можно получить из стандартной 3-мерной сферы с помощью оснащенной перестройки.

Фактически, мы можем получить любое ориентированное 3-многообразие из любого другого ориентированного 3-многообразия с помощью так называемой *целочисленной перестройки*.

Идея доказательства заключается в следующем: многообразие можно склеить из двух тел с g ручками по некоторому гомеоморфизму края S_g ; каждый гомеоморфизм S_g можно свести к 'элементарным гомеоморфизмам'; последние могут быть реализованы с помощью торических перестроек, как указано выше.

Теорема Дена–Ликориша

Здесь следует упомянуть важную теорему Дена и Ликориша.

Теорема 2.4 (Ден–Ликориш)

Каждый сохраняющий ориентацию гомеоморфизм поверхности S_g может быть представлен как композиция скручиваний Дена и гомеоморфизмов, изотопных тождественному.

Поскольку каждое скручивание Дена можно интерпретировать как оснащенную перестройку, доказательство завершено.

Замечание 2.5

Первое доказательство Теоремы 2.4 (с некоторыми пробелами) получено Деном в [2]. Первое строгое доказательство найдено Ликоришем [4].

Движения Кирби

Очевидно, что разные зацепления могут кодировать одно и то же 3-многообразие (с точностью до диффеоморфизма). Оказывается, что существуют два движения, которые сохраняют 3-многообразие. Первое движение Кирби — это добавление (удаление) изолированной окружности с оснащением ± 1 , см. рис. 12.

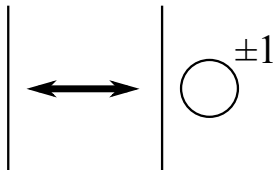


Рис. 12: Первое движение Кирби

Движения Кирби

Второе движение показано на рис. 13. При выполнении этого движения мы протягиваем одну компоненту с оснащением k вдоль другой (при этом оснащение l остается неизменным). Преобразованная компонента будет иметь оснащение $k + l$.

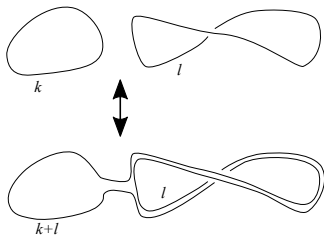


Рис. 13: Второе движение Кирби

Движения Кирби

Замечание 3.1

Обратите внимание, что компоненты могут быть зацеплены либо нет.

Теорема 3.2 (Кирби [3])

Два оснащенных зацепления порождают одно и то же 3-многообразие, если одно из них может быть преобразовано в другое с помощью последовательности движений Кирби и оснащенных изотопий.

Движение Фенна–Рурка

Вместо двух движений Кирби можно использовать одно движение Фенна–Рурка. Движение показано на рис. 14.

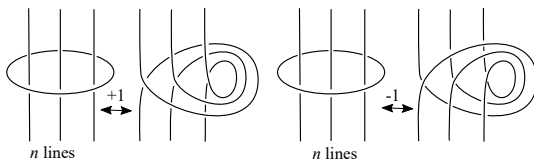


Рис. 14: Движение Фенна–Рурка

Теорема Фенна–Рурка гласит, что два 3-многообразия, заданные плоскими диаграммами оснащенных зацеплений, диффеоморфны тогда и только тогда, когда имеется цепочка движений Фенна–Рурка, преобразующих одну диаграмму в другую.

Движение Фенна–Рурка

Замечание 3.3

Необходимость может быть легко проверена, как в случае с теоремой Кирби.

Достаточность может быть сведена к движениям Кирби. А именно, все движения Кирби могут быть представлены в виде комбинаций движений Фенна–Рурка и наоборот. Доказательство этой эквивалентности можно найти, например, в [5].

Замечание 3.4

Известно, что любое замкнутое ориентированное 3-многообразие является границей некоторого ориентированного 4-многообразия. То есть оснащенные перестройки можно использовать не только для изучения 3-многообразий, но и для изучения 4-многообразий.

Но *различные 4-многообразия могут иметь одну и ту же границу*. Например, если мы возьмем связную сумму с $\mathbb{C}P^2$, край не изменится. Это связное суммирование называется “расширением”; обратная операция называется “уменьшением”. Оно возникает, когда мы применяем первое движение Кирби.

Диаграмма Хегора оснащенного зацепления

Мы можем построить диаграмму Хегора по заданному оснащеному зацеплению $L = K_1 \sqcup \dots \sqcup K_n$ так:

- 1 Пусть $N(L)$ — трубчатая окрестность L и $\tilde{L} = \tilde{K}_1 \sqcup \dots \sqcup \tilde{K}_n$ — параллельная копия L , соответствующая оснащению L , на $N(L)$.
- 2 Для каждого “перекрестка” приклеим цилиндр с меридианом γ .
- 3 Так мы получим тело с ручками S_g с набором кривых $\{\tilde{K}_1, \dots, \tilde{K}_n, \gamma_{i_1}, \dots, \gamma_m\}$. Обозначим диаграмму Хегора $(S_g, \{\tilde{K}_1, \dots, \tilde{K}_n, \gamma_i, \dots, \gamma_m\})$ через H_L .

Теорема 3.5

Пусть L — оснащенное зацепление. Пусть $X_{H_L}^3$ — 3-многообразие, построенное по диаграмме Хегора H_L , а Y_L^3 — 3-многообразие, полученное при оснащенной перестройке вдоль L . Тогда $X_{H_L}^3$ и $Y_{H_L}^3$ гомеоморфны.

Например, см. рис. 15. Более подробно см. [1].

Диаграмма Хегора оснащенного зацепления

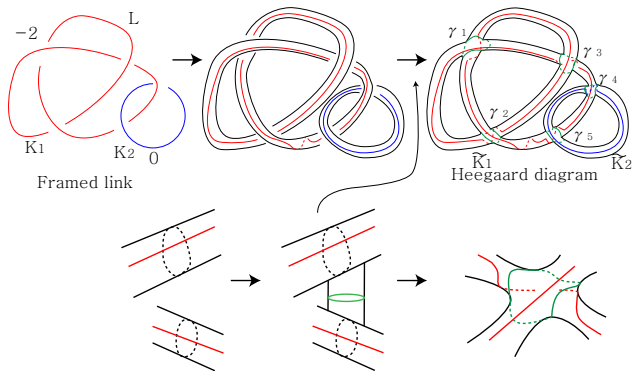


Рис. 15: От оснащенного зацепления к диаграмме Хегора

Упражнения

- 1 Каждое ориентируемое 3-мерное многообразие является границей 4-мерного многообразия, состоящего из одной 0-ручки и нескольких 2-ручек.
- 2 Найти диаграмму Хегора для линзовых пространств $L(3, 2)$ и $L(5, 3)$.
- 3 Найти оснащенные зацепления, которые порождают $L(2, 1)$, $L(3, 2)$ при оснащенной перестройке.
- 4 Постройте разложение Хегора, используя оснащенные зацепления в упражнении 3, и сравните их с разложениями Хегора в упражнении 2. Проверьте теорему 3.5.
- 5 Найти разложение Хегора для $\mathbb{R}P^3$.

Упражнения

- 6 Вычислить фундаментальную группу $L(p, q)$.
- 7 Показать, что зацепление L_2 , изображенное на рис. 16, можно получить из L_1 с помощью движений Кирби.

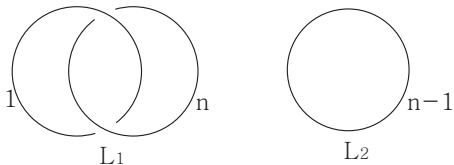








Рис. 16:

Литература I

-  S. Akbulut, *4-manifolds*, Oxford graduate texts in mathematics.
-  Dehn, M. (1910), Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes, *Mathematische Annalen*, **69**, ss. 137–168.
-  R. Kirby, *A calculus for framed links in S^3* , *Inventiones mathematicae*, volume 45, pages 35 – 56 (1978).
-  Lickorish, W. B. R. (1962), A representation of orientable combinatorial 3–manifolds, *Annals of Mathematics*, **76**, pp. 531–540.
-  Lu, N. (1992), A simple proof of the fundamental theorem of Kirby calculus on links, *Transactions of the American Mathematical Society*, **331**, pp. 143–156.
-  Moise, E.E. (1952), Affine structures in 3–manifolds. V. The triangulation theorem and Hauptvermutung, *Annals of Mathematics*, **57**, pp. 547–560.

Литература II



Prasolov, V.V. and Sossinsky, A.B. (1997), *Knots, Links, Braids, and 3-Manifolds*, Translation Math. Monographs, (AMS, Providence, R.I.).