Лекция. Инвариант Расмуссена

Содержание

Содержание

Пусть K - узел в S^3. Существует спектральная последовательность, связанная с K, которая сходится к $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$. Эта спектральная последовательность является относительно сложным объектом, но мы можем извлечь из нее некоторые более простые инварианты K.

Пусть s_{max} и s_{mind} (с $s_{max} \geq s_{min}$) — q-градуировки двух сохранившихся копий $\mathbb{Q}$, которые остаются в члене E_∞ спектральной последовательности. Как и все q-градуировки узла, s_{max} и s_{min} — нечетные числа. Поскольку спектральная последовательность является инвариантом K, s_{max} и s_{min} инварианты.

Предположим, что C — цепной комплекс. *Фильтрация конечной длины* на C — это последовательность подкомплексов

$$0 = C_n \subset C_{n-1} \subset C_{n-2} \subset \cdots \subset C_m = C.$$

С такой фильтрацией мы связываем *градуировку*, определенную следующим образом:

$$x \in C \text{ имеет градуировку } i \Leftrightarrow x \in C_i \text{ но } x \notin C_{i+1}.$$

Отображение между двумя отфильтрованными цепными комплексами $f : C \to C'$ *согласовано с фильтрацей*, если $f(C_i) \subset C'_i$. Скажем, что f — это *фильтрованное отображение степени* k, если $f(C_i) \subset C'_{i+k}$.

Фильтрация $\{C_i\}$ на C задает фильтрацию $\{S_i\}$ на $H_*(C)$ так:

класс $[x] \in H_*(C)$ лежит в S_i, если он имеет представитель в C_i.

Если $f : C \to C'$ является фильтрованным цепным отображением степени k, то легко видеть, что индуцированное отображение $f_* : H_*(C) \to H_*(C')$ также фильтрованное степени k.

Фильтрация конечной длины $\{C_i\}$ на C индуцирует спектральную последовательность, которая сходится к соответствующей градуированной группе индуцированной фильтрацией $\{S_i\}$. Другими словами, группа, которая выживает при классификации i в спектральной последовательности, естественным образом отождествляется с группой S_i/S_{i+1}.

Обозначим через s градуировку на $Kh'(K)$, индуцированную q-градуировкой на $CKh'(K)$. Точнее, для $\alpha \in Kh'(K)$,

$$s(\alpha) = max\{q(v) | [v] = \alpha, v \in CKh'(K)\}. \qquad (1)$$

Тогда приведенное выше неформальное определение эквивалентно

Definition 1.1

Set

$$s_{min}(K) = \min\{s(x) \mid x \in Kh'(K), x \neq 0\}$$
$$s_{max}(K) = \max\{s(x) \mid x \in Kh'(K), x \neq 0\}.$$

Так как гомологии Kh тривиального узла U двумерны и имеют носитель в q-градуировке ± 1, то $s_{max}(U) = 1$, $s_{min}(U) = -1$. Другое доказательство, что s_{max} и s_{min} — инварианты узлов вытекает из следующего утверждения.

Proposition 1.2

Отображения ρ'_{i*} и $(\rho'_{i_*})^{-1}$ согласованы с индуцированной фильтрацией s на Kh'.

Содержание

Наша первая задача в этом разделе — доказать

Proposition 1.3

$$s_{max}(K) = s_{min}(K) + 2$$

что оправдывает

Definition 1.4

$$s(K) = s_{max}(K) - 1 = s_{min}(K) + 1$$

Так как s_{max} и s_{min} нечетны, $s(K)$ всегда четно.

Для доказательства утверждения, нам нужны некоторые предварительные результаты.

Lemma 1.5

Пусть n — число компонент L.

1. *Имеется разложение $Kh'(L) \cong Kh'_o(L) \oplus Kh'_e(L)$, где $Kh'_o(L)$ порождено элементами с q-градуировкой, сравнимой с $2 + n \mod 4$, а $Kh'_e(L)$ порождено элементами с q-градуировкой, сравнимой с $n \mod 4$.*
2. *Если o — ориентация L, то $s_o + s_{\overline{o}}$ лежит в одном из двух слагаемых, а $s_o - s_{\overline{o}}$ содержится в другом слагаемом.*

Доказательство. Следуя Ли [17], запишем

$$m' = m + \Phi_m$$
$$\Delta' = \Delta + \Phi_\Delta$$

где m и Δ сохраняют q-градуировку, а Φ_m и Φ_Δ увеличивают ее на 4. Это доказывает первое утверждение.

Для второго утверждения пусть $\iota : CKh'(L) \to CKh'(L)$ — отображение, которое действует тождественно на CKh'_e и умножением на -1 на CKh'_o. Мы утверждаем, что $\iota(\mathrm{s}_o) = \pm \mathrm{s}_{\overline{o}}$. Чтобы увидеть это, определим новую градуировку на V, в которой X соответствует 0, а 1 — 2. Пусть $i : V \to V$ задается через $i(\mathrm{X}) = \mathrm{X}$, $i(1) = -1$, так что $i(\mathrm{a}) = \mathrm{b}$ и $i(\mathrm{b}) = \mathrm{a}$. Тогда индуцированное отображение $i^{\otimes n} : V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}$ действует тождественно на элементах с новой градуировкой $0 \mod 4$, и как умножение на -1 на элементах с градуировкой $2 \mod 4$. Новая градуировка отличается от q-градуировки на D_o сдвигом, так что

$$\iota(\mathrm{s}_o) = \pm i^{\otimes n}(\mathrm{s}_o) = \pm \mathrm{s}_{\overline{o}}$$

Следовательно, $\mathrm{s}_o + \iota(\mathrm{s}_o) = \mathrm{s}_o \pm \mathrm{s}_{\overline{o}}$ лежит в одном слагаемом, а $\mathrm{s}_o - \iota(\mathrm{s}_o) = \mathrm{s}_o \mp \mathrm{s}_{\overline{o}}$ — в другом. $\square$

Corollary 1.6

$$s(\mathrm{s}_o) = s(\mathrm{s}_{\bar{o}}) = \mathrm{s}_{min}(K)$$

Доказательство. По лемме 1.5, имеется разложение в прямую сумму $Kh'(K) \cong Kh'_o(K) \oplus Kh'_e(K)$, где $Kh'_o(K)$ порождено элементами с q-градуировкой $3 \mod 4$, а $Kh'_e(L)$ порождено элементами с q-градуировкой $1 \mod 4$.
Из леммы 1.5 следует, что $\mathrm{s}_o + \mathrm{s}_{\bar{o}}$ лежит в одном слагаемом, а $\mathrm{s}_o - \mathrm{s}_{\bar{o}}$ — в другом.
Так как ранг $Kh'(K)$ равен 2, $\mathrm{s}_o + \mathrm{s}_{\bar{o}}$ и $\mathrm{s}_o - \mathrm{s}_{\bar{o}}$ являются образующими.
Заметим, что $s(a+b) = min\{s(a), s(b)\}$.
Так как $\mathrm{s}_o = \frac{1}{2}((\mathrm{s}_o + \mathrm{s}_{\bar{o}}) + (\mathrm{s}_o - \mathrm{s}_{\bar{o}}))$,

$$s(\mathrm{s}_o) = min\{s(\mathrm{s}_o + \mathrm{s}_{\bar{o}}), s(\mathrm{s}_o - \mathrm{s}_{\bar{o}})\}.$$

Так как каждый элемент $\alpha \in Kh'(K)$ порождается $\mathrm{s}_o + \mathrm{s}_{\bar{o}}$ и $\mathrm{s}_o - \mathrm{s}_{\bar{o}}$, и $s(a+b) = min\{s(a), s(b)\}$ для $a, b \in Kh'(K)$, то $s(\mathrm{s}_o) \leq s(\alpha)$ для всех $\alpha \in Kh'(K)$. Из предыдущих наблюдений следует, что $s(\mathrm{s}_o) = s_{min}(K)$. □

Corollary 1.7

$s_{max}(K) > s_{min}(K)$.

Доказательство. Поскольку $CKh'(K)$ разлагается как прямая сумма, связанная спектральная последовательность также разлагается. Гомология каждого слагаемого равна $\mathbb{Q}$, поэтому в каждом находится один из выживших членов спектральной последовательности. Два слагаемых имеют разные q-градуировки, поэтому оставшиеся члены также должны иметь разные q-градуировки. $\square$

Lemma 1.8

Для узлов K_1, K_2 имеется короткая точная последовательность

$$0 \to Kh'(K_1 \# K_2) \xrightarrow{p_*} Kh'(K_1) \otimes Kh'(K_2) \xrightarrow{\partial} Kh'(K_1 \# K_2) \to 0$$

Отображения p_* и ∂ фильтрованные степени -1.

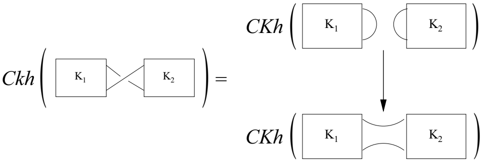
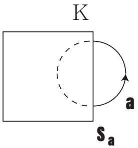


Figure 1: Коротная точная последовательность для $CKh'(K_1 \# K_2)$.

Доказательство (утверждения 1.3.) Рассмотрим точную последовательность предыдущей леммы с $K_1 = K$ и тривиальным $K_2 = U$. Обозначим канонические образующие K через s_a и s_b, согласно их метке рядом с точкой связной суммы, а канонические генераторы U через a и b. То есть, s_a является каноническим генератором K, в котором крайняя правая дуга, где мы делаем связную сумму с U, помечена a, и аналогично задается s_b, см. рис. 2.



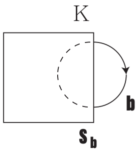


Figure 2: Канонические образующие s_a и s_b для K

Не теряя общности, предположим, что $s(\mathrm{s}_a - \mathrm{s}_b) = \mathrm{s}_{max}(K)$. Из рисунка 3 видно, что $\partial((\mathrm{s}_a - \mathrm{s}_b) \otimes \mathrm{a}) = \mathrm{s}_a$.

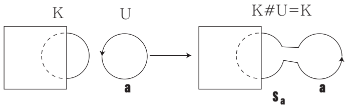


Figure 3: По определению s_a имеем $\partial((\mathrm{s}_a - \mathrm{s}_b) \otimes \mathrm{a}) = \mathrm{s}_a$, где $\partial : Kh'(K_1) \otimes Kh'(K_2) \to Kh'(K_1 \# K_2)$

Так как ∂ фильтрованное отображение степени -1, заключаем, что

$$s((\mathrm{s}_a - \mathrm{s}_b) \otimes \mathrm{a}) \leq s(\mathrm{s}_a) + 1.$$

Из того факта, что

$$\mathrm{s}_{max}(K) - 1 = s(\mathrm{s}_a - \mathrm{s}_b) - 1 \leq s(\mathrm{s}_a - \mathrm{s}_b) + s(\mathrm{a}) \leq s((\mathrm{s}_a - \mathrm{s}_b) \otimes \mathrm{a})$$

получаем

$$\mathrm{s}_{max}(K) - 1 \leq \mathrm{s}_{min}(K) + 1.$$

Поскольку мы уже знаем, что $\mathrm{s}_{max}(K) \neq \mathrm{s}_{min}(K)$, это дает желаемый результат. $\square$

Содержание

Проверим, что s ведет себя хорошо по отношению к зеркальному отображению и связной сумме.

Proposition 1.9

Пусть $\overline{K}$ — зеркальный узел для K. Тогда

$$s_{max}(\overline{K}) = -s_{min}(K)$$
$$s_{min}(\overline{K}) = -s_{max}(K)$$
$$s(\overline{K}) = -s(K)$$

Доказательство. Пусть C — отфильтрованный комплекс с фильтрацией $C = C_0 \supset C_1 \supset \ldots \supset C_n = \{0\}$. Тогда на двойственном комплексе C^* есть фильтрация $\{0\} = C_0^* \subset C^*_{-1} \subset \ldots \subset C^*_{-n} = C^*$, где $C^*_{-i} = \{x \in C^* \mid \langle x, y\rangle = 0, \forall y \in C_i\}$.

Чтобы доказать это утверждение, заметим, что фильтрованный комплекс $CKh'(\overline{K})$ изоморфен $(CKh'(K))^*$. Действительно, имеется изоморфизм

$$r : (V, m', \Delta') \to (V^*, \Delta'^*, m'^*)$$

который отображает 1 и X в X* и 1*. Тогда, если s является состоянием диаграммы $\overline{K}$, мы определяем $R(\mathrm{s})$ как состояние K, полученное путем применения r ко всем меткам s. Несложно проверить, что отображение $R : CKh'(\overline{K}) \to (Kh'(K))^*$ является желаемым изоморфизмом.
$CKh(\overline{K}) \cong (CKh(K))^*$.

Теперь мы сошлемся на следующий общий результат, доказательство которого оставлено в качестве упражнения:

Lemma 1.10

Если C_1 и C_2 являются двойственными фильтрованными комплексами над полем, тогда связанные с ними спектральные последовательности E_n^1 и E_n^2 являются двойственными в том смысле, что $E_n^1 \cong (E_n^2)^*$.

Таким образом, если две уцелевших образующих в E_∞^1 имеют градуировки s_{min} и s_{max}, уцелевшие образующие в E_∞^2 будут иметь градуировки $-s_{max}$ и $-s_{min}$. $\square$

Proposition 1.11

$$s(K_1\#K_2) = s(K_1) + s(K_2)$$

Доказательство. Воспользуемся короткой точной последовательностью из леммы 1.8. Обозначим канонические образующие K_i через s_a^i и s_b^i, согласно их метке рядом с точкой взятия суммы. Нетрудно заметить, что $Kh'(K_1\#K_2)$ имеет каноническую образующую s_o, которая отображается в $\mathrm{s}_a \otimes \mathrm{s}_b$ под действием p_*. Таким образом,

$$s(\mathrm{s}_o) - 1 \leq s(\mathrm{s}_a^1 \otimes \mathrm{s}_b^2)$$
$$\mathrm{s}_{min}(K_1\#K_2) - 1 \leq \mathrm{s}_{min}(K_1) + \mathrm{s}_{min}(K_2)$$

Применяя тот же аргумент к $\overline{K}_1$ и $\overline{K}_2$, и используя тот факт, что $\mathrm{s}_{min}(K) = -\mathrm{s}_{max}(K)$, мы видим, что

$$\mathrm{s}_{max}(K_1\#K_2) + 1 \geq \mathrm{s}_{max}(K_1) + \mathrm{s}_{max}(K_2)$$
$$\mathrm{s}_{min}(K_1\#K_2) + 3 \geq \mathrm{s}_{min}(K_1) + \mathrm{s}_{min}(K_2) + 4.$$

Таким образом,

$$s_{min}(K_1 \# K_2) = s_{min}(K_1) + s_{min}(K_1) + 1$$
$$s_{max}(K_1 \# K_2) = s_{max}(K_1) + s_{max}(K_1) - 1.$$

Это доказывает утверждение. $\square$

Содержание

Пусть L_0 и L_1 — зацепления в $\mathbb{R}^3$. *Ориентированный кобордизм* от L_0 до L_1 — это гладкая ориентированная компактная поверхность $S \subset \mathbb{R}^3 \times [0,1]$, такая что $S \cap (\mathbb{R}^3 \times \{i\}) = L_i$.
Ниже мы определим и изучим отображение $\phi_S : Kh'(L_0) \to Kh'(L_1)$, индуцированное таким кобордизмом. Наша конструкция следует разделу 6.3 из [10], где Хованов описывает аналогичное отображение для теории гомологий Kh.

Содержание

Мы разложим кобордизм S на последовательность элементарных кобордизмов, каждый из которых представлен одним переходом от одной плоской диаграммы к другой. (подробности см. [?]). Для $i \in [0,1]$ положим

$$L_i = S \cap (\mathbb{R}^3 \times \{i\})$$
$$S_i = S \cap (\mathbb{R}^3 \times [0,i]).$$

После небольшой изотопии S мы можем предположить, что L_i является зацеплением в $\mathbb{R}^3$ для всех значений i, кроме конечного числа. Ориентация на S задает ориентацию на S_i, а значит, на L_i. Обозначим эту ориентацию через o_i. (Обратите внимание, что в соответствии с этим соглашением o_0 является обратной ориентацией, индуцированной на L_0 с помощью S). Смотрите рис. 4.

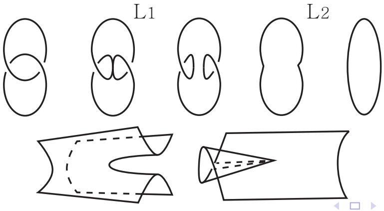


Figure 4: Разложение кобордизма

Далее, мы фиксируем проекцию $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. После небольшой изотопии S мы можем считать, что p определяет регулярную проекцию L_i для всех значений i, кроме конечного числа, и что этот набор специальных значений не пересекается с первым набором, где L не является зацеплением.

Изотопический тип ориентированной плоской диаграммы L_i остается постоянным, за исключением специальных значений, когда L подвергается локальным движениям. Эти движения соответствуют элементарным кобордизмам, которые можно разделить на два типа: движения Рейдемейстера и движения Морса. Примеры кобордизмов для движений Рейдемейстера приведены на рис. **??**.

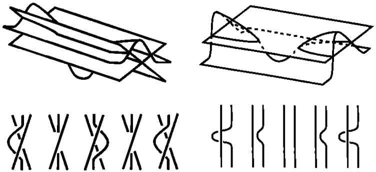


Figure 5: Элементарные движения, отвечающие движениям Рейдемейстера

Элементарные кобордизмы, соответствующие движениям Рейдемейстера, не изменяют топологию поверхности S_i. Движения Морса соответствуют добавлению 0, 1 или 2-ручки к S_i. Они изображены на рисунке 6.

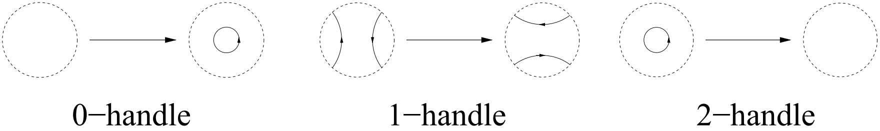


Figure 6: Движения Морса

Содержание

Кобордизму S между L_0 и L_1, сопоставим отображение $\phi_S : Kh'(L_0) \to Kh'(L_1)$, согласованное с фильтрацией на Kh'. Кроме того, мы хотели бы, чтобы это сопоставление было функториальным, в том смысле, что если S является композицией двух кобордизмов S_1 и S_2, то ϕ_S — это композиция ϕ_{S_1} и ϕ_{S_2}.
Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда S — элементарный кобордизм.
Если S — элементарный кобордизм, соответствующий i-му движению Рейдемейстера или его обратному, мы определяем ϕ_S как ρ'_{i*} или обратное к нему. Согласно предложению 1.2, это фильтрованное отображение степени 0.

Если S — элементарный кобордизм, соответствующий движению Морса, определим ϕ_S как отображение, индуцированное $\psi : CKh'(L_0) \to CKh'(L_1)$, где ψ — результат применения TQFT $\mathcal{A}'$ к соответствующему отображению кубов. Другими словами, если движение соответствует добавлению 0-ручки или 2-ручки, мы применяем ι' или ϵ', соответственно, к слагаемому в каждой вершине куба. Если же оно соответствует добавлению 1-ручки, мы применяем либо m', либо Δ', в зависимости от того, приводит ли движение к слиянию или разделению в рассматриваемой вершине. Тогда можно легко доказать следующее утверждение:

Proposition 2.1

ϕ_S — это фильтрованное отображение степени 1 для добавления 0- или

В общем случае, разложим кобордизм S в композицию элементарных кобордизмов: $S = S_1 \cup S_2 \ldots \cup S_k$ и определим индуцированный морфизм $\phi_S : Kh'(L_0) \to Kh'(L_1)$ как композицию $\phi_{S_k} \circ \ldots \circ \phi_{S_1}$, которая является фильтрованным отображением степени $\chi(S)$.

Отображение ϕ_S зависит только от класса изотопии S rel ∂S но

Содержание

Отображения ϕ_S ведут себя хорошо по отношению к каноническим образующим.

Пусть V — градуированное векторное пространство с базисом 1 и X с градуировкой 1 и -1 соответственно. Рассмотрим базис $\{a, b\}$ в V,

$$a = X + 1, b = X - 1.$$

Тогда отображения $m' : V \otimes V \to V$ и $\Delta' : V \to V \otimes V$ примут вид:

$$m'(a \otimes a) = 2a; \quad m'(a \otimes b) = m'(b \otimes a) = 0; \quad m'(b \otimes b) = -2b; \quad (2)$$

$$\Delta'(a) = a \otimes a; \quad \Delta'(b) = b \otimes b. \quad (3)$$

Легко проверить, что отображения $\epsilon : V \to \mathbb{Q}$ и $\iota : \mathbb{Q} \to V$ удовлетворяют тождествам

$$\epsilon'(a) = \epsilon'(b) = 1, \quad \iota(1) = \frac{(a - b)}{2}.$$

Definition 2.2

Кобордизм S из L_0 в L_1 *слабо связен*, если у любой компоненты S есть граничная компонента, являющаяся компонентой L_0.

Я. Расмуссен доказал следующее.

Proposition 2.3 (J.A. Rasmussen)

Пусть S — ориентированный слабосвязанный кобордизм из L_0 в L_1. Тогда $\phi_S([\mathrm{s}_{o_0}])$ является ненулевым кратным $[\mathrm{s}_{o_1}]$.

Доказательство утверждения 2.3

Доказательство утверждения 2.3 Фактически, мы докажем более сильное утверждение. Предположим, что i является регулярным значением для кобордизма S, так что L_i зацепление. Разделим компоненты S_i на два вида: компоненты *первого типа*, пересекающие L_0, и остальные компоненты *второго типа*. Скажем, что ориентация o на S_i является *допустимой*, если она согласуется с ориентацией S на компонентах первого типа. (Здесь и далее мы используем o_I для обозначения как допустимой ориентации на S_i, так и ориентации, которую она индуцирует на L_i).

Claim

$$\phi_{S_i}([\mathfrak{s}_{o_0}]) = \sum_I a_I[\mathfrak{s}_{o_I}]$$

где $\{o_I\}$ пробегает множество допустимых ориентаций на S_i, и каждый коэффициент a_I

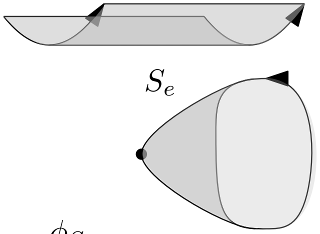
Доказательство утверждения 2.3: продолжение

Заметим, что условие слабой связности подразумевает, что существует только одна допустимая ориентация на S_1, поэтому утверждение 2.3 вытекает из предыдущего.

Достаточно проверить, что если утверждение верно для S_i, то оно справедливо и для $S_{i'}$, где S_i' — композиция S_i с одним элементарным кобордизмом S_e.

движения Рейдемейстера: Если этот кобордизм соответствует движению Рейдемейстера, то это прямое следствие утверждения **??**. Ниже мы проверим, что оно справедливо и для каждого движения Морса.

Добавление 0-ручки: В этом случае $\phi_{S_e}(s_{o_I}) = s_{o_I} \otimes \frac{1}{2}(a - b)$, где второй множитель в тензорном произведении относится к меткам на новой окружности. $S_{i'}$ содержит новую компоненту второго типа — диск, ограниченный новой окружностью, а $s_{o_I} \otimes a$ и $s_{o_I} \otimes b$ являются каноническими образующими для двух возможных ориентаций на $S_{i'}$, которые согласуются с o_I на всех компонентах, кроме новой. Смотрите рис. 7.



$$\mathbf{s}_{o_I} \stackrel{\phi_{S_e}}{\mapsto} \mathbf{s}_{o_I} \otimes \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b})$$

Figure 7: Отображение ϕ_{S_e} при добавлении 0-ручки

Доказательство утверждения 2.3: продолжение

Добавление 1-ручки:: Предположим, что ориентация o_l на самом деле является ориентацией o_i, индуцированной S_i. Тогда две дуги, участвующие в движении, имеют противоположные ориентации, поэтому, согласно лемме **??**, они должны иметь одинаковую метку. Так как

$$m'(\mathrm{a} \otimes \mathrm{a}) = 2\mathrm{a} \qquad \Delta'(\mathrm{a}) = \mathrm{a} \otimes \mathrm{a}$$
$$m'(\mathrm{b} \otimes \mathrm{b}) = -2\mathrm{b} \qquad \Delta'(\mathrm{b}) = \mathrm{b} \otimes \mathrm{b}$$

получаем, что $\phi_{S_e}(\mathrm{s}_{o_i})$ — ненулевое кратное $\mathrm{s}_{o_{i'}}$.
В общем случае ориентация o_l либо совместима с некоторой ориентацией o_e на S_e, либо нет. В первом случае две дуги, участвующие в движении, имеют противоположную ориентацию и одинаковую метку, а $\phi_{S_e}(\mathrm{s}_{o_l})$ является ненулевым кратным $\mathrm{s}_{o_l'}$, где o_l' — ориентация, индуцированная на $L_{i'}$ с помощью o_e. В последнем случае две дуги сонаправлены и имеют разные метки, поэтому $\phi_{S_e}(\mathrm{s}_{o_l}) = 0$.

Доказательство утверждения 2.3: продолжение

Теперь мы рассмотрим, что происходит с компонентами S_i при движении. Если движение разбивает одну компоненту L_i на две $L_{i'}$, то количество и тип компонент S_i остаются постоянными. В этом случае набор допустимых ориентаций на S_i естественным образом отождествляется с набором допустимых ориентаций на $S_{i'}$. Всегда найдется ориентация на S_e, совместимая с o_I, и $\phi_{S_e}(s_{o_I})$ является ненулевым кратным $s_{o_I'}$.

С другой стороны, если движение сливает две компоненты L_i в одну $L_{i'}$, есть несколько возможностей. Если слияние включает только одну компоненту S_i, ситуация аналогична описанной выше: всегда существует ориентация на S_e, совместимая с o_I, и $\phi_{S_e}(s_{o_I})$ является ненулевым кратным $s_{o_I'}$. Тот же аргумент применяется, когда S_e объединяет две компоненты S_i, принадлежащих к первому типу.

Доказательство утверждения 2.3: продолжение

Наконец, предположим, что слияние объединяет две компоненты S_i, одна из которых относится ко второму типу. Тогда набор допустимых ориентаций на $S_{i'}$ только вдвое меньше набора допустимых ориентаций на S_i. Если o_I расширяется до допустимой ориентации o_I' на $S_{i'}$, то $\phi_{S_e}(\mathfrak{s}_{o_I}) = \mathfrak{s}_{o_I'}$, иначе $\phi_{S_e}(\mathfrak{s}_{o_I}) = 0$.

Добавление 2-ручки: В этом случае допустимая ориентация o_I на S_i продолжается до единственной допустимой ориентации o_I' на $S_{i'}$. Поскольку $\epsilon'(a) = \epsilon'(b) = 1$, $\phi_{S_e}(\mathfrak{s}_{o_I}) = \mathfrak{s}_{o_I'}$. Чтобы доказать это утверждение, достаточно показать, что две допустимые ориентации на S_i' не могут индуцировать одинаковую ориентацию на $L_{i'}$. Но если бы это было так, S_i имела бы замкнутую компоненту, что противоречит слабой связанности S. $\square$

Из предложения 2.3 мы получаем следующий важный результат.

Corollary 2.4

Если S является связным кобордизмом между узлами K_0 и K_1, то ϕ_S является изоморфизмом.

Доказательство Зафиксируем ориентацию o на S. Тогда $\{s_{o_0}, s_{\bar{o}_0}\}$ — базис $Kh'(K_1)$. Его образ под действием ϕ_S $\{k_1 s_{o_1}, k_2 s_{\bar{o}_1}\}$, $(k_1, k_2 \neq 0)$, — базис $Kh'(K_2)$. $\square$

Содержание

Теперь мы можем доказать следующую теорему.

Theorem 2.5 ([22])

$|s(K)| \leq 2g_*(K)$.

Доказательство (теоремы 2.5.) Пусть $K \subset S^3$ ограничивает ориентированную поверхность рода g в B^4. Тогда существует ориентируемый связный кобордизм эйлеровой характеристики $-2g$ между K и тривиальным узлом U в $\mathbb{R}^3 \times [0,1]$. Пусть $x \in Kh'(K) - \{0\}$ — класс, для которого $s(x)$ максимален. Тогда $\phi_S(x)$ — ненулевой элемент $Kh'(U)$. Далее ϕ_S — фильтрованное отображение степени $-2g$, так что

$$s(\phi_S(x)) \geq s(x) - 2g. \tag{4}$$

С другой стороны, $s_{max}(U) = 1$, так что

$$s(\phi_S(x)) \leq 1.$$

Следовательно, $s(x) \leq 2g + 1$, значит, $s_{max}(K) \leq 2g + 1$ и $s(K) \leq 2g$. Чтобы показать, что $s(K) \geq -2g$, применим тот же аргумент к $\overline{K}$ (ограничивающему поверхность $\overline{S}$ рода g) и воспользуемся равенством $s(\overline{K}) = -s(K)$.□

Remark 2.6

Из уравнения 42 в доказательстве теоремы 2.5 можно заметить, что степень изоморфизма $\phi_S(x)$ фильтрованных комплексов очень высока и требуется много ручек.

Theorem 2.7

Отображение s индуцирует гомоморфизм из $Conc(S^3)$ в $\mathbb{Z}$, где $Conc(S^3)$ обозначает группу конкордантности узлов в S^3.

Доказательство(теоремы 2.7.) Если K_1 и K_2 конкордантны, то $K_1 \# \overline{K_2}$ срезан, значит,

$$0 = s(K_1 \# \overline{K_2}) = s(K_1) - s(K_2).$$

Таким образом, s задает корректное отображение из $\mathrm{Conc}(S^3)$ в $\mathbb{Z}$. То, что это отображение является гомоморфизмом, непосредственно вытекает из предложений 1.9 и 1.11. □

В [18] Ливингстон показывает, что скейн-неравенство в следующей лемме справедливо для любого инварианта узла, удовлетворяющего свойствам теорем 2.5 и 2.7.

Corollary 2.8

Предположим, что K_+ и K_- являются узлами, которые отличаются одним изменением перекрестка — от положительного перекрестка в K_+ до отрицательного в K_-. Тогда

$$s(K_-) \leq s(K_+) \leq s(K_-) + 1$$

Remark 2.9

По теореме 2.5 инвариант Расмуссена дает нижнюю границу для срезанного рода, в частности, если $s(K) \neq 0$, то K не является срезанным. Но, если $s(K) = 0$, то мы не можем определить, является ли K срезанным узлом.
В частности, специалисты по теории узлов долгое время не могли определить срезанность узла Конвея, изображенного на рис. **??**.
Недавно, в 2018 году, Лиза Пиччирилло показала, что это не узел Конвея не срезанный.

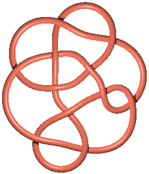


Figure 8: Узел Конвея

Содержание

Если узел K положителен, то $s(K)$ можно вычислить непосредственно по определению. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим каноническую образующую s_o для положительной диаграммы K. Каждый перекресток в K положительный, значит, его ориентированное разведение есть 0-разведение. Таким образом, состояние s_o имеет гомологическую градуировку 0, а в $CKh'(K)$ нет элементов с градуировкой -1. Следовательно, s_o совпадает со своим классом гомологий, так что

$$s_{min}(K) = s([s_o]) = q(s_o)$$

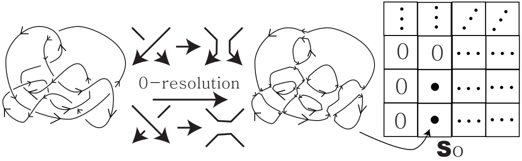


Figure 9: Для положительного узла 0-разведение и ориентированное разведение совпадают.

Чтобы вычислить $q(\mathrm{s}_o)$, мы возвращаемся к базису $\{\mathrm{v}_-, \mathrm{v}_+\}$. В разложении s_o есть единственное состояние с минимальной q-градуировкой, а именно состояние, в котором каждая окружность ориентированного разведения помечена v_-. Если положительная диаграмма K имеет n перекрестков, а ее ориентированное разведение имеет k окружностей, то

$$\begin{aligned} q(\mathrm{s}_o) &= p(\mathrm{s}_o) + \mathrm{gr}(\mathrm{s}_o) + n_+ - n_- \\ &= -k + 0 + n - 0 \end{aligned}$$

so

$$s(K) = -k + n + 1.$$

С другой стороны, алгоритм Зейферта строит поверхность Зейферта S для K с эйлеровой характеристикой $k - n$, так что

$$2g(K) \leq 2g(S) = n - k + 1 = s(K) \leq 2g_*(K)$$

Поскольку $g_*(K) \leq g(K)$, все приведенные выше неравенства должны быть равенствами. На этом доказательство теоремы завершается 3.1.

Theorem 3.1

Если K — положительный узел, то $s(K) = 2g_* = 2g_K$, где $g(K)$ - обычный (зейфертовский) род K.

Содержание

Упражнения

1. Покажите, что соответствующие отображения куба на рис. 10, которые определены для гомологий Ли, коммутируют.

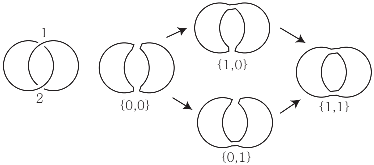


Figure 10: Куб $[0,1]^2$, соответствующий зацеплению Хопфа

2. Пусть L — зацепление Хопфа. Вычислите $Kh'(L)$ и проверьте теорему **??**.

Упражнения

3. Пусть $\mathrm{R} = \mathbb{Z}[h, t]$ и $V = \mathrm{R}[\mathrm{X}]/(\mathrm{X}^2 - h\mathrm{X} - t)$.
Отображение $m : V \otimes V \to V$:

$$\begin{cases} 1 \otimes \mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}, 1 \otimes 1 \mapsto 1, \\ \mathrm{X} \otimes 1 \mapsto \mathrm{X}, \mathrm{X} \otimes \mathrm{X} \mapsto h\mathrm{X} + t. \end{cases} \tag{5}$$

Отображение $\Delta : V \to V \otimes V$

$$\begin{cases} 1 \mapsto 1 \otimes \mathrm{X} + \mathrm{X} \otimes 1 - h1 \otimes 1 \\ \mathrm{X} \mapsto \mathrm{X} \otimes \mathrm{X} + t1 \otimes 1. \end{cases} \tag{6}$$

Определим дифференциал как сумму частных производных, соответствующих ребрам со знаками, расположенными так, как это было сделано для гомологий Хованова и гомологий Ли. Покажите, что бифуркационный куб $\{0, 1\}^n$ коммутирует.

References I

- V. O. Manturov, Knot theory: Second edition CRC press 560 April 4, 2018.
- K. Murasugi, Knot Theory and Its Applications, Springer.
- Carter, J. S. and Saito, M. (1993) Reidemeister moves for surface isotopies and their interpretation as moves to movies, *J. Knot Theory Ramifications*, **2**, pp. 251–284
- D. Bar–Natan's homepage, http://www.ma.huji.ac.il/$\sim$ drorbn
- D. Bar-Natan. The Knot Atlas. www.math.toronto.edu/ drorbn/KAtlas/index.html, 2003.
- Dye, H.A., Kaestner, A. and Kauffman, L.H. (2017), Khovanov homology, Lee homology and a Rasmussen invariant for virtual knots, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **26**(3), 1741001.

References II

- Fedoseev, D.A. and Manturov, V.O. (2016), Parities on 2-knots and 2-links, *J. Knot Theory Ramifications*, **25**(14), 1650079, 24 pp.
- Fedoseev, D.A. and Manturov, V.O. (2017), A sliceness criterion for odd free knots, arXiv:1707.04923.
- Freedman, M. (1982), A surgery sequence in dimension four; the relations with knot concordance, *Invent. Math.*, **68**(2), pp. 195–226.
- Khovanov, M. (1997), A categorification of the Jones polynomial, *Duke Math. J.*, **101**, pp.359–426.
- Khovanov, M. (2002), A functor–valued invariant of tangles, *Algebr. Geom. Topol.*, **2**, pp. 665–741.
- M. Khovanov, Y. Qi, *A Faithful Braid Group Action on the Stable Category of Tricomplexes*, arXiv:1911.02503v2 [math.RT] 30 Mar 2020.
- KnotPlot http://knotplot.com.

References III

- KnotScape http://www.math.utk.edu/ morwen/knotscape.html.
- Kronheimer, P.B. and Mrówka, T.S. (1993), Gauge theory for embedded surfaces. I, *Topology*, **32**, pp. 773–826.
- Lee, E. S. (2002), The support of the Khovanov's invariants for alternating knots, arXiv: math.GT/ 0201105
- Lee, E.S. (2005), An endomorphism of the Khovanov invariant, *Adv. Math.*, **197**(2), pp. 554–586.
- Livingston, C. (2004), Computations of the Ozsváth–Szabó knot concordance invariant, *Geom. Topol.*, **8**, pp. 735–742.
- Manturov V.O. (2012), Parity and cobordisms of free knots, *Sb. Math.*, **203**(1–2), pp. 196–223.
- McCleary, J. (2001), *A User's Guide to Spectral Sequences (2nd ed.)*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **58**, Cambridge University Press.

References IV

- Rasmussen, J. A. (2003), Floer Homology and Knot Complements, PhD thesis, Harvard University, math.GT/0306378.
- Rasmussen J. A. (2010), Khovanov homology and the slice genus, *Invent. Math.*, **182**(2), pp.419–447.
- Shumakovitch, A. (2003), KhoHo pari package, www.geometrie.ch/KhoHo/.
- Shumakovitch, A. (2012), Khovanov homology theories and their applications, in: *Perspectives in Analysis, Geometry, and Topology, Progress in Mathematics*, **296**, pp. 403–430.