

Лекция 2. Гомологии Хованова и гомологии Ли

Содержание

- 1 Введение
- 2 Гомологии Хованова и гомологии Ли
 - Гомологии Ли
 - Вычисление Kh'

Содержание

- 1 Введение
- 2 Гомологии Хованова и гомологии Ли
 - Гомологии Ли
 - Вычисление Kh'

Цель ближайших лекций — обсудить одно из первых ярких приложений гомологий Хованова — инвариант Расмуссена.

Мы будем следовать изложению статьи [22].

Сначала мы определим гомологии Ли, которые имеют тот же вид, что и гомологии Хованова (но с другим дифференциалом), и имеют всего k две нетривиальные образующие в случае узла (и 2^k образующих в случае k -компонентного зацепления). Теория Ли не является биградуированной, она градуирована гомологической градуировкой и имеет фильтрацию по квантовой градуировке.

Далее, гомологии Хованова можно рассматривать как начальный член спектральной последовательности (см. [20]), которая сходится к гомологиям Ли. Факт сходимости устанавливается чисто абстрактно, а фильтрация двух (или 2^k в случае зацепления) выживающих членов составляет суть дела.

Эти фильтрации различаются на 2, и их среднее равно значению *инварианта Расмуссена узла K* , $s(K)$. Вообще, вычисление инварианта Расмуссена — очень сложная задача; однако в некоторых случаях его можно рассчитать вручную.

Одним из наиболее полезных свойств инварианта Расмуссена является его хорошее поведение при кобордизмах. Здесь мы должны сделать отступление о двух категориях срезанности.

Срезанность узла в непрерывной категории

Предположим, что у нас есть узел $K \in S^3$, и мы хотим, чтобы он был границей поверхности $\Sigma \subset B^4 : \partial B^4 = S^3, \partial \Sigma = \Sigma \cap S^3 = K$. Мы хотим работать с четырехмерным родом (родом срезанности) $g_*(K)$ K как с минимальным родом поверхности, затягивающей узел, но здесь нужно сделать оговорку. Во-первых, заметим, что нельзя рассматривать задачу только в непрерывной категории.

Действительно, для каждого узла K мы можем взять конус над ним из центра шара B^3 . Поскольку узел K гомеоморфен окружности, конус над ним $C(K)$ всегда гомеоморфен шару. Таким образом, в непрерывной категории задача срезанности тривиальна.



Рис. 1: Особая точка конуса над узлом

Срезанность в гладкой и кусочно-линейной категории

В дальнейшем под g_* понимается срезанный род в *гладкой* категории .
Основная теорема состоит в следующем.

Теорема 1.1 ([22])

$$|s(K)| \leq 2g_*(K).$$

С другой стороны, имеется красивая теорема Фридмана для локально плоской категории.^{1 2}

Теорема 1.2 ([9])

Если полином Александера узла K тривиален, то узел является срезанным в локально плоской категории.

¹Пусть d -мерное многообразие N вложено в n -мерное многообразие M (где $d < n$). Для $x \in N$ скажем, что N является *локально плоским* в x , если существует окрестность $U \subset M$ точки x , такая что топологическая пара $(U, U \cap N)$ гомеоморфна паре $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$ со стандартным включением \mathbb{R}^d в \mathbb{R}^n . То есть существует гомеоморфизм $U \rightarrow \mathbb{R}^n$, такой что образ $U \cap N$ совпадает с \mathbb{R}^d .

²Есть три определения срезанного рода узлов для разных категорий: непрерывный $g(K)$, гладкий $g_*(K)$, и локально плоский (обозначим его через $g_{PL}(K)$). Для них выполняется следующее неравенство:
 $0 = g(K) \leq g_{PL}(K) \leq g_*(K)$.

Мы не будем доказывать теорему 1.2; упомянем только, что доказательство тесно связано с *хирургией ручек Кэссона*, появившихся в доказательстве М. Фридманом гипотезы Пуанкаре в размерности 4 в непрерывной категории [9]: *а замкнутое односвязное 4-многообразие с тривиальной второй группой гомологий гомеоморфно S^4 .*

Теоремы 1.1 и 1.2 приводят к различным примерам узлов, срезанных в непрерывной, но не в гладкой категории гладких: чтобы найти такие узлы, достаточно уметь вычислять инвариант Расмуссена и полином Александра; обе задачи комбинаторные.

На самом деле Расмуссен доказал в своей статье более сильное утверждение.

Теорема 1.3

Отображение s индуцирует гомоморфизм из $\text{Conc}(S^3)$ в \mathbb{Z} , где $\text{Conc}(S^3)$ обозначает группу конкордантности узлов в S^3 .

Существует класс узлов, для которых $s(K)$ дает точную информацию. Мы говорим, что узел является *положительным*, если он допускает плоскую диаграмму со всеми положительными перекрестками.

Теорема 1.4

Если K — положительный узел, то $s(K) = 2g_* = 2g(K)$, где $g(K)$ — обычный род узла K (род Зейферта).

Содержание

- 1 Введение
- 2 Гомологии Хованова и гомологии Ли
 - Гомологии Ли
 - Вычисление Kh'

Пусть дана диаграмма зацепления L с перекрестками, занумерованными целыми числами от 1 до k ; мы образуем куб возможных разведений L . Как и в лекции о гомологиях Хованова, каждой вершине v куба $[0, 1]^k$ ставится в соответствие плоская диаграмма D_v , полученная в результате разведения i -го перекрестка L согласно i -й координате v . Тогда D_v — это набор окружностей, см. рис. 2.

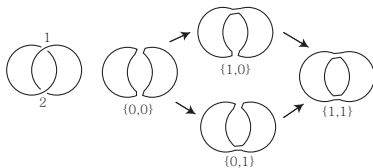


Рис. 2: Куб разведений $[0, 1]^2$ диаграммы зацепления Хопфа

Пусть e — ребро куба; координаты двух его концов отличаются в одной компоненте, скажем, l -й. Конец, у которого в этой компоненте стоит 0, мы называем *начальным концом* и обозначаем его $v_e(0)$. Другой конец будем называть *терминальным концом* и обозначать $v_e(1)$. Мы сопоставляем ребру e кобордизм $S_e : D_{v_e(0)} \rightarrow D_{v_e(1)}$, который является кобордизмом произведения, за исключением окрестности l -го пересечения, где это седловой кобордизм между 0-разведением и 1-разведением, см. рис. 3. Теперь построим комплекс Ли по аналогии с комплексом Хованова.

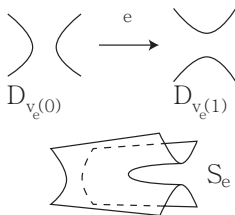


Рис. 3: Кобордизм $S_e : D_{v_e(0)} \rightarrow D_{v_e(1)}$, соответствующий ребру e

Сопоставим $1 + 1$ -мерную TQFT \mathcal{A}^3 кубу разведений. Иными словами, каждая вершина v заменяется группой $\mathcal{A}(D_v)$, а каждое ребро e заменяется отображением $\mathcal{A}(S_e): \mathcal{A}(D_{v_e(0)}) \rightarrow \mathcal{A}(D_{v_e(1)})$. Группой цепей комплекса Хованова $CKh(L)$ является прямая сумма групп $\mathcal{A}(D_v)$ по всем вершинам v , а дифференциал на слагаемом $\mathcal{A}(D_v)$ — это сумма отображений ребер $\mathcal{A}(S_e)$ по всем ребрам e , начальным концом которых является v . Как обычно, положим

$$d(x) = \sum_{i=1}^{\text{co}(v)} (-1)^{s(e_i)} \mathcal{A}(S_{e_i}).$$

Кобордизмы S_c бывают двух видов: две окружности могут слиться в одну либо одна окружность может разбиться на две окружности; им соответствуют отображения $m: V \otimes V \rightarrow V$ и $\Delta: V \rightarrow V \otimes V$ в комплексе Хованова.

³Моноидальный фактор из категории \mathcal{C}_{1+1} в категорию R -модулей называется $1+1$ -мерной TQFT.

Пусть \mathcal{X} — множество всех перекрестков диаграммы L . Пусть V — градуированное векторное пространство, порожденное двумя базисными элементами 1 и X степени 1 и -1 соответственно. Определим отображение $m : V \otimes V \rightarrow V$:

$$\begin{cases} 1 \otimes X \mapsto X, 1 \otimes 1 \mapsto 1, \\ X \otimes 1 \mapsto X, X \otimes X \mapsto 0 \end{cases} \quad (1)$$

и отображение $\Delta : V \rightarrow V \otimes V$

$$\begin{cases} 1 \mapsto 1 \otimes X + X \otimes 1 \\ X \mapsto X \otimes X. \end{cases} \quad (2)$$

Каждая седловая точка дает коумножение Δ или умножение m , как показано на рис. 4.

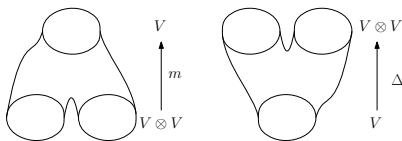
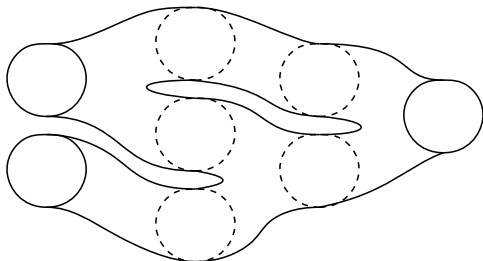


Рис. 4: Седло, коумножение Δ и умножение m

Например, для заданного кобордизма из $S^1 \sqcup S^1$ в S^1 получаем морфизм из $V \otimes V$ в V

$$V \otimes V \xrightarrow{\Delta \otimes Id} V \otimes V \otimes V \xrightarrow{Id \otimes m} V \otimes V \xrightarrow{m} V.$$



$$V \otimes V \xrightarrow{\Delta \otimes Id} V \otimes V \otimes V \xrightarrow{Id \otimes m} V \otimes V \xrightarrow{m} V$$

Рис. 5: Кобордизм из $S^1 \sqcup S^1$ в S^1 и соответствующий морфизм из $V \otimes V$ в V

Если отображения m и Δ удовлетворяют определенным условиям, то дифференциал соответствующего цепного комплекса корректно определен, а его группы гомологий (после некоторой нормализации) инвариантны относительно движений Рейдемейстера.

Однако, если мы хотим иметь дело не только с *инвариантами узлов*, но и с *кобордизмами*, нам потребуется определить два других отображения ι и ϵ . Добавлению 0-ручки (рождению окружности на диаграмме) соответствует отображение $\iota: \mathbb{Q} \rightarrow V$, а добавлению 2-ручки (уничтожению окружности) соответствует отображение $\epsilon: V \rightarrow \mathbb{Q}$:

$$\epsilon(X) = 1, \quad \epsilon(1) = 0, \quad \iota(1) = 1.$$

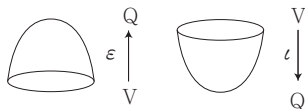


Рис. 6: Кобордизмы, соответствующие отображениям ι и ϵ

Отображение \mathcal{A} замечательно тем, что оно является градуированной TQFT.

Напомним, что градуировка на V задается как $p(1) = 1, p(X) = -1$ и соответственно продолжается на тензорные произведения. Мы знаем, что если v — однородный элемент $V^{\otimes n}$, то $p(\mathcal{A}(S_c)(v)) = (v) - 1$. Квантовая градуировка q на гомологиях Хованова определяется нормировкой $q(v) = p(v) + gr(v) + n_+ - n_-$, где n_{\pm} — количество положительных и отрицательных перекрестков диаграммы L . Напомним, что $gr(v) = |v| - n_-$, где v — количество 1 среди координат разведения v .

Содержание

- 1 Введение
- 2 Гомологии Хованова и гомологии Ли
 - Гомологии Ли
 - Вычисление Kh'

В [16] Ли рассмотрела аналогичную конструкцию, но с другой TQFT \mathcal{A}' вместо \mathcal{A} . Базовые векторные пространства для этих двух TQFT одинаковы, но отображения $m' : V \otimes V \rightarrow V$ и $\Delta' : V \rightarrow V \otimes V$, индуцированные кобордизмами, немного отличаются:

$$m'(1 \otimes 1) = m'(X \otimes X) = 1; \quad m'(1 \otimes X) = m'(X \otimes 1) = X \quad (3)$$

а также

$$\Delta'(1) = 1 \otimes X + X \otimes 1; \quad \Delta'(X) = X \otimes X + 1 \otimes 1. \quad (4)$$

Отображения ι и ϵ , соответствующие ручкам, такие же, как и раньше.

Обозначим полученный комплекс через $CKh'(L)$, а его гомологии через $Kh'(L)$.

Содержание

- 1 Введение
- 2 Гомологии Хованова и гомологии Ли
 - Гомологии Ли
 - Вычисление Kh'

Группа гомологий $Kh'(L)$ удивительно проста [16]. Чтобы убедиться в этом, достаточно ввести новый базис $\{a, b\}$ для V , где $a = X + 1, b = X - 1$.

В этом базисе отображения m' и Δ' выглядят следующим образом:

$$m'(a \otimes a) = 2a; \quad m'(a \otimes b) = m'(b \otimes a) = 0; \quad m'(b \otimes b) = -2b;$$

$$\Delta'(a) = a \otimes a; \quad \Delta'(b) = b \otimes b.$$

Также легко проверить, что

$$\epsilon'(a) = \epsilon'(b) = 1, \quad \iota(1) = \frac{(a - b)}{2}.$$

Используя этот базис, можно доказать следующую теорему.

Теорема 2.1 ([16])

Для l -компонентного зацепления L его гомологии $Kh'(L)$ имеют ранг 2^l .

Доказательство. Построим биекцию между множеством всех ориентаций L и множеством образующих $Kh'(L)$, которые мы назовем *каноническими образующими*. Для заданной ориентации o диаграммы зацепления L пусть D_o обозначает соответствующее ориентированное разведение.

Пометим окружности в D_o символами a и b по следующему правилу. Каждой окружности C сопоставим инвариант по модулю 2, который представляет собой четность числа окружностей в D_o , отделяющих C от бесконечности. Другими словами, проведем луч, исходящий из точки этой окружности, и посчитаем количество пересечений с другими окружностями по модулю 2. К этому числу добавим 1, если C имеет ориентацию против часовой стрелки, и 0, если она имеет ориентацию по часовой стрелке, см. рис. 7.

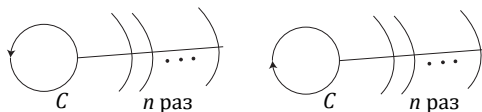


Рис. 7: Инвариант для левой окружности равен $n + 1$, так как C ориентирована против часовой стрелки, а инвариант для правой окружности равен n , так как C ориентирована по часовой стрелке.

Сопоставим C метку a , если инвариант равен 0 , и метку b , если инвариант равен 1 . Обозначим полученное состояние через s_0 .

Упражнение 1

Пусть L — зацепление Хопфа. Вычислите $Kh'(L)$ и проверьте теорему 2.1.

Построенные образующие действительно являются циклами. Название "каноническая образующая" оправдывается следующим результатом, доказательство которого будет дано позже.

Утверждение 2.2

Предположим, что L и \bar{L} связаны i -м движением Рейдемейстера. Тогда ориентация o на L индуцирует ориентацию \bar{o} на \bar{L} , а $\rho'_{i}([s_o])$ является ненулевым кратным $[s_{\bar{o}}]$.*

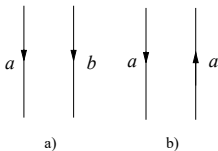


Рис. 8: Локальное поведение состояния $\{s_o\}$.

Закончим этот раздел элементарным, но важным наблюдением.

Лемма 2.3 (Когерентные ориентации)

Предположим, что на диаграмме для состояния s_0 есть область, содержащая ровно две дуги, как показано на рис. 8. Тогда либо ориентации дуг совпадают, а их метки разные (рис. 8.a), или ориентации разные, а метки совпадают (рис. 8.b).

Доказательство. Рассмотрим три возможных случая: либо две дуги принадлежат одной окружности D_0 , либо они принадлежат двум окружностям, одна из которых содержится внутри другой, либо они принадлежат двум окружностям, ни одна из которых не содержится внутри другой. В каждом случае справедливость утверждения легко проверяется. \square

Следствие 2.4

Если две окружности диаграмму состояния s_0 пересекаются, то их метки различны.

Используя очевидное отождествление между пространством цепей $CKh(L)$ и $CKh'(L)$, мы можем определить q -градуировку на последнем пространстве. Из формул (3) и (4) видно, что градуировка ведет себя не совсем хорошо по отношению к дифференциалу d' . Действительно, операция $\Delta'(X)$ даже не является однородной.⁴ Однако легко видеть, что если $v \in CKh'(L)$ — однородный элемент, то q -градуировка каждого монома в $d'(v)$ больше или равна q -градуировке v . Другими словами, q -градуировка определяет фильтрацию на комплексе $CKh'(L)$. Это замечание приводит к следующей теореме.

Теорема 2.5

Имеется спектральная последовательность с членом E_2 , равным $Kh(L)$, сходящаяся к $Kh'(L)$. Члены E_2 и выше этой спектральной последовательности являются инвариантами зацепления L .

⁴ $p(X \otimes X) = -2$, но $p(1 \otimes 1) = 2$

Фильтрация цепных комплексов

Предположим, у нас есть фильтрованный цепной комплекс

$$\cdots \hookrightarrow F_{p-1}C_\bullet \hookrightarrow F_p C_\bullet \hookrightarrow F_{p+1}C_\bullet \hookrightarrow \cdots,$$

где $F_p C_\bullet$ (также пишется как $C_{p,\bullet}$) — p -я фильтрация цепного комплекса C_\bullet . Более точно, это цепной комплекс фильтрованных векторных пространств $C_n = C_{p,n} \supseteq C_{p-1,n} \supseteq \cdots \supseteq C_{1,n} \supseteq C_{0,n} = 0$,

$$\cdots \rightarrow C_{n+1} \rightarrow C_n \rightarrow C_{n-1} \rightarrow \cdots$$

где дифференциалы учитывают фильтрацию:

$$d(F_p C_n) \subseteq F_p C_{n-1}.$$

Конечно, поскольку C_\bullet — цепной комплекс, $d^2 = 0$.

Из фильтрованного векторного пространства мы можем сформировать «ассоциированное градуированное» векторное пространство для каждого пространства в цепном комплексе

$$C_n \cong \frac{C_{p,n}}{C_{p-1,n}} \oplus \frac{C_{p-1,n}}{C_{p-2,n}} \oplus \cdots \oplus \frac{C_{1,n}}{C_{0,n}}.$$

Обозначим ассоциированное градуированное векторное пространство через $G_p C_n = C_{p,n}/C_{p-1,n}$.

Фильтрованный цепной комплекс

Дифференциалы d для отфильтрованного цепного комплекса индуцируют дифференциалы на ассоциированных пространствах градуированных векторов, что дает нам цепной комплекс градуированных векторных пространств. А именно, возьмем $x \in G_p C_n$. Тогда $x = x' + C_{p-1,n}$ для некоторого $x' \in C_{p,n}$. Таким образом, $d(x) = d(x' + C_{p-1,n}) = d(x') + d(C_{p-1,n})$, и, поскольку дифференциалы d учитывают фильтрацию, $d(x') \in C_{p,n-1}$ и $d(C_{p-1,n}) \subseteq C_{p-1,n-1}$. Таким образом, $d(x) \in F_p C_{n-1}$. Более того, $d^2 = 0$.

Для фильтрованного цепного комплекса $F_\bullet C_\bullet$ определим

- $G_p C_{p+q}$ как (p, q) - или $(p+q)$ -цепи фильтрации степени p (таким образом, $p+q$ есть гомологическая степень).
- $Z_{p,q}^r = \{x \in G_p C_{p+q} \mid dx = 0 \pmod{F_{p-r} C_\bullet}\}$
 $= \{x \in F_p C_{p+q} \mid dx \in F_{p-r} C_{p+q-1}\} / F_{p-1} C_{p+q}$, — пространство r -циклов градуировки (p, q) ,
- $B_{p,q}^r = d(F_{p-r} C_{p+q+1})$ — пространство r -границ градуировки (p, q) .

Далее, положим $Z_{p,q}^\infty = Z(G_p C_{p+q})$ и $B_{p,q}^\infty = d(C_{p,p+q+1})$.

Фильтрованный цепной комплекс

Утверждение 2.6

Дифференциалы исходного фильтрованного комплекса C_\bullet индуцируют дифференциалы $d^r: Z_{p,q}^r \rightarrow Z_{p-r,q+r-1}^r$ на r -циклах.

Утверждение 2.7

Имеется последовательность включений

$$B_{p,q}^0 \hookrightarrow B_{p,q}^1 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow B_{p,q}^\infty \hookrightarrow Z_{p,q}^\infty \hookrightarrow \dots \hookrightarrow Z_{p,q}^1 \hookrightarrow Z_{p,q}^0.$$

Утверждение 2.8

$$Z_{p,q}^{r+1} = \ker\{d^r: Z_{p,q}^r \rightarrow Z_{p-r,q+r-1}^r\}$$

Спектральная последовательность

Определение 2.9

Определим r -й член спектральной последовательности градуировки (p, q) как фактор-пространство r -циклов по r -границам

$$E_{p,q}^r = Z_{p,q}^r / B_{p,q}^r.$$

Так как дифференциалы на фильтрованном комплексе C_\bullet можно ограничить до дифференциалов $d^r: Z_{p,q}^r \rightarrow Z_{p-r,q+r-1}$, дифференциалы также индуцируют отображение r -гомологий $d^r: E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r$. Кроме того, по предыдущему утверждению, $E_{p,q}^{r+1}$ совпадает с d^r -гомологиями в члене $E_{p,q}^r$:

$$E_{p,q}^{r+1} = \frac{\ker(d^r: E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r)}{\operatorname{im}(d^r: E_{p+r,q-r+1}^r \rightarrow E_{p,q}^r)}$$

Утверждение 2.10

Нулевой член совпадает с ассоциированным градуированным комплексом $E_{p,q}^0 = G_p C_{p+q}$, а и первый член представляет собой гомологии ассоциированного градуированного комплекса $E_{p,q}^1 = H_{p+q}(G_p C_\bullet)$.

Сходимость спектральной последовательности

Определение 2.11

Пусть $\{E_{p,q}^r\}_{r,p,q}$ — спектральная последовательность, где для каждого p, q существует $r(p, q)$, такое что для всех $r \geq r(p, q)$ $E_{p,q}^r \cong E_{p,q}^{r(p,q)}$. В этом случае биградуированный объект $E^\infty = \{E_{p,q}^\infty\} = \{E_{p,q}^{r(p,q)}\}$ называется предельным членом спектральной последовательности.

Утверждение 2.12

Пусть фильтрация $F_\bullet C_\bullet$ на цепном комплексе C_\bullet ограничена, т.е. для каждого $n \in \mathbb{Z}$ существуют целые числа $U(n), L(n) \in \mathbb{Z}$ такие, что $F_{p < L(n)} C_n = 0$ и $F_{p > U(n)} C_n = C_n$. Тогда спектральная последовательность фильтрованного цепного комплекса $F_\bullet C_\bullet$ имеет предельный член, т.е. сходится.

Утверждение 2.13

Если спектральная последовательность фильтрованного комплекса $F_\bullet C_\bullet$ сходится, то ее предельный член изоморфен гомологиям исходного фильтрованного комплекса.

Набросок доказательства теоремы 2.5

Приведем набросок доказательства теоремы 2.5. Подробнее см. [12].

Первая часть теоремы непосредственно следует из приведенного выше наблюдения. Фильтрация на SKh' приводит к спектральной последовательности, сходящейся к Kh' . Дифференциал в его члене E^1 — это часть d' , которая сохраняет (а не повышает) q -градуировку. Сравнивая дифференциалы для комплекса Хованова и для комплекса Ли, мы видим, что член E^1 является комплексом SKh . Инвариантность гомологий Ли относительно движений Рейдемейстера доказывается по той же схеме, что и гомологий Хованова. В [16] Ли определяет отображения $\rho'_i : SKh'(L) \rightarrow SKh'(\bar{L})$, которые индуцируют изоморфизмы в гомологиях. Можно показать, что эти отображения индуцируют изоморфизмы в члене E^2 спектральной последовательности, тем самым завершая доказательство теоремы 2.5.

Упражнения I

- 1 Покажите, что соответствующие отображения куба на рис. 9, определенные для гомологий Ли на странице 19, коммутируют.

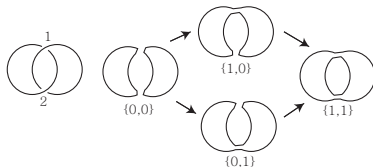


Рис. 9: Куб $[0, 1]^2$, соответствующий зацеплению Хопфа

- 2 Убедитесь, что уравнения (3) и (4) выполняются.
- 3 Пусть L — зацепление Хопфа. Вычислить $Kh'(L)$ и проверить теорему 2.1.

Упражнения II

- * Пусть $R = \mathbb{Z}[h, t]$ и $V = R[X]/(X^2 - hX - t)$.
 Отображение $m : V \otimes V \rightarrow V$ задается формулами







$$\begin{cases} 1 \otimes X \mapsto X, 1 \otimes 1 \mapsto 1, \\ X \otimes 1 \mapsto X, X \otimes X \mapsto hX + t, \end{cases}$$

а отображение $\Delta : V \rightarrow V \otimes V$ — формулами



$$\begin{cases} 1 \mapsto 1 \otimes X + X \otimes 1 - h1 \otimes 1 \\ X \mapsto X \otimes X + t1 \otimes 1. \end{cases}$$

Определим дифференциал как сумму частных дифференциалов, соответствующих ребрам, со знаками, определяемыми так же, как для гомологий Хованова и Ли. Покажите, что бифуркационный куб $\{0, 1\}^n$ антикоммутативен.








Литература I

-  V. O. Manturov, Knot theory: Second edition CRC press 560 April 4, 2018.
-  K. Murasugi, Knot Theory and Its Applications, Springer.
-  Carter, J. S. and Saito, M. (1993) Reidemeister moves for surface isotopies and their interpretation as moves to movies, *J. Knot Theory Ramifications*, **2**, pp. 251–284
-  D. Bar–Natan's homepage, [http://www.ma.huji.ac.il/~ drorbn](http://www.ma.huji.ac.il/~drorbn)
-  D. Bar-Natan. The Knot Atlas.
www.math.toronto.edu/ drorbn/KAtlas/index.html, 2003.
-  Dye, H.A., Kaestner, A. and Kauffman, L.H. (2017), Khovanov homology, Lee homology and a Rasmussen invariant for virtual knots, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **26**(3), 1741001.





Литература II

-  Fedoseev, D.A. and Manturov, V.O. (2016), Parities on 2-knots and 2-links, *J. Knot Theory Ramifications*, **25**(14), 1650079, 24 pp.
-  Fedoseev, D.A. and Manturov, V.O. (2017), A sliceness criterion for odd free knots, arXiv:1707.04923.
-  Freedman, M. (1982), A surgery sequence in dimension four; the relations with knot concordance, *Invent. Math.*, **68**(2), pp. 195–226.
-  Khovanov, M. (1997), A categorification of the Jones polynomial, *Duke Math. J.*, **101**, pp.359–426.
-  Khovanov, M. (2002), A functor-valued invariant of tangles, *Algebr. Geom. Topol.*, **2**, pp. 665–741.
-  M. Khovanov, Y. Qi, *A Faithful Braid Group Action on the Stable Category of Tricomplexes*, arXiv:1911.02503v2 [math.RT] 30 Mar 2020.
-  KnotPlot <http://knotplot.com>.

Литература III

-  KnotScape <http://www.math.utk.edu/~morwen/knotscape.html>.
-  Kronheimer, P.B. and Mrówka, T.S. (1993), Gauge theory for embedded surfaces. I, *Topology*, **32**, pp. 773–826.
-  Lee, E. S. (2002), The support of the Khovanov's invariants for alternating knots, arXiv: math.GT/ 0201105
-  Lee, E.S. (2005), An endomorphism of the Khovanov invariant, *Adv. Math.*, **197**(2), pp. 554–586.
-  Livingston, C. (2004), Computations of the Ozsváth–Szabó knot concordance invariant, *Geom. Topol.*, **8**, pp. 735–742.
-  Manturov V.O. (2012), Parity and cobordisms of free knots, *Sb. Math.*, **203**(1–2), pp. 196–223.
-  McCleary, J. (2001), *A User's Guide to Spectral Sequences (2nd ed.)*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **58**, Cambridge University Press.

Литература IV

-  Rasmussen, J. A. (2003), Floer Homology and Knot Complements, PhD thesis, Harvard University, math.GT/0306378.
-  Rasmussen J. A. (2010), Khovanov homology and the slice genus, *Invent. Math.*, **182**(2), pp.419–447.
-  Shumakovitch, A. (2003), KhoHo pari package, www.geometrie.ch/KhoHo/.
-  Shumakovitch, A. (2012), Khovanov homology theories and their applications, in: *Perspectives in Analysis, Geometry, and Topology, Progress in Mathematics*, **296**, pp. 403–430.