

Лекция. Гомологии Хованова

Содержание

- 1 Основные определения
 - Скобка Кауфмана
 - Биградуированные комплексы
- 2 Гомологии Хованова
 - Комплекс Хованова
 - Инвариантность гомологий Хованова
- 3 Стягивающее дерево для многочлена Хованова
- 4 Гомологии Хованова и расширения Фробениуса
- 5 Минимальные диаграммы зацеплений
- 6 Упражнения

Содержание

- 1 Основные определения
 - Скобка Кауфмана
 - Биградуированные комплексы
- 2 Гомологии Хованова
 - Комплекс Хованова
 - Инвариантность гомологий Хованова
- 3 Стягивающее дерево для многочлена Хованова
- 4 Гомологии Хованова и расширения Фробениуса
- 5 Минимальные диаграммы зацеплений
- 6 Упражнения

Настоящая лекция посвящена решающему прорыву в теории узлов, совершенному в самом конце 20-го века: гомологиям Хованова.

Хованов предложил следующую идею: обобщить понятие скобки Кауфмана, используя некоторые формальные комплексы и их группы гомологий.

Сначала мы дадим небольшую модификацию многочлена Джонса и скобки Кауфмана, предложенную Ховановым. (Ненормированный) многочлен Джонса является градуированной эйлеровой характеристикой комплекса Хованова [7].

Гомология Хованова является первым примером идеи категорификации: вместо полиномиального инварианта (который можно рассматривать просто как набор коэффициентов) с любой диаграммой узлов ассоциируется клеточный комплекс, группы гомологий которого инвариантны относительно движений Рейдемейстера и чья (градуированная) Эйлерова характеристика является многочленом Джонса.

Главной особенностью категоризации является ее *функториальность*. Если есть только (инвариантное) число, скажем, 5, невозможно его отобразить в другое число, скажем, 3; однако 5-мерное пространство можно отобразить в трехмерное пространство. Следовательно, мы получаем гораздо более глубокую инвариантную структуру, чем просто (градуированная) Эйлерова характеристика, которая является просто набором чисел (многочленом).

После категорификации люди изобрели дальнейшие усовершенствования инвариантов узлов, скажем, *спектрификацию* и *гомотопический тип Хованова*, где с диаграммой узлов мы связываем некоторое топологическое пространство (спектр), гомотопический тип которого инвариантен относительно движений Рейдемейстера. Это приводит к гораздо более глубокой структуре инвариантов, чем набор полиномиальных коэффициентов.

Другая идея категорификации появилась одновременно в работе Ожвата и Сабо: они категорифицировали *многочлен Александера*. Основное отличие состояло в том, что гомологии Хованова были определены чисто комбинаторным способом, в то время как гомологии Ожвата-Сабо (которые они называли гомологией Хегора–Флоера) берет свое начало в геометрии.

Содержание

- 1 Основные определения
 - Скобка Кауфмана
 - Биградуированные комплексы
- 2 Гомологии Хованова
 - Комплекс Хованова
 - Инвариантность гомологий Хованова
- 3 Стягивающее дерево для многочлена Хованова
- 4 Гомологии Хованова и расширения Фробениуса
- 5 Минимальные диаграммы зацеплений
- 6 Упражнения

Скобка Кауфмана

Напомним аксиомы скобки Кауфмана:

1 Скобка Кауфмана пустого множества (зацепления с 0 компонентами) равна 1.

2 $\langle L \sqcup \bigcirc \rangle = (q + q^{-1})\langle L \rangle$.

3 Для любых трех диаграмм $L = \text{diagram 1}$, $L_A = \text{diagram 2}$, $L_B = \text{diagram 3}$ неориентированных зацеплений, имеем

$$\langle L \rangle = \langle L_A \rangle - q \langle L_B \rangle.$$

Обозначим состояние A вершины как 0-сглаживание, а состояние B — как 1-сглаживание. Если вершины пронумерованы, то каждый способ сглаживания для всех пересечений диаграммы считается вершиной n -мерного куба $\{0, 1\}^{\mathcal{X}}$, где \mathcal{X} — множество вершин диаграммы.

Скобка Кауфмана

Пусть у диаграммы зацепления L есть n_+ положительных и n_- отрицательных перекрестков; обозначим сумму $n_+ + n_-$ через n (общее число перекрестков в диаграмме).

Обозначим ненормированный полином Джонса через

$$\hat{J}(L) = (-1)^{n_-} q^{n_+ + 2n_-} \langle L \rangle.$$

Определим полином Джонса (обозначаемый как J в соответствии с [3]) следующим образом:

$$J(L) = \frac{\hat{J}(L)}{q + q^{-1}}.$$

Таким образом,

$$J(L) = (-1)^{n_-} q^{n_+ - 2n_-} \sum_s -q^{\beta(s)} (q + q^{-1})^{\gamma(s) - 1}.$$

Замечание 1.1

Нормализованный полином Джонса J отличается от полинома Джонса–Кауфмана заменой переменной: $a = \sqrt{(-q^{-1})}$. А именно,

$$\begin{aligned}
 & (-a)^{-3(n_+ - n_-)} \sum_s a^{\alpha(s) - \beta(s)} (-a^2 - a^{-2})^{\gamma(s) - 1} \\
 &= (-1)^n a^{-3(n_+ - n_-)} \sum_s a^{-2\beta(s) + n} \cdot (q + q^{-1})^{\gamma(s) - 1} \\
 &= (-1)^n a^{4n_+ - 2n_-} \sum_s (-q)^{\beta(s)} (q + q^{-1})^{\gamma(s) - 1} \\
 &= (-1)^{n_-} q^{n_+ - 2n_-} \sum_s (-q)^{\beta(s)} (q + q^{-1})^{\gamma(s) - 1}.
 \end{aligned}$$

Содержание

- 1 Основные определения
 - Скобка Кауфмана
 - Биградуированные комплексы
- 2 Гомологии Хованова
 - Комплекс Хованова
 - Инвариантность гомологий Хованова
- 3 Стягивающее дерево для многочлена Хованова
- 4 Гомологии Хованова и расширения Фробениуса
- 5 Минимальные диаграммы зацеплений
- 6 Упражнения

Идея категорификации Хованова заключается в том, чтобы **заменить многочлены градуированными векторными пространствами с некоторой “градуированной размерностью”**. Это делает многочлен Джонса гомологическим объектом. С другой стороны, градуированная размерность позволяет нам рассматривать инвариант, который должен быть построен, как многочлен от двух переменных.

Мы построим “скобку Хованова” (ненормированный комплекс, который играет ту же роль для комплекса Хованова, что и скобка Кауфмана для многочлена Джонса). Он будет обозначаться двойными квадратными скобками.

м

Давайте начнем с основных определений и введем обозначения.

м

Пусть линейное пространство M (или свободный модуль M над кольцом \mathcal{R}) имеют заданную *квантовую градуировку* q . Тогда получается следующее разложение $M = \bigoplus_i M_i$, где M_i — однородный компонент градуировки i . Под *градуированной размерностью* пространства M мы подразумеваем многочлен $q \dim M = \sum_i q^i \dim M_i$.

Для таких комплексов существуют естественно определенные операции *сдвига высоты* $C \mapsto C[k]$ и *сдвига градуировки* $C \mapsto C\{l\}$ заданные по правилу: $(C[k])^{i,j} = C^{i-k,j}$; $(C\{l\})^{i,j} = C^{i,j-l}$. В первом случае вместе с цепями соответственно сдвигаются все дифференциалы (т.е. дифференциал ∂_i , который отображал $C^{i,*}$ в $C^{i+1,*}$, теперь будет действовать из $C^{i-k,*}$ в $C^{i+1-k,*}$). Под *градуированной Эйлеровой характеристикой* комплекса $C^{i,j}$ мы подразумеваем переменную сумму градуированных размерностей цепных пространств или, что то же самое, градуированных размерностей групп гомологий. Для пространств цепей имеем:

$$\chi_q(C^{i,j}) = \sum_i (-1)^i q^{\dim C^i} = \sum_{i,j} (-1)^i q^j \dim C^{i,j}.$$

Для таких комплексов для каждой биградуированной размерности (i,j) существует группа (ко)гомологий $H^{ij}(C)$, которая определяется как фактор-модуль соответствующего модуля циклов подмодулем границ.

Определение 1.2

Два градуированных (биградуированных) комплекса \mathcal{C} и \mathcal{C}' называются *квази-изотопными*, если существуют два (би)градуированных отображения $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$, $g: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ с отображением u , уменьшающим высоту на 1 и сохраняющим вторую градуировку, такие что $f \circ g = Id_{\mathcal{C}'}$, and $g \circ f - Id_{\mathcal{C}} = d \circ u + u \circ d$. Здесь $Id_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, $Id_{\mathcal{C}'}: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}'$ обозначает тождественное отображение.

Гомологии квази-изотопных комплексов изоморфны.

Содержание

- 1 Основные определения
 - Скобка Кауфмана
 - Биградуированные комплексы
- 2 Гомологии Хованова
 - Комплекс Хованова
 - Инвариантность гомологий Хованова
- 3 Стягивающее дерево для многочлена Хованова
- 4 Гомологии Хованова и расширения Фробениуса
- 5 Минимальные диаграммы зацеплений
- 6 Упражнения

Содержание

- 1 Основные определения
 - Скобка Кауфмана
 - Биградуированные комплексы
- 2 Гомологии Хованова
 - Комплекс Хованова
 - Инвариантность гомологий Хованова
- 3 Стягивающее дерево для многочлена Хованова
- 4 Гомологии Хованова и расширения Фробениуса
- 5 Минимальные диаграммы зацеплений
- 6 Упражнения

Пусть L , n и n_{\pm} определены как выше. Пусть \mathcal{X} — множество перекрестков в диаграмме L . Пусть V обозначает градуированное векторное пространство с двумя базисными элементами v_{\pm} степени ± 1 соответственно. Тогда $qdim V = q + q^{-1}$.

Определение 2.1

Кубом бифуркаций назовем куб $\{0, 1\}^{\mathcal{X}}$, где каждой вершине сопоставляется набор окружностей (как в кубе состояний), а каждое ребро указывает, какая окружность перестраивается при переходе из состояния в соседнее состояние. *Высотой* состояния (вершины куба) называется число B -глаживаний.

Ориентируем ребра куба по возрастанию высоты (т.е. от A -глаживания к B -сглаживанию).

С каждой вершиной α куба бифуркации $\{0, 1\}^X$ свяжем градуированное векторное пространство $V_\alpha(L) = V^{\otimes k}\{r\}$, где k (ранее γ) — число окружностей в сглаживании L , соответствующее α , а r — высота $|\alpha| = \sum_i \alpha_i$ вершины α (так что $qdim V_\alpha(L)$ — полином, который появляется при вершине α). Определим теперь r -ю группу цепей $[[L]]^r$ как прямую сумму векторных пространств высоты r , то есть $\bigoplus_{\alpha: |\alpha|=r} V_\alpha(L)$. Положим $C := [[L]][-n_-]\{n_+ - 2n_-\}$.

Замечание 2.2

Легко показать, что градуированная размерность $\chi_q(C)$ комплекса C равна переменной сумме градуированных размерностей его цепных групп. Это вполне аналогично случаю обычной эйлеровой характеристики.

Таким образом, мы можем вычислить градуированную эйлерову характеристику комплекса C (с учетом только его градуированных цепей); дифференциал будет введен позже.

Теорема 2.3

Градуированная эйлерова характеристика комплекса $C(L)$ совпадает с ненормированным многочленом Джонса \hat{J} зацепления L .

Доказательство. Эта теорема почти тривиальна. Нужно просто взять переменную сумму градуированных размерностей цепных групп и упомянуть, что $\text{qdim}(V^{\oplus n}) = n \text{qdim}(V)$. Остальная часть следует напрямую. \square

Определим дифференциал на комплексе Хованова. Обозначим через $[[L]]^r$ прямую сумму векторных пространств, появляющихся в вершинах куба с ровно координатами r , равными 1.

Ребра куба $\{0, 1\}^X$ можно задать последовательностью символов $\{0, 1, *\}$ длины n с ровно одним $*$. Это означает, что ребро соединяет две вершины, которые получаются из последовательности заменой $*$ на 0 или 1.

Определение 2.4

Высотой $|\xi|$ ребра ξ назовем высоту его начала (то есть конца с меньшей высотой).

Таким образом, если отображения для ребер обозначены как d_ξ , дифференциал имеет вид $d^r = \sum_{\{|\xi|=r\}} (-1)^\xi d_\xi$.

Определение 2.5

Куб с частичными дифференциалами d_ξ называется *коммутативным*, если каждая двумерная грань куба образует коммутативную диаграмму, и *антикоммутативным*, если любая двумерная грань представляет **антикоммутативную диаграмму**.

Теперь дадим определение знака $(-1)^\xi$ и отображений d_ξ . Чтобы получить оператор дифференцирования d , такой что $d \circ d = 0$, достаточно показать, что все двумерные грани куба антикоммутативны.

Этого можно добиться следующим образом. Сначала сделаем все грани коммутативными, а затем умножим каждое отображение d_ξ на $(-1)^\xi = (-1)^{\sum_{i < j} \xi_i}$, где j — позиция символа $*$ в ξ .

Упражнение 1

Покажите, что такие коэффициенты действительно делают любой коммутативный куб антикоммутативным.

Таким образом, мы должны найти отображения, которые могут сделать наш куб коммутативным.

Каждое ребро представляет некоторую перестройку состояния нашей диаграммы в некоторой вершине. Таким образом, это означает либо разделение одного цикла на два цикла, либо слияние двух циклов. В этих случаях мы будем использовать коумножение Δ и умножение m , определенные следующим образом.

Отображение $m : V \otimes V \rightarrow V$:

$$\begin{cases} v_+ \otimes v_- \mapsto v_-, v_+ \otimes v_+ \mapsto v_+, \\ v_- \otimes v_+ \mapsto v_-, v_- \otimes v_- \mapsto 0. \end{cases} \quad (1)$$

Отображение $\Delta : V \rightarrow V \otimes V$

$$\begin{cases} v_+ \mapsto v_+ \otimes v_- + v_- \otimes v_+ \\ v_- \mapsto v_- \otimes v_- \end{cases} \quad (2)$$

Из-за изменения градуировки отображения m и Δ имеют

1+1-мерная ТКТП

С помощью умножения Δ и умножения m мы можем получить отображение из кобордизмов между ориентированными 1-многообразиями в векторные пространства (или коммутативные модули) с операциями Δ и m . Точнее, давайте рассмотрим кобордизм W с 1-мерными границами M, N . Обратите внимание, что M и N являются непересекающимися объединениями копий S^1 . Если M (N) состоит из m (n) компонент S^1 , то

$$M \mapsto V^{\otimes m} \text{ и } N \mapsto V^{\otimes n}.$$

Каждая седловая точка дает коумножение Δ и умножение m , как описано на рис. 1.

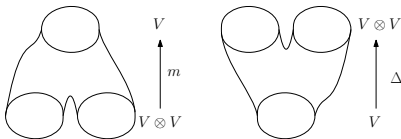
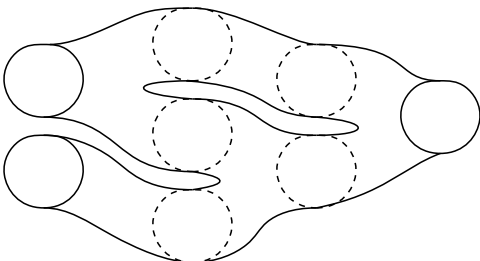


Рис. 1: Седла и отображения коумножения Δ и умножения m

1+1-мерная ТКТП: продолжение

Например, для данного кобордизма из $S^1 \sqcup S^1$ в S^1 получаем морфизм $V \otimes V$ to V

$$V \otimes V \xrightarrow{\Delta \otimes Id} V \otimes V \otimes V \xrightarrow{Id \otimes m} V \otimes V \xrightarrow{m} V.$$



$$\begin{array}{ccccc}
 V \otimes V & \rightarrow & V \otimes V \otimes V & \rightarrow & V \otimes V & \rightarrow & V \\
 & & \Delta \otimes Id & & Id \otimes m & & m
 \end{array}$$

Рис. 2: Кобордизм из $S^1 \sqcup S^1$ в S^1 и соответствующий морфизм $V \otimes V$ to V

1+1-мерная ТКТП: продолжение

То есть мы получаем функтор из категории \mathcal{C}_{1+1} в категорию векторных пространств с морфизмами Δ и m , где \mathcal{C}_{1+1} — категория, объекты которой являются замкнутыми, ориентированными 1-многообразиями, и где морфизм $M \rightarrow N$ — ориентированная поверхность W с $\partial W = M \sqcup N$.

м

В более общем смысле моноидальный функтор из \mathcal{C}_{1+1} в категорию R -модулей называется *1+1-мерной топологической квантовой теорией поля*.

Теперь единственное, что нужно проверить, это то, что грани нашего куба для d_ξ (без коэффициентов ± 1) коммутируют. Это следует из обычной проверки.

Наиболее интересным фактом здесь является инвариантность *всех групп гомологий* комплекса Хованова при всех движениях Рейдемейстера. Давайте поговорим об этом более подробно. Для диаграммы зацепления L обозначим через $Kh(L)$ выражение

$$\sum_r q^r \text{qdim } \mathcal{H}^r(L).$$

Замечание 2.6

Если нужно явно задать поле F или коммутативное кольцо R коэффициентов, пишут $Kh_F(L)$ ил $Kh_R(L)$.

Основным примером являются целочисленные гомологии Хованова $Kh_{\mathbb{Z}}(L)$.

Содержание

- 1 Основные определения
 - Скобка Кауфмана
 - Биградуированные комплексы
- 2 Гомологии Хованова
 - Комплекс Хованова
 - Инвариантность гомологий Хованова
- 3 Стягивающее дерево для многочлена Хованова
- 4 Гомологии Хованова и расширения Фробениуса
- 5 Минимальные диаграммы зацеплений
- 6 Упражнения

Теорема 2.7 (Основная теорема)

Градуированные размерности групп гомологий $\mathcal{H}^r(L)$ являются инвариантами зацеплений, а значи, $Kh(L)$ является полиномиальным инвариантом зацеплений (от переменных t, q), который совпадает с ненормированным полиномом Джонса при $t = -1$.

Доказательство.

Мы ограничимся только тремя версиями движений Рейдемейстера (одно Ω_1 , одно Ω_2 и одно Ω_3). Остальные случаи можно свести к тем, которые мы собираемся рассмотреть.

В случае скобки Кауфмана и многочлена Джонса инвариантность может быть доказана путем редукции скобки Кауфмана "сложной диаграммы" движения с помощью правила ($\langle L \rangle = \langle L_A \rangle - q \langle L_B \rangle$).

Здесь мы сделаем почти то же самое, но поскольку мы имеем дело с комплексами и гомологиями, а не с многочленами, мы должны интерпретировать это на другом языке. А именно, мы собираемся использовать следующий "принцип сокращения".

Доказательство теоремы 2.7: продолжение

Пусть \mathcal{C} — цепной комплекс и пусть $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ — подкомплекс в \mathcal{C} .

Лемма 2.8 (Принцип сокращения)

- 1 Если комплекс \mathcal{C}' ациклический, то $H(\mathcal{C}) = H(\mathcal{C}/\mathcal{C}')$.
- 2 Если комплекс \mathcal{C}/\mathcal{C}' ациклический, то $H(\mathcal{C}) = H(\mathcal{C}')$.

Оба утверждения сразу следуют из точной последовательности:

$$\dots \rightarrow H^r(\mathcal{C}') \rightarrow H^r(\mathcal{C}) \rightarrow H^r(\mathcal{C}/\mathcal{C}') \rightarrow \dots$$


индуцированной точной последовательностью

$$0 \rightarrow \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/\mathcal{C}' \rightarrow 0.$$

Доказательство теоремы 2.7: продолжение


Теперь давайте докажем инвариантность $Kh(\cdot)$ относительно трех движений Рейдемейстера.

Инвариантность относительно Ω_1 .

Рассмотрим три диаграммы , и

При вычислении $\mathcal{H}(P)$ мы сталкиваемся с комплексом

$$c = [[\text{crossing}]] = \left([[\text{crossing with dot}] \xrightarrow{m} [[\text{crossing with dot in opposite position}]] \{1\} \right).$$

Это означает, что общий n -мерный куб для  разбивается на два $(n-1)$ -мерных куба, соответствующих двум сглаженным диаграммам (одна из них сдвинута по размерности); все дифференциалы между этими двумя кубами по определению равны m .


Доказательство теоремы 2.7: продолжение


В случае Ω_2 мы рассмотрим один случай. В этом случае $[[\text{diagram}]]$ будет представлен в виде скобок diagram1 , diagram2 , diagram3 , diagram4 и дифференциалов между ними:

$$\begin{array}{ccc}
 [[\text{diagram1}]]\{1\} & \rightarrow & [[\text{diagram2}]]\{2\} \\
 \uparrow & & m \uparrow \\
 C = [[\text{diagram4}]] & \xrightarrow{\Delta} & [[\text{diagram3}]]\{1\}
 \end{array}$$

Таким образом, у нас есть четыре куба коразмерности два, и мы знаем, как выглядят дифференциалы в этих маленьких кубах: мы можем описать элементы когомологий в терминах этих дифференциалов. Только нужно проверить, действительно ли они представляют группы гомологий в большом кубе.

Доказательство теоремы 2.7: продолжение

Левая нижняя часть диаграммы содержит диаграмму  (точнее, все состояния, соответствующие этому локальному разведению).

Наблюдение 1. Легко видеть, что цепи в этом состоянии не могут давать группы гомологий комплекса: их дифференциалы имеют нетривиальную проекцию на  $\{1\}$.

Наблюдение 2. Все цепи, соответствующие $[[\langle \langle \text{diagram} \rangle \rangle \{1\}]]$ не являются границами цепей, соответствующих $[[\langle \langle \text{diagram} \rangle \rangle]]$: дифференциал элемента из $[[\langle \langle \text{diagram} \rangle \rangle]]$ также оказывает влияние на $[[\langle \langle \text{diagram} \rangle \rangle]] \{1\}$.

Доказательство теоремы 2.7: продолжение


Наблюдение 3. Комплекс $[[\text{diagram}]]\{1\}_{v_+} \xrightarrow{m} [[\text{diagram}]]\{2\}$ является ациклическим.

Наблюдение 4. Каждый граничный элемент x в $[[\text{diagram}]]\{2\}$,

исходящий из элемента $z \in [[\text{diagram}]]\{1\}$, имеет уникальный

компенсирующий член в $y \in [[\text{diagram}]]\{1\}$ такой, что $\partial y = \partial z = x$. Это следует из наблюдения 3. Таким образом, в этом комплексе есть y такой, что $\partial y = x$.

Доказательство теоремы 2.7: продолжение

Принимая во внимание наблюдения 2 и 4, мы приходим к выводу, что **все группы гомологий, содержащие элементы из , находятся во взаимно однозначном соответствии с группами гомологий комплекса $C[[\langle \text{Diagram of a pair of pants} \rangle]]$.**

Легко проверить, что комплекс C не имеет других групп гомологий (это следует из наблюдений 1 и 3; доказательство оставлено читателю).

Это приводит к инвариантам групп гомологий вплоть до сдвигов градуировки. Принимая во внимание константы нормализации, мы получаем инвариантность комплекса Хованова при втором Движении Рейдемейстера Ω_2 .

Доказательство инвариантности для других случаев Ω_2 вполне аналогично рассмотренному выше случаю. Прямое вычисление с помощью Ω_2 не работает, поэтому мы должны использовать метод сокращения, описанный выше.

В случае третьего движения Рейдемейстера Ω_3 ситуация сложнее, чем в случае многочлена Кауфмана. Здесь у нас есть следующие локальные картиннки; см. рис. 3.

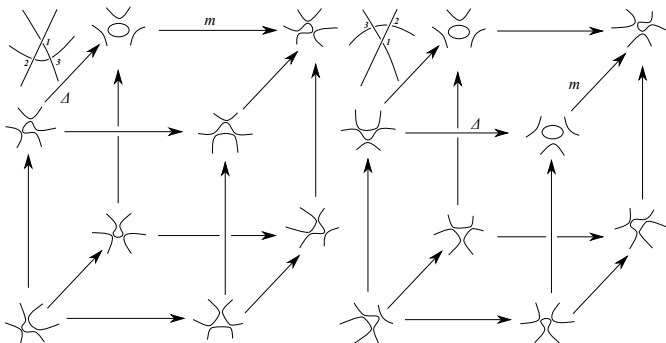


Рис. 3: Поведение комплекса Хованова при Ω_3

Доказательство теоремы 2.7: продолжение

Этот комплекс содержит подкомплекс C' , который выглядит следующим образом

$$C' = \begin{array}{ccc} \left[\left[\text{circle with two dots} \right] \right]_{v_+} \{1\} & \longrightarrow & \left[\left[\text{circle with two dots} \right] \right] \{2\} \\ \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Ацикличность комплекса C' очевидна.

Сократив комплекс C на C' , мы получим комплекс

$$\begin{array}{ccc} \left[\left[\text{circle with two dots} \right] \right] \{1\} /_{v_+=0} & \xrightarrow{m} & 0 \\ \Delta \uparrow & & \uparrow \\ \left[\left[\text{circle with two dots} \right] \right] & \longrightarrow & \left[\left[\text{circle with two dots} \right] \right] \{1\} \end{array}$$

Доказательство теоремы 2.7: продолжение

Теперь, если мы рассмотрим частный случай верхнего слоя, показанного на Рис. 3, мы увидим, что комплекс C' содержит подкомплекс

$$\begin{array}{ccc}
 \beta & \longrightarrow & 0 \\
 \mathcal{C}''' = \Delta \uparrow & \begin{array}{c} \tau = d_{*0} \Delta^{-1} \\ \searrow \\ d_{*0} \end{array} & \uparrow \\
 \alpha & \xrightarrow{d_{*0}} & \tau\beta,
 \end{array}$$

который является ациклическим, потому что Δ является изоморфизмом.

После этого получаем, что

$$\begin{array}{ccc}
 \beta & \longrightarrow & 0 \\
 (\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}''' = \uparrow & \searrow & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & \gamma.
 \end{array}$$

Доказательство теоремы 2.7: продолжение

Замечание 2.9

Отображение τ не является дифференциалом. Далее диагональная стрелка $\beta = \tau\beta$ означает, что мы отождествляем два элемента куба.

Доказательство теоремы 2.7: продолжение

По принципу сокращения мы можем выполнить эту операцию (сокращение на C' и C_1 , определенным для верхних слоев 3-куба) для двух кубов, показанных на рис. ?? (только для их верхних слоев). Полученные кубы показаны на рис. 4.

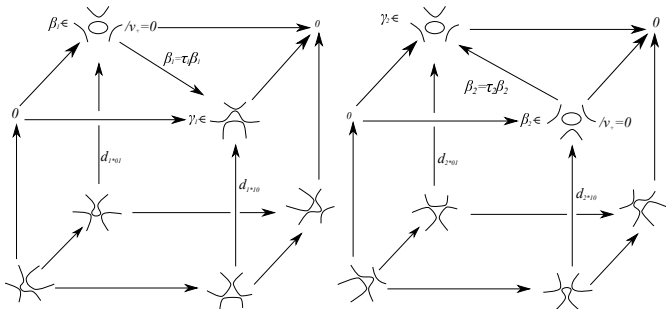


Рис. 4: Инвариантность при Ω_3

Доказательство теоремы 2.7: продолжение

Теперь эти два комплекса фактически изоморфны посредством отображения \mathfrak{Y} , который сохраняет нижние слои, показанные на рис. 4, на месте и перемещает верхние слои, сопоставляя пару (β_1, γ_1) паре β_2, γ_2 .

Тот факт, что \mathfrak{Y} действительно является изоморфизмом пространств, очевиден. Чтобы показать, что это действительно изоморфизм комплексов, нам нужно проверить, что он коммутирует с отображениями ребер. В этом случае только вертикальные ребра требуют проверки. Доказательство этого факта, а именно, что $\tau_1 \circ d_{1*01} = d_{2*01}$ и $d_{1*10} = \tau_2 \circ d_{2*10}$, оставлено в качестве упражнения. \square

Определение 2.10

Назовем *высотой* $h(Kh(K))$ многочлена Хованова зацепления K разность между самой большой и самой маленькой квантовой градуировкой ненулевых слагаемых в многочлене Хованова зацепления K .

Высота многочлена Хованова оправдывает оценки, полученные из размаха скобки Кауфмана. Последний отвечает за несократимость начального и наименьшего членов в разложении

$$\langle \bar{L} \rangle = \sum_s a^{\alpha(s) - \beta(s)} (-a^2 - a^{-2})^{\gamma(s) - 1},$$

где сумма берется по всем состояниям s диаграммы \bar{L} , в то же время цепи комплекса Хованова находятся в естественном взаимно-однозначном соответствии с мономерами скобки, умноженными на $(-a^2 - a^{-2})$.

Из конструкции ясно, что

$$h(Kh(K)) - 2 \geq \frac{\text{span}\langle K \rangle}{2}.$$

Как мы уже говорили ранее, многочлен Хованова (с рациональными группами гомологий) строго сильнее многочлена Джонса. Пример двух узлов, для которых многочлен Джонса совпадает, а группы гомологий Хованова — нет, показан на рис. 5.

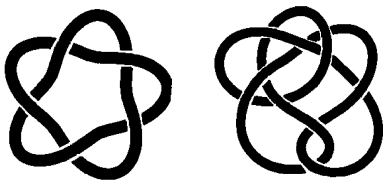


Рис. 5: \mathbb{Q} -гомологии Хованова сильнее полинома Джонса

Упражнение 2

Проверьте неравенство для данного примера.

Содержание

- 1 Основные определения
 - Скобка Кауфмана
 - Биградуированные комплексы
- 2 Гомологии Хованова
 - Комплекс Хованова
 - Инвариантность гомологий Хованова
- 3 Стягивающее дерево для многочлена Хованова**
- 4 Гомологии Хованова и расширения Фробениуса
- 5 Минимальные диаграммы зацеплений
- 6 Упражнения

Мы опишем несколько иной подход к вычислению (точнее, к оценке) гомологии Хованова, благодаря которому некоторые свойства гомологии Хованова стали более ясными.

Сформулируем лемму из теории алгебраических комплексов, см. [12].

Лемма 3.1

Пусть C_0 и C_1 — градуированные комплексы, и $C_i = A_i \oplus B_i$, где комплексы B_i ацикличны. Пусть $w: C_0 \rightarrow C_1$ — цепное отображение, сохраняющее градуировку, и пусть $w_{\text{дд}}: A_0 \rightarrow A_1$ — “часть” отображения w ; т.е. композиция отображения w с естественной проекцией и вложением. Пусть A — конус над отображением w , а B — комплекс вида $B_0 \oplus B_1[1]$. Тогда гомологии комплексов C и $A \oplus B$ совпадают.

Доказательство этой теоремы чисто алгебраическое, оно не касается "внутренней" структуры дифференциалов в комплексах A_i и B_i .

Лемма является ключевым моментом в доказательстве Теоремы 3.2 об остовном дереве для комплекса Хованова.

Основная идея построения остовного дерева, ведущего к доказательству теоремы, совпадает с идеей Тислтуэйта, которую он использовал для построения остовного дерева скобки Кауфмана: необходимо взять бифуркационный куб и разбить его на небольшие подкубы, соответствующие состояниям из множества \mathcal{V}_1 с одной окружностью. После этого мы должны рассмотреть гомологии Хованова для каждого из этих подкубов; т.е. копии групп гомологий тривиального узла и повторно применить к ним лемму 3.1. Мы должны применять эту лемму при каждом разбиении куба на две части.

Давайте опишем эту конструкцию более подробно. Мы рассмотрим ненормализованный комплекс Хованова для ссылки. В дальнейшем мы должны исключить "общий нормализующий коэффициент"; т.е. сдринуть градуировки.

Пусть K — диаграмма зацепления. Давайте рассмотрим ее ненормализованный куб бифуркации $[[K]]$ с дифференциалом ∂ . Занумеруем все перекрестки K и разделим куб $[[K]]$ последовательно на кубики в соответствии со схемой Тислтуэйта. А именно, на первом шаге мы исследуем, является ли первый перекресток распадающимся (мы называем перекресток *распадающимся*, если при удалении соответствующей вершины диаграммы последняя становится несвязной) и, если он не распадающимся, мы переходим к рассмотрению двух кубов, полученных из $[[K]]$ путем фиксации первой координаты.

Эти два куба представляют ненормализованные комплексы Хованова для диаграмм K_0 и K_1 , полученных из K сглаживаниями типа A и B . Комплекс Хованова для K_i имеет некоторый набор групп гомологий; если мы рассмотрим K_0 и K_1 как составные части комплекса Хованова, соответствующего K , мы получим некоторые новые дифференциалы, соответствующие к переходу от K_0 к K_1 . Лемма 3.1 утверждает, что исходный (ненормализованный) комплекс Хованова для диаграммы K имеет те же гомологии, что и комплекс, созданный только из гомологий комплексов K_0 и K_1 (а также некоторая ациклической части).

Далее мы применяем второй шаг: рассматриваем комплексы K_0 и K_1 (как части нового комплекса, гомологии которого совпадают с гомологиями Хованова зацепления K) и исследуем, распадаются ли соответствующие диаграммы при втором перекрестке. Если некоторые из них (скажем, K_0) не распадаются, то мы перестраиваем комплекс K_0 и получаем комплекс типа $(K_{00} \rightarrow K_{01}) \oplus \langle \text{ациклическая часть} \rangle$.

Мы продолжаем процесс, пока не достигнем диаграммы со сглаженными перекрестками. Каждая из этих диаграмм представляет собой тривиальный узел; следовательно, мы приходим к выводу, что гомологии Хованова могут быть вычислены с помощью комплекса, состоящего из гомологий тривиального узла. Соответствующая формула выглядит так:

Теорема 3.2

Ненормализованный комплекс Хованова зацепления K изоморфен комплексу, группы цепей которого имеют вид

$$\bigoplus_{s \in \mathcal{V}_1} \mathcal{A}[\beta(s) + w(K_s)]\{\beta(s) + 2w(K_s)\}, \quad (3)$$

где \mathcal{A} — группа гомологий тривиального узла.

Позже мы также будем использовать термин *комплекс Верли*, принимая во внимание комплекс, квазиизоморфный комплексу Хованова, существование последнего определяется теоремой 3.2.

Содержание

- 1 Основные определения
 - Скобка Кауфмана
 - Биградуированные комплексы
- 2 Гомологии Хованова
 - Комплекс Хованова
 - Инвариантность гомологий Хованова
- 3 Стягивающее дерево для многочлена Хованова
- 4 Гомологии Хованова и расширения Фробениуса
- 5 Минимальные диаграммы зацеплений
- 6 Упражнения

Теория Хованова для узлов не уникальна при рассмотрении того, что можно получить из скобки Кауфмана и (анти)коммутативного куба состояний. Настоящий раздел посвящен обобщению теории Хованова, использующей расширения Фробениуса.

Расширения Фробениуса

Пусть \mathcal{R}, \mathcal{A} — коммутативные кольца и пусть $\iota: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{A}$ вложение колец, такое что $\iota(1) = 1$. Функтор ограничения, переводящий \mathcal{A} -модули в \mathcal{R} -модули, имеет правый и левый сопряженные функторы: функтор индукции $\text{Ind}(M) = \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{R}} M$ и функтор коиндукции $\text{CoInd}(M) = \text{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{A}, M)$. Говорят, что ι — *Фробениусово отображение*, если функторы индукции и коиндукции совпадают. Эквивалентно, вложение ι *Фробениусово*, если функтор ограничения имеет двусторонний двойственный функтор. В этом случае также говорят, что кольцо \mathcal{A} является *Фробениусовым расширением* над \mathcal{R} с помощью отображения ι .

Имеет место следующее утверждение.

Утверждение 4.1 ([13])

Вложение ι является Фробениусовым, если существуют отображения \mathcal{A} -бимодулей $\Delta: \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{A}$ и отображения \mathcal{R} -модулей $\varepsilon: \mathcal{A} \mapsto \mathcal{R}$, такие что Δ — коассоциативное и кокоммутативное коумножение, а $(\varepsilon \otimes Id)\Delta = Id$.

Фробениусово расширение с заданными отображениями ε и Δ обозначается через $\mathcal{F} = (\mathcal{R}, \mathcal{A}, \varepsilon, \Delta)$ и называется *системой Фробениуса*, [13].

Расширения Фробениуса удобны для построения теории гомологий Хованова по следующим причинам. В модуле \mathcal{A} , определенном над кольцом \mathcal{R} , есть две естественные операции: умножение и коумножение, операция Δ .

Мы собираемся использовать эти операции для построения теории гомологий Хованова для зацеплений. Мы ограничимся только случаем коммутативных колец; более того, мы опустим оператор ε (этот оператор используется для определения инвариантов кобордизмов и доказательства функториальности). Далее мы следуем статье [8] Хованова.

Конструкция Хованова для расширений Фробениуса

Как было описано ранее, стандартная теория Хованова строится над некоторым произвольным кольцом \mathcal{R} (например, кольцом \mathbb{Z} или полем \mathbb{Q} , или полем \mathbb{Z}_p); здесь с гомологии тривиального узла представляют собой градуированный двумерный модуль \mathcal{A} над этим кольцом, с образующими v_+ и v_- , имеющими градуировки $+1$ и -1 соответственно.

Для этих элементов определены два отображения: умножение m и коумножение Δ . Если сдвинуть градуировки векторов, то можно установить $\deg v_+ = 0$, $\deg v_- = 2$. Тогда элемент v_+ можно рассматривать как единицу (обозначим его через 1 , а v_- обозначим через X), а определенные ранее умножение и коумножение превращают модуль \mathcal{A} в алгебру Хопфа над \mathcal{R} , в котором умножение определяется правилами $X^2 = 0$, и коумножение выглядит следующим образом: $\Delta(1) = 1 \otimes X + X \otimes 1$, $\Delta(X) = X \otimes X$. В [8] Хованов решил следующую задачу: найти условие для пары линейных пространств $(\mathcal{A}, \mathcal{R})$, чтобы получить теорию гомологии зацеплений, где \mathcal{R} — базовое кольцо коэффициентов, а \mathcal{A} (некоторая алгебра Хопфа над \mathcal{R}) — гомологии тривиального узла. Это означает, что мы рассматриваем куб состояний, с вершинами, которым сопоставлены тензорные степени \mathcal{A} (над \mathcal{R}), с показателем степени, равным количеству окружностей в данном состоянии, и определяем частные дифференциалы с помощью умножения и коумножения, а затем добавляем знаки на ребрах и нормализуем всю конструкцию путем сдвига градуировок.

Хованов показал, что инвариантность при первом движении Рейдемейстера требует, чтобы \mathcal{A} был двумерным как \mathcal{R} -модуль, и дал необходимые и достаточные условия для существования такой теории гомологий для зацеплений.

В той же статье [8] показано, что любая такая теория может быть получена с помощью некоторых операций (изменение базы, скручивание и двойственность) из следующего решения:

- 1 $\mathcal{R} = \mathbb{Z}[h, t]$,
- 2 $\mathcal{A} = \mathcal{R}[X]/(X^2 - hX - t)$,
- 3 $\deg X = 2, \deg h = 2, \deg t = 4$,
- 4 $\Delta(1) = 1 \otimes X + X \otimes 1 - h1 \otimes 1$,
- 5 $\Delta(X) = X \otimes X + t1 \otimes 1$.

Как мы видим, умножение в алгебре \mathcal{A} сохраняет градуировку, а коумножение повышает ее на два.

Мы опускаем нормализации, регулирующие эти градуировки.

Мы назовем эту конструкцию *универсальной $(\mathcal{R}, \mathcal{A})$ -конструкцией*. Соответствующие гомологии (классических ориентированных) зацеплений K будут обозначаться через $Kh_U(K)$.

М. Хованов доказал, что все остальные случаи вытекают из универсальной конструкции. Сначала он исследует расширения Фробениуса для инвариантности полученной теории гомологий при первом классическом движении Рейдемейстера Ω_1 . Это приводит его к двумерному \mathcal{A} как \mathcal{R} -модулю.

Позже М. Хованов рассматривает универсальную топологическую конструкцию Бар-Натана [4] и строит функтор из топологической категории Бар-Натана в категорию расширений Фробениуса второго ранга. Построенный функтор не является ни инъективным, ни сюръективным, но он обладает всеми нужными свойствами, необходимыми для инвариантности относительно движений Рейдемейстера.

Таким образом, М. Хованов показывает, что любое расширение Фробениуса второго ранга, как указано выше, определяет экстраординарную теорию гомологий зацеплений. Он показывает также, что любая такая теория без потери информации может быть сведена к универсальной теории, описанной выше.

Мы не будем вдаваться в подробности конструкций Хованова и Бар-Натана. Мы просто рассмотрим универсальную $(\mathcal{R}, \mathcal{A})$ -конструкцию.

Также обратите внимание, что М. Хованов также изучал функториальность своей новой теории гомологий, например, ее "хорошее поведение" при кобордизмах (проективная функториальность). С этой целью, помимо операций умножения и коумножительств, он также определил отображение единицы и коединицы и их трансформации; мы не будем касаться этой темы.

Содержание

- 1 Основные определения
 - Скобка Кауфмана
 - Биградуированные комплексы
- 2 Гомологии Хованова
 - Комплекс Хованова
 - Инвариантность гомологий Хованова
- 3 Стягивающее дерево для многочлена Хованова
- 4 Гомологии Хованова и расширения Фробениуса
- 5 Минимальные диаграммы зацеплений**
- 6 Упражнения

При классификации и составлении таблиц узлов важным шагом является описание диаграмм, имеющих минимальное количество пересечений. Одним из главных достижений в развитии теории узлов является теорема Кауфмана-Мурасуги-Тислтуэйта (теорема 5.1) и классификация альтернированных зацеплений по Менаско и Тислтуэйт [14], следующая из этой теоремы. (Эта теорема представлена в лекции 2.)

Теорема 5.1 (теорема Кауфмана-Мурасуги-Тислтуэйта)

Длина полинома Джонса зацепления со связной тенью меньше или равна числу перекрестков n . Равенство справедливо только для альтернированных диаграмм без точек распада и связанных сумм из них.

В этом разделе мы докажем теоремы, устанавливающие минимальность виртуальных и классических диаграмм, см. также [15, 16]. Неравенство $\text{span} \langle K \rangle \leq 4n + 2(\chi - 2)$ на виртуальной диаграмме K с n перекрестками и атомом с Эйлеровой характеристикой χ позволили доказать минимальность в тех случаях, когда Эйлерова характеристика не может быть увеличена. Если неравенство превращается в равенство, то для уменьшения числа пересечений мы должны увеличить эйлерову характеристику атома или, что то же самое, уменьшить его род. Оказывается, используя гомологии Хованова, можно получить оценки по роду атомов, а в некоторых случаях увидеть, что этот род нельзя уменьшить. В этом случае предыдущие аргументы вместе с минимальностью рода приводят к минимальности диаграммы.

Сначала мы упомянем теорему о стягивающем дереве для гомологий Хованова, независимо доказанную С.Верли [12] и А.Шампанеркаром и Дж.Кофманом [17].

Точнее, в [12] показано, что гомологии Хованова изоморфны гомологиям определенного комплекса. Пусть $\mathcal{V}_1(K)$ — множество состояний с одной окружностью диаграммы K .

Из этого следует обобщение теоремы 3.2.

Лемма 5.2

Ненулевые гомологии Хованова $Kh(K)$ могут иметь градуировки только вида $(C_1 + \beta - w, C_2 + \beta - 2w \pm 1)$, где w принадлежит некоторому конечному множеству, β принадлежит множеству значений $\beta(s)$ для всех состояний $s \in \mathcal{V}_1(K)$, а C_1, C_2 — некоторые константы.

Важным частным случаем этой леммы является утверждение о толщине гомологий Хованова (толщина была впервые введена Шумаковичем [Shu2, Shu3]).

Рассмотрим диаграмму зацепления K и ее гомологии Хованова над некоторым неградуированным кольцом R . Обозначим через t_{max} и t_{min} максимальные и минимальные значения $2x - y$ по всем парам x, y таким, что группа гомологий K с градуировкой (x, y) нетривиальна.

Определение 5.3

Толщиной $T_R(K)$ комплекс Хованова называется число $(t_{max} - t_{min})/2 + 1$.

Замечание 5.4

$T_R(K)$ — целое число для всех зацеплений.

Далее *диагональю* мы назовем набор пар целых чисел (x, y) , для которых число $2x - y$ является постоянным. Среди диагоналей есть крайняя левая и крайняя правая, при которых число $2x - y$ минимально и максимально соответственно. Таким образом, толщина измеряет количество диагоналей между двумя крайними диагоналями.

Определение 5.5

Толщиной (шириной) $T(K)$ диаграммы зацепления K назовем максимальную толщину $T_R(K)$ для всех колец R .

Из леммы 5.2 и определения атома следует.

Лемма 5.6

Для любой диаграммы K (со связанным атомом) зацепления имеем $T(K) \leq g(K) + 2$, где $g(K)$ - род атома, соответствующий K .

Определение 5.7

Назовем диаграмму зацепления K *2-полной*, если $T(K) = g(K) + 2$.

Действительно, для оценки числа диагоналей комплекса Верли (см. Теорему 3.2) нам необходимо оценить диапазон чисел $\beta(s)$ по всем состояниям $s \in \mathcal{V}_1(L)$. Легко видеть, что в случае диаграмм альтернированных зацеплений все эти числа равны друг другу (это приводит к наличию двух диагоналей t_{\max} и t_{\min} таких, что $t_{\max} = t_{\min} + 2$), в случае атомы с род одно число $\beta(s)$ может равняться $+1$, $+2$ для некоторого ; в случае атомов с Эйлеровой характеристикой χ они могут принимать значения в интервале от некоторого числа x до $x + (2 - \chi)$.

Получаем следующую теорему

Теорема 5.8

Пусть $T(K) = g + 2$, $\text{span} \langle K \rangle = s$. Тогда число перекрестков любой связной диаграммы, эквивалентной K , не может быть меньше $s/4 + g$.

В частности, если диаграмма с n перекрестками и атомом с родом g является 1-полной и 2-полной, то она минимальна.

Последнее утверждение означает, что все диаграммы, для которых выполняются два свойства “естественной нередуцируемости” (при разложении многочлена скобки Кауфмана начальные и младшие члены не равны нулю, а в комплексе Верли каждая из двух крайних диагоналей имеет по крайней мере один нетривиальный элемент гомологий Хованова), минимальны.








Содержание

- 1 Основные определения
 - Скобка Кауфмана
 - Биградуированные комплексы
- 2 Гомологии Хованова
 - Комплекс Хованова
 - Инвариантность гомологий Хованова
- 3 Стягивающее дерево для многочлена Хованова
- 4 Гомологии Хованова и расширения Фробениуса
- 5 Минимальные диаграммы зацеплений
- 6 Упражнения







Упражнения

- 1 Явно вычислить целочисленные гомологии Хованова для зацепления Хопфа.
- 2 Вычислить целочисленные гомологии Хованова для трилистника. Есть ли у них кручение?
- 3 Вычислить целочисленные гомологии Хованова для узла восьмерка.







Литература I

-  V. O. Manturov, Knot theory: Second edition CRC press 560 April 4, 2018.
-  K. Murasugi, Knot Theory and Its Applications, Springer.
-  Bar-Natan, D. (2002). On Khovanov's categorification of the Jones polynomial, *Algebr. Geom. Topol.* **2**(16), pp. 337–370.
-  Bar-Natan, D. (2005). Khovanov's homology for tangles and cobordisms, *Geom. Topol.*, **9**, pp. 1443–1499.
-  Garoufalidis, S. (2004), A conjecture on Khovanov's invariants, *Fund. Math.*, **184**, pp. 99–101.
-  D. Bar-Natan's homepage, <http://www.ma.huji.ac.il/~drorbn>
-  Khovanov, M. (1997), A categorification of the Jones polynomial, *Duke Math. J.*, **101**, pp.359–426.

Литература II

-  Khovanov, M. (2002), A functor-valued invariant of tangles, *Algebr. Geom. Topol.*, **2**, pp. 665–741.
-  Lee, E. S. (2002), The support of the Khovanov's invariants for alternating knots, arXiv: math.GT/ 0201105
-  Jacobsson, M. (2004), An invariant of link cobordisms from Khovanov's homology theory, *Algebr. Geom. Topol.*, **4**, pp. 1211–1251.
-  Viro, O. (2002), Remarks on definition of Khovanov Homology, arXiv: math. GT/0202199.
-  Wehrli, S. (2008), A spanning tree model for the Khovanov homology, *J. Knot Theory Ramifications* **17**(12), pp. 1561–1574.
-  Kadison, L. (1999). *New Examples of Frobenius Extensions*, *University Lecture Series*, **14**, American Mathematical Society, Providence, RI, 84 pp.

Литература III

-  Menasco, W. and Thistlethwaite, M. (1993), A classification of alternating links, *Annals of Mathematics*, **138**, pp. 113–171.
-  Jablan, S. and Sazdanovic, R. (2007). *LINKNOT. Knot Theory by Computer, Series on Knots and Everything*, **21**, World Scientific, 500 pp.
-  Manturov, V. O. (2006). The Khovanov complex and minimal knot diagrams, *Dokl. Math.*, **73**(1), pp. 46–48.
-  Champanerkar, A. and Kofman, I. (2006). Spanning trees and Khovanov homology, preprint, arXiv:math.GT/0607510.
-  Shumakovitch, A. (2004), Torsion of the Khovanov homology, preprint, arXiv:math.GT/0405474.
-  Shumakovitch, A. (2012), Khovanov homology theories and their applications, in: *Perspectives in Analysis, Geometry, and Topology, Progress in Mathematics*, **296**, pp. 403–430.