

Лекция 10. Квадрисеканты

С. Ким, В.О. Мантуров, И.М. Никонов

14 декабря 2021

Содержание

- 1 Определения
- 2 Существование квадрисекант
- 3 Индекс самозацепления

Содержание

- 1 Определения
- 2 Существование квадрисекант
- 3 Индекс самозацепления

Будем рассматривать узлы как вложения окружности в трехмерное пространство.

Определение 1.1

Определим n -секущую линию узла K как ориентированную прямую, пересекающую K ровно в n точках. n -секантой называется упорядоченный набор n точек на узле K (никакие две из них не лежат на одной прямолинейной дуге узла K), которые в заданном порядке лежат на n -секущей линии.

Будем называть 2-секанты просто *секантами*, 3-секанты *трисекантами*, а 4-секанты *квадрисекантами*.

Множество n -секант равно $S_n = K^n \setminus \tilde{\Delta}$, где $\tilde{\Delta}$ обозначает множество наборов из n точек, в которых некоторая пара точек задает отрезок, целиком лежащий в K .

Типы трисекант

Обозначим множество трисекант узла через $\mathcal{T} \subset K^3 \setminus \tilde{\Delta}$. У любой трисеканты abc может быть циклических порядка в зависимости от ориентации узла. Обозначим их наименьшим элементом в лексикографическом порядке: abc или acb , и назовем *прямым* и *обратным* порядком соответственно. Два типа трисекант изображены на рис. 1. Изменение ориентации узла на противоположное меняет тип трисеканты.

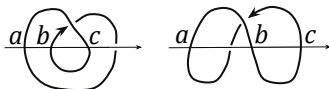


Рис. 1: Обратная (слева) и прямая (справа) трисеканты

Обозначим множество прямых трисекант через $\mathcal{T}^d$, а обратных трисекант — через $\mathcal{T}^r$. Ясно, что $\mathcal{T}^d \cap \mathcal{T}^r = \emptyset$. Изменение ориентации узла или секущей переставляет множества $\mathcal{T}^d$ и $\mathcal{T}^r$.

Типы квадрисекант

Точки квадрисеканты $abcd$ встречаются на узле K в некотором циклическом порядке. Имеется 3 различных порядка точек квадрисеканты на узле, если не учитывать ориентацию узла K . Каждый порядок задается лексикографически минимальным представителем (типом) $abcd$, $abdc$ или $acbd$.

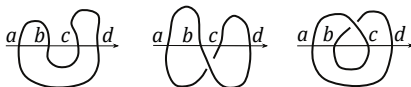


Рис. 2: Простая, перевернутая и альтернированная квадрисеканты

Определение 1.2

Квадрисеканты типов $acbd$, $abcd$ и $abdc$ называются *альтернированными*, *простыми* и *перевернутыми* квадрисекантами соответственно.

При рассмотрении квадрисекант $abcd$ мы будем, как правило, ориентировать узел K так, чтобы $b \in \gamma_{ad}$. Тогда циклический порядок точек на K будет $abcd$, $abdc$ или $acbd$ в зависимости от типа.

Существенные секанты

Определение 1.3

Пусть α , β и γ — три простые кривые с концами a и b , образующие заузленный Θ -граф, см. рис. 3. Пусть $X = \mathbb{R}^3 \setminus (\alpha \cup \gamma)$, и δ — кривая, параллельная $\alpha \cup \beta$ в X . (Под *параллельностью* мы понимаем, что $\alpha \cup \beta$ и δ ограничивают вложенное кольцо в X .) Мы считаем, что δ гомологически тривиально в X , т.е. индекс зацепления δ и $\alpha \cup \gamma$ равен нулю. Пусть $h = h(\alpha, \beta, \gamma) \in \pi_1(X)$ — (свободный) гомотопический класс кривой δ . Тогда назовем тройку (α, β, γ) *несущественной*, если класс h тривиален. В противном случае тройка (α, β, γ) называется *несущественной*.

Другими словами, ориентированная тройка (α, β, γ) *несущественная*, если существует диск D с краем $\alpha \cup \beta$, не имеющий внутренних пересечений с узлом $\alpha \cup \gamma$ (допускаются самопересечения диска D и внутренние его пересечения с β).

Существенные секанты

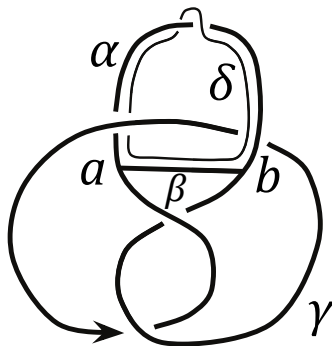


Рис. 3: В заузленном Θ -графе $\alpha \cup \beta \cup \gamma$, тройка (α, β, γ) является существенной. Чтобы это увидеть, рассмотрим кривую δ , параллельную $\alpha \cup \beta$ и имеющую нулевой индекс зацепления с $\alpha \cup \gamma$, и заметим, что она гомотопически нетривиальна в дополнении $\mathbb{R}^3 \setminus (\alpha \cup \gamma)$. На рисунке β — это отрезок $\overline{ab}$, так что можно сказать, что дуга $\alpha = \gamma_{ab}$ узла $\alpha \cup \gamma$ является существенной.

Существенные секанты

Пусть $a, b \in K$. Обозначим дугу узла от точки a до b (согласно ориентации узла) через γ_{ab} , и ее длину — через ℓ_{ab} . Секанту от a до b обозначим через $\overline{ab}$.

Определение 1.4

1. Пусть узел K нетривиален, $a, b \in K$ и $\ell = \overline{ab}$. Назовем дугу γ_{ab} *существенной*, если для любого $\epsilon > 0$ найдется ϵ -возмущение ℓ' отрезка ℓ (с теми же концами), такое что $K \cup \ell'$ образуют Θ -граф, для которого тройка $(\gamma_{ab}, \ell', \gamma_{ba})$ является существенной.
2. Секанта ab узла K называется *существенной*, если обе дуги γ_{ab} и γ_{ba} существенные. В противном случае секанта является *несущественной*. Обозначим множество существенных секант через $ES \subset S$.
3. Назовем n -секанту $a_1 a_2 \dots a_n$ *существенной*, если секанта $a_i a_{i+1}$ является существенной для каждого i , такого что на одной из дуг $\gamma_{a_i a_{i+1}}$ или $\gamma_{a_{i+1} a_i}$ нет других точек a_j .

Существование квадрисекант

Теорема (E. Pannwitz, 1933)

В каждом нетривиальном узле полигональном узле общего положения имеется не менее $2u^2$ квадрисекант, где u — число заузленности (unknotting number).

Теорема (G. Kuperberg, 1994)

У любого нетривиального гладкого узла есть существенная квадрисеканта.

Теорема (E. Denne, 2004)

У любого нетривиального гладкого узла есть хотя бы одна альтернированная квадрисеканта.

Теорема (A. Cruz-Cota and T. Ramirez-Rosas, 2015)

Пусть K — полигональный узел общего положения с n ребрами. Тогда K имеет не более $\frac{n}{12}(n-3)(n-4)(n-5)$ квадрисекант.

Содержание

- 1 Определения
- 2 Существование квадрисекант
- 3 Индекс самозацепления

Существование квадрисекант

Теорема 2.1 (Е. Denne, 2004)

У любого нетривиального узла есть хотя бы одна альтернированная квадрисеканта.

Замечание 2.2

Заметим, что квадрисеканта возникает, когда есть несколько трисекант с общими точками. Квадрисеканта $abcd$ содержит четыре трисеканты: $(1)abc$, $(2)abd$, $(3)acd$, $(4)bcd$. Панвиц [Pann] доказала существование квадрисеканты, рассматривая пары трисекант $(1)abc$ и $(3)acd$. Куперберг [Kur] доказал, что квадрисеканты существуют, используя пары трисекант $(2)abd$ и $(3)acd$. Шмитц [Schm] доказывал существование альтернативных трисекант, рассматривая семейства $(1)abc$ и $(2)abd$, однако в его доказательстве некоторые квадрисеканты могут вырождаться в трисеканту. Далее будет использован подход Шмитца.

Существование трисекант

Лемма 2.3 ([Pann])

Каждая точка нетривиального узла K является первой точкой некоторой трисеканты.

Доказательство.

Пусть точка $a \in K$ не является первой точкой никакой трисеканты. Тогда объединение отрезков $\overline{ab}$, $b \in K$, является диском с краем K . Если две хорды ab и ac пересекаются в точке, отличной от a , то одна из них лежит в другой. Тогда они образуют трисеканту (abc или acb), противоречие. Таким образом, диск является вложенным, а значит, узел K тривиален. □

Существование квадрисекант

Рассмотрим проекцию $\pi_{12} : K^3 \rightarrow K^2$, $\pi_{12}(xyz) = xy$, и пусть $T = \pi_{12}(\mathcal{T}) \subset S$ образ множества трисекант $\mathcal{T}$. Введем обозначения $T^d := \pi_{12}(\mathcal{T}^d)$ и $T^r := \pi_{12}(\mathcal{T}^r)$.

Лемма 2.4

Пусть $ab \in T^d \cap T^r$ в S . Это значит, что существуют точки c, d , такие что $abc \in \mathcal{T}^r$ и $abd \in \mathcal{T}^d$. Тогда либо $abcd$, либо $abdc$ — альтернированная квадрисеканта.

Таким образом, чтобы доказать существование альтернированной квадрисеканты, достаточно проверить, что $T^d \cap T^r \neq \emptyset$ in S . Для этого мы сначала рассмотрим полигональные узлы общего положения. Мы докажем существование альтернированной квадрисеканты для таких узлов, а затем, используя предельный переход, распространим результат на произвольные гладкие узлы.

Полигональный узел общего положения

Определение 2.5

Полигональный узел K в $\mathbb{R}^3$ называется *узлом в общем положении*, если выполняются следующие условия

- Никакие четыре вершины узла K не компланарны, никакие три вершины не коллинеарны.
- Для любых трех попарно скрещивающихся ребер узла K , не существует другого ребра K , лежащего в квадрике, порожденной этими ребрами.
- Не существует n -секант для $n \geq 5$.

Утверждение 2.6

Множество полигональных узлов в общем положении с n вершинами открыто и плотно в $\mathbb{R}^{3n}$.

Трисеканты в полигональном узле: смежные ребра

Пусть e_i и e_{i+1} — смежные ребра узла. Если некоторое ребро e_j узла пересекает определенную часть плоскости, порожденной e_i и e_{i+1} , возникает однопараметрическое семейство трисекант. Это семейство гомеоморфно $[0, 1]$ или $[0, 1)$ в зависимости от области, которую пересекает e_j (см. рис. 6). Квадрисеканта появляется, когда четвертое ребро пересекает одну из трисекант. По условию общего положения два несмежных ребра не могут быть компланарными, таким образом, в данном случае есть не более одной квадрисеканты.

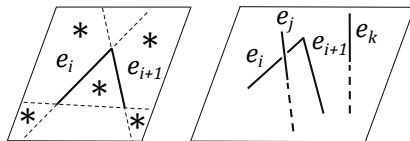


Рис. 4: Плоскость порождена ребрами e_i, e_{i+1} . Трисеканта, пересекающая ребра e_i, e_{i+1} существует, только если третье ребро пересекает одну из пяти областей, помеченных (*). Семейство трисекант, пересекающих e_i, e_{i+1}, e_j гомеоморфно $[0, 1]$; а семейство трисекант, пересекающих e_i, e_{i+1}, e_k гомеоморфно $[0, 1)$.

Трисеканты в полигональном узле: скрещивающиеся ребра

Тройка попарно скрещивающихся прямых l_1, l_2, l_3 задает единственную квадрику, линейчатую поверхность H (см. рис. 5). Это либо гиперболический параболоид (если три прямые параллельны одной плоскости), либо однополостный гиперболоид. На поверхности H есть два семейства прямолинейных образующих. Прямые l_1, l_2, l_3 принадлежат одному семейству образующих, а любая прямая, пересекающая их, принадлежит другому семейству. Таким образом, четвертая прямая l_4 , пересекающая H , дает одну или две прямые, пересекающие l_1, l_2, l_3 и l_4 .

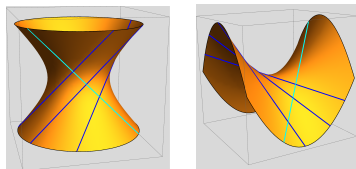


Рис. 5: Однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид

Множество трисекант

Утверждение 2.7

Пусть K — нетривиальный полигональный узел в общем положении. Тогда замыкание множества трисекант $\overline{T}$ — компактное одномерное многообразие с краем, вложенное в K^3 кусочно-гладко, так что $T \subset K^3 \setminus \tilde{\Delta}$ и $\partial T \subset \Delta$. Более того, каждая компонента T является либо простой замкнутой кривой, либо простой открытой дугой.

Утверждение 2.8

Пусть K — нетривиальный полигональный узел в общем положении. Тогда проекция π_{ij} ($1 \leq i < j \leq 3$) задает кусочно-гладкое погружение T в множество секант S , причем $T = \pi_{ij}(T)$ самопересекается только в трансверсальных двойных точках.

Рассмотрим замыкание множества секант S : $\overline{S} = (K^2 \setminus \tilde{\Delta}) \cup \tilde{\Delta}_+ \cup \tilde{\Delta}_-$, где $\tilde{\Delta}_- = \{(a, b) \in K^2 \mid \gamma_{ab} = \overline{ab}\}$ и $\tilde{\Delta}_+ = \{(a, b) \in K^2 \mid \gamma_{ba} = \overline{ba}\}$.

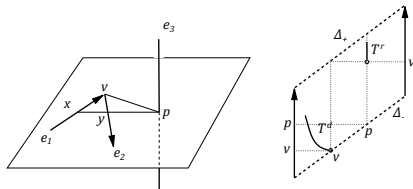


Рис. 6: Слева интервал смежных трисекант заканчивается вырожденной трисекантой uvr или pvv . Справа изображены соответствующие интервалы трисекант в S . Интервалы в T^d и T^r соответствуют трисекантам с порядком $e_1e_2e_3$ и $e_3e_2e_1$ соответственно.

Пусть K — нетривиальный полигональный узел в общем положении. Тогда $\overline{T}^r \cap \tilde{\Delta}_- = \emptyset$ and $\overline{T}^d \cap \tilde{\Delta}_+ = \emptyset$.

Определение 2.10

Пусть $ET = \pi_{12}(\mathcal{ET})$ — проекция множества существенных трисекант на множество секант S , аналогично определим $ET^d := \pi_{12}(\mathcal{ET}^d)$ и $ET^r := \pi_{12}(\mathcal{ET}^r)$.

Как и T , множество ET представляет собой погружение одномерного многообразия и может иметь только трансверсальные двойные точки.

Лемма 2.11

Пусть $ab \in ET^d \cap ET^r$ в S . Следовательно, найдутся c и d , такие что $abc \in \mathcal{ET}^r$ и $abd \in \mathcal{ET}^d$. Тогда $abcd$ или $abdc$ является существенной альтернированной квадрисекантой.

Определение 2.12

Замкнутая простая кривая $\alpha : [0, 1] \rightarrow S$ однократно *обходит* S , если ее класс гомотопии равен 1 в $\pi_1(S) \cong \mathbb{Z}$.

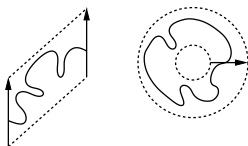


Рис. 7: Кривая, однократно обходящая множество S

Лемма 2.13 (Pannwitz)

Пусть K — нетривиальный полигональный узел в общем положении. Любая кривая, которая однократно обходит S , пересекается с множеством ET существенных трисекант.

Доказательство леммы 2.13

Сначала рассмотрим случай, когда кривая α не содержит трисекант. Пусть $\alpha = (x(s), y(s))$ — параметризация кривой. Построим лучи $\overrightarrow{xu} \setminus \overline{xu}$, см. рис. 22.

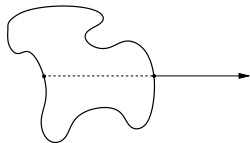


Рис. 8: Пример луча $\overrightarrow{xu} \setminus \overline{xu}$.

Объединение лучей вместе с точкой ∞ образует диск D , краем которого является узел K . Тогда по лемме Дена есть вложенный диск с краем K . Следовательно, узел K тривиален. Противоречие. Рассмотрим теперь общий случай. Можно считать, что пересечение $\alpha \cap T$ конечно.

Доказательство леммы 2.13

Для любой несущественной трисеканты на α с помощью перестройки можно убрать пересечение затягивающего диска D с узлом K , как показано на рис. 9.

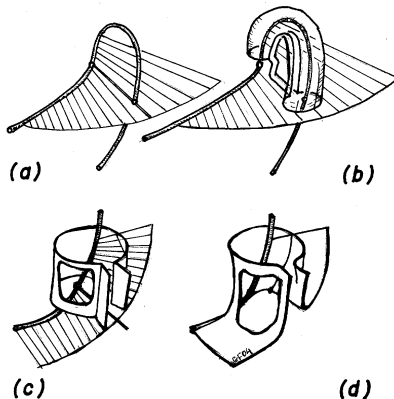


Рис. 9: Перестройка диска для несущественной трисеканты

Пусть A и B — замкнутые подмножества в кольце S , такие что A не пересекается с Δ_+ , а B не пересекается с Δ_- . Если $A \cap B = \emptyset$, то найдется кривая, однократно обходящая S и не пересекающаяся с $A \cup B$.

Рассмотрим последовательность Майера–Вьеториса:

$$\cdots \rightarrow H_1(S \setminus (A \cup B)) \xrightarrow{f} H_1(S \setminus A) \oplus H_1(S \setminus B) \xrightarrow{g} H_1(S) \rightarrow \cdots$$

и элемент $\beta = ([\Delta_+], [\Delta_-])$. Тогда $g(\beta) = [\partial S] = 0$. Следовательно, $\beta = f(\alpha)$, $\alpha \in H_1(S \setminus (A \cup B))$. Представитель класса α является требуемой кривой.

Теорема 2.15

Любой нетривиальный полигональный узел в общем положении в $\mathbb{R}^3$ имеет существенную альтернированную квадрисеканту.

Доказательство.

Предположим, что $ET^s \cap ET^d = \emptyset$ в S . Согласно утверждению 2.14 есть путь, однократно обходящий S и не пересекающийся с $ET = ET^s \cup ET^d$. Это противоречит лемме 2.13. Следовательно, $ET^s \cap ET^d \neq \emptyset$. По лемме 2.11 тогда есть по меньшей мере одна существенная альтернированная квадрисеканта. □

Следствие 2.16

Любой гладкий нетривиальный узел в $\mathbb{R}^3$ имеет существенную альтернированную квадрисеканту.

Полная кривизна кривой

Теорема 2.17

Нетривиальный узел в $\mathbb{R}^3$ имеет полную кривизну строго большую, чем 4π .

Доказательство.

У узла K есть альтернированная квадрисеканта. Альтернированная квадрисеканта — это вписанный в K четырехугольник с полной кривизной 4π . Заметим, что добавление вершин ко вписанной в K ломаной не уменьшает полную кривизну ломаной и увеличивает кривизну, если добавляемая вершина не лежит в одной из плоскостей натянутой на другие вершины ломаной. Таким образом, полная кривизна нетривиального узла строго больше, чем 4π . $\square$

2-оболочка

Определение 2.18

Пусть K — замкнутая кривая в $\mathbb{R}^3$. Назовем n -оболочкой $h_n(K)$ узла K множество точек $p \in \mathbb{R}^3$, такое что K пересекает каждую плоскость P , проходящую через p , не менее $2n$ раз.

Теорема 2.19

Нетривиальный узел имеет непустую 2-оболочку.

Доказательство.

Мы знаем, что у узла K есть альтернированная существенная квадрисеканта $abcd$. Тогда любая точка t отрезка $\overline{bc}$ лежит в 2-оболочке узла K . □

Содержание

- 1 Определения
- 2 Существование квадрисекант
- 3 Индекс самозацепления

Далее мы будем рассматривать длинные узлы, т.е. вложения f отрезка $\mathbb{I} = [0, 1]$ в куб $\mathbb{I}^3$ с фиксированными концами и касательными в конечных точках. Пространство вложений обозначим через $\text{Emb}(\mathbb{I}, \mathbb{I}^3)$.

Для любого длинного узла f рассмотрим подмногообразие $\text{Co}_i(f)$ в $\text{Int}(\Delta^3)$, состоящее из троек $t_1 < t_2 < t_3$, таких что $f(t_1)$, $f(t_2)$ и $f(t_3)$ коллинеарны и $f(t_i)$ лежит на прямой между двумя другими точками, см. рис. 10.

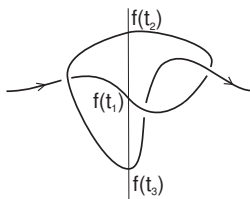


Рис. 10: Коллинеарные точки на узле, задающие точку подмногообразия $\text{Co}_1(f)$.

Индекс самозацепления

Утверждение 3.1

Для любого длинного узла с параметризацией $f \in \text{Emb}(\mathbb{I}, \mathbb{I}^3)$ общего положения замыкание $\text{Co}_i[f]$ множества $\text{Co}_i(f)$ является одномерным подмногообразием в Δ^3 . При этом край многообразия $\text{Co}_1[f]$ лежит в гранях $\Delta^3_{(1=2)} = \{t_1 = t_2\}$ и $\Delta^3_{(3=4)} = \{t_3 = 1\}$, а край многообразия $\text{Co}_3[f]$ лежит в гранях $\Delta^3_{(0=1)} = \{t_1 = 0\}$ и $\Delta^3_{(2=3)} = \{t_2 = t_3\}$.

Определение 3.2

Определим замыкание многообразия с краем $\text{Co}_1[f]$ как произвольное кусочно-гладкое 1-многообразие $\overline{\text{Co}_1[f]}$, такое что $\overline{\text{Co}_1[f]} \cap \text{Int}(\Delta^3) = \text{Co}_1(f)$ и $\overline{\text{Co}_1[f]} \cap \partial(\Delta^3) \subset \Delta^3_{(1=2)} \cup \Delta^3_{(3=4)}$. Замыкание $\overline{\text{Co}_3[f]}$ определяется аналогично.

Определение 3.3

Для длинного узла $\mathcal{K}$ с параметризацией $f \in \text{Emb}(\mathbb{I}, \mathbb{I}^3)$ определим инвариант самозацепленности как $\nu_2(\mathcal{K}) = lk(\overline{\text{Co}_1[f]}, \overline{\text{Co}_3[f]}) \in \mathbb{Z}$.

Индекс самозацепления ν_2 является инвариантом длинных узлов.

Так как множества $\Delta_{(1=2)}^3 \cup \Delta_{(3=4)}^3$ и $\Delta_{(0=1)}^3 \cup \Delta_{(2=3)}^3$ стягиваемы и не имеют общих внутренних точек, то $\nu_2(\mathcal{K})$ не зависит от выбора замыканий $\overline{\text{Co}_1[f]}$ и $\overline{\text{Co}_3[f]}$.

Гомотопия общего положения между двумя параметризациями f и g узла $\mathcal{K}$ задает ориентированный кобордизм между подмногообразиями $\text{Co}_i[f]$ и $\text{Co}_i[g]$. Следовательно, $lk(\overline{\text{Co}_1[f]}, \overline{\text{Co}_3[f]}) = lk(\overline{\text{Co}_1[g]}, \overline{\text{Co}_3[g]})$. □

Пример

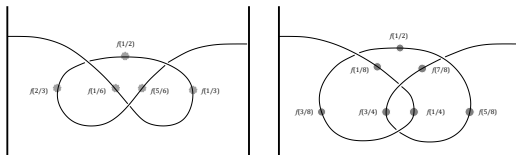


Рис. 11: Узлы трилистник и восьмерка. Проекция выполнена на плоскость (x_1, x_2) . Отмечены точки с координатой $x_3 = 0$. На дугах между отмеченными точками координата x_3 имеет ровно один локальный максимум или минимум.

Пример. Вырожденные трисеканты

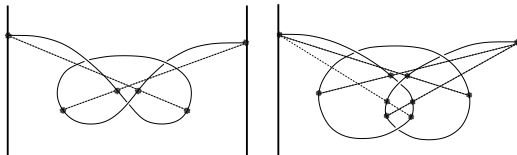


Рис. 12: Граничные трисеканты

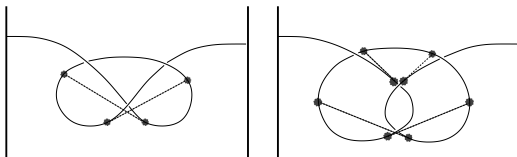


Рис. 13: Касательные трисеканты

Пример. Квадрисеканты

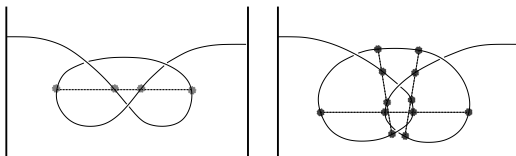


Рис. 14: Квадрисеканты узлов

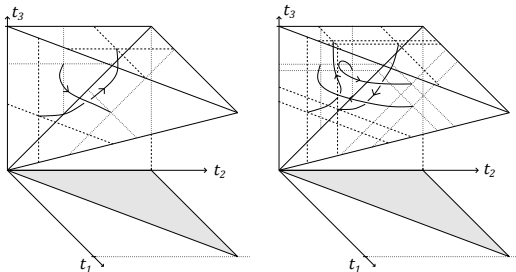


Рис. 15: Множества трисекант узлов

Чтобы найти индекс зацепления ν_2 , достаточно посчитать точки пересечения плоских проекций многообразий $Co_i[f]$. Оказывается полезной следующая лемма.

Лемма 3.5

Пусть $\rho: \Delta^3 \rightarrow \Delta^2$ — ортогональная проекция вдоль оси t_1 , и пусть f — параметризация узла $\mathcal{K}$. Пересечение проекций $Co_1[f]$ и $Co_3[f]$ относительно ρ соответствуют квадрисекантам узла $\mathcal{K}$.

Доказательство.

Пересечение $Co_3[f]$ и $Co_1[f]$ соответствует тройке точек $f(t_1^*), f(t_2^*), f(t_3^*)$, лежащей на прямой L^* , и тройке $f(t_1'), f(t_2'), f(t_3')$ на прямой L' , где $t_2^* = t_2'$ и $t_3^* = t_3'$. Тогда $L^* = L'$, а значит, точки $f(t_1'), f(t_1^*), f(t_2')$ и $f(t_3')$ коллинеарны. □

Теорема 3.6

Значение инварианта ν_2 для трилистника равно $+1$, а для узла восьмерка $\nu_2 = -1 - 1 + 1 = -1$.

Пространство $C_4(\mathbb{I}^3)$, состоящее из коллинеарных конфигураций четырех точек, имеет двенадцать компонент. Если (x_1, x_2, x_3, x_4) — квадрисеканта, ориентируем прямую от x_1 к x_2 . Выбор ориентации задает перестановку чисел $\{1, 2, 3, 4\}$: $\sigma(i) = j$, если i -я точка на прямой — это x_j . В силу выбора ориентации $\sigma(2) > \sigma(1)$, что дает двенадцать перестановок.

Определение 3.7

Пусть $\mathcal{C}_4$ обозначает подмножество в $C_4(\mathbb{R}^3)$ коллинеарных конфигураций, соответствующих 4-циклу (1342). Пусть длинный узел $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{I}^3$ параметризован отображением $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}^3$. Каждой четверке $x = (f(t_1), f(t_2), f(t_3), f(t_4)) \in \mathcal{C}_4$ сопоставим знак ϵ_x , равный знаку определителя матрицы размера 2×2 :

$$\begin{bmatrix} |f(t_3) - f(t_2)| \cdot \det[v, f'(t_1), f'(t_3)] & |f(t_3) - f(t_1)| \cdot \det[v, f'(t_2), f'(t_3)] \\ |f(t_4) - f(t_2)| \cdot \det[v, f'(t_4), f'(t_1)] & |f(t_4) - f(t_1)| \cdot \det[v, f'(t_2), f'(t_4)] \end{bmatrix}$$

где $v = f(t_2) - f(t_1)$.

Используя обозначение для знаков, мы можем переформулировать определение индекса самозацепленности следующим образом.

Утверждение 3.8

Пусть $\mathcal{K} = im(f)$ — длинный узел общего положения в $\mathbb{I}^3$. Тогда

$$\nu_2(\mathcal{K}) = \sum_{x \in \mathcal{C}_4(\mathcal{K}) \cap \mathcal{C}_4} \epsilon_x$$

Доказательство.

Индекс зацепления $\nu_2(\mathcal{K}) = lk(\overline{Co_1[f]}, \overline{Co_3[f]})$ равен сумме знаков перекрестков проекций $\rho(Co_1[f])$ и $\rho(Co_3[f])$, в которых $\rho(Co_3[f])$ является переходом. По лемме 3.5 эти перекрестки взаимно-однозначно соответствуют квадрисекантам типа (1342). Проверка, что знак перекрестка совпадает с ϵ_x , производится непосредственно. □

Теорема 3.9

Индекс самозацепления ν_2 является инвариантом Васильева порядка два.

Доказательство.

Покажем, что третья производная инварианта равна нулю, то есть что для любого узла $\mathcal{K}$ и набора из трех замен перекрестков c_1, c_2, c_3 равна нулю сумма:

$$\sum_{\sigma \subset [3]} (-1)^{|\sigma|} \nu_2(\mathcal{K}_\sigma) = 0, \quad (1)$$

где $[3] = \{1, 2, 3\}$ и $\mathcal{K}_\sigma$ обозначает узел, который получается из $\mathcal{K}$ заменой перекрестков c_i , где $i \in \sigma$. Можно считать, что замена перекрестков производится в шаре B_i , $1 \leq i \leq 3$, и что эти три шара не коллинеарны, то есть никакая прямая не пересекает всех трех шаров.

Тогда любая квадрисеканта l на одном из восьми узлов $\mathcal{K}_\sigma$ не пересекается с одним из шаров, скажем B_3 . Тогда l будет квадрисекантой узла $\mathcal{K}_\tau$, где $\tau = \sigma \triangle \{3\}$. Следовательно, вклад квадрисеканты l в общую сумму будет нулевым.



Следствие 3.10

Индекс самозацепления $\nu_2(K)$ совпадает с коэффициентом $c_2(K)$ при степени два в полиноме Александера–Конвея.

Доказательство.

Как было показано в предыдущих лекциях, коэффициент c_2 является инвариантом Васильева порядка два. Инвариант порядка два однозначно определяется своими значениями на тривиальном узле и на трилистнике. Для тривиального узла имеем $\nu_2 = c_2 = 0$, а для трилистника $\nu_2 = c_2 = 1$. Таким образом, инварианты совпадают. $\square$

Литература I

-  R. Budney, J. Conant, K. Scannell, D. Sinha, New perspectives on self-linking, *Adv. Math.* **191**:1 (2005) 78–113.
-  E.J. Denne, Alternating quadrisecants of knots, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2004, Thesis (Ph.D.)–University of Illinois at Urbana-Champaign.
-  G. Kuperberg. *Quadrisecants of knots and links*. J. Knot Theory Ramifications **3** (1994) no. 1, 41–50
-  E. Pannwitz. *Eine elementargeometrische Eigenschaft von Verschlingungen und Knoten*. Math. Annalen **108** (1933), 629–672
-  C. Schmitz. *The theorem of Fáry and Milnor for Hadamard manifolds*. Geom. Dedicata **77** (1998) no. 1, 83–90