Приложение
Некоторые нерешенные задачи

В данном разделе собрано несколько нерешенных задач об экстремальных сетях. Эти задачи были сформулированы авторами в разное время и, по-видимому, разнятся по сложности. Однако все эти задачи, на наш взгляд, представляют интерес для теории экстремальных сетей. Многие из них касаются локально минимальных сетей. Для удобства мы разбили эти задачи на несколько тем.

Локально минимальные сети на плоскости и в пространстве

Задача 1. Существует ли "универсальное" подмножество плоскости, на котором любое бинарное дерево (с соответствующим числом вершин степени 1) имело бы минимальную реализацию? Более общо: существует ли "универсальное" подмножество плоскости, на котором бы любое дерево Штейнера (с соответствующим числом вершин степени 1 и 2) имело бы минимальную реализацию?

Замечание. Имеется два варианта этой задачи: (1) мы ищем минимальную реализацию данного дерева, не принимая во внимание граничное отображение; в этом случае множество называется "универсальным", если каждое рассматриваемое дерево имеет на нем минимальную реализацию для *некоторого* граничного отображения; или (2) мы учитываем все граничные отображения; в этом случае множество называется "универсальным", если каждое рассматриваемое дерево имеет на нем минимальную реализацию для *каждого* граничного отображения. Недавно Г. А. Карпунин показал, что множество вершин правильного n-мерного симплекса в $\mathbb{R}^{n+1}$ является "универсальным" множеством во втором, более сильном смысле для бинарных деревьев, имеющих $(n+1)$ вершину степени 1 (см. [98]).

Задача 2. Верна ли теорема о минимальной реализации любого плоского графа Штейнера, у которого индекс каждого фундаментального цикла равен 6 (см. задачу 3.)

Задача 3. Пусть задан плоский граф G. Рассмотрим произвольную его вершину V, и пусть $e_0, \ldots, e_{k-1}$ — ребра графа G, инцидентные вершине V, занумерованные последовательно в соответствии с обходом вокруг этой вершины против часовой стрелки. Как обычно, будем считать, что индексы складываются по модулю k. Припишем каждой упорядоченной паре e_i, e_{i+1} последовательных ребер число α_i. Назовем α_i ***априорным углом между ребрами*** e_i и e_{i+1} в вершине V. Пусть заданы априорные углы между любыми смежными ребрами графа G. Найти необходимое и достаточное условие того, что существует планарно эквивалентный графу G линейный граф $\tilde{G}$, такой, что угол между любыми его смежными ребрами равен априорному углу между соответствующими ребрами исходного графа G.

Замечание. Напомним, во-первых, что каждый плоский граф планарно эквивалентен линейному плоскому графу (теорема Вагнера–Фари). Во-вторых, ясно, что априорные углы не могут быть любыми. По крайней мере, необходимыми являются следующие условия:

- для каждой вершины графа V степени больше 1 сумма всех априорных углов в этой вершине равна 2π;
- для каждого фундаментального цикла графа G из k ребер сумма априорных углов между последовательными парами ребер этого цикла при обходе его против часовой стрелки равна $\pi(k-2)$.

Однако несложно построить пример (достаточно рассмотреть триангуляцию из четырех треугольников), когда этих двух условий недостаточно. С другой стороны, легко показать, что если все циклы графа G попарно не пересекаются, то этих двух условий достаточно.

Отметим, что задача 2 — это частный случай задачи 3.

Задача 4. Обобщить теорему классификации локально минимальных бинарных деревьев с выпуклой границей на случай произвольных деревьев Штейнера.

Замечание. Ясно, что каждая невырожденная компонента локально минимальной сети Штейнера с выпуклой границей представляет собой локально минимальное бинарное дерево с выпуклой границей и, поэтому, описывается теоремами 5.4 и 5.5 главы 5. Поэтому для решения задачи 4 необходимо описать, как невырожденные компоненты могут стыковаться между собой.

Задача 5. Обобщить теорему классификации локально минимальных невырожденных сетей Штейнера (см. главу 5) с выпуклой границей на случай произвольных сетей Штейнера.

Задача 6. Получить полную классификацию локально минимальных бинарных деревьев с правильной границей. (См. теорему 5.7 и комментарии к теореме 5.8 главы 5.)

Задача 7. Как один из шагов в решении общей задачи 6, выяснить, верно ли, что если бинарное дерево имеет правильную минимальную реализацию, то оно (более точно, соответствующий паркет) содержит не более одного узла ветвления?

Задача 8. Имеет ли место следующая теорема реализации для плоских невырожденных локально минимальных сетей с выпуклой границей: плоская тривиальная сеть с числом вращения, не превосходящим пяти, имеет выпуклую минимальную реализацию.

Задача 9. Пусть плоское бинарное дерево Γ имеет число вращения, не превосходящее $12(k-1)+5$. Верно ли, что Γ имеет минимальную реализацию на граничном множестве, число уровней выпуклости которого не превосходит k?

Задача 10. Обобщить на случай невырожденных сетей Штейнера теорему из главы 5 о связи числа вращения минимальной сети и количества уровней выпуклости граничного множества. (Нужно так естественно определить аналог числа вращения в общем случае, чтобы полученная оценка была точной.)

Задача 11. Описать пространственные локально минимальные бинарные деревья с выпуклой границей. (См. задачу 17.)

Задача 12. Вычислить размерности пространства (взвешенных) минимальных сетей данного типа с фиксированной границей в $\mathbb{R}^n$, $n>2$, в топологических или/и геометрических терминах.

Замечание. Как было отмечено в главе 4, в случае размерности 3 и выше цикломатического числа параметризующего графа недостаточно.

Задача 13. Описать структуру граней многогранника всех (взвешенных) минимальных сетей данного типа с фиксированной границей.

Задача 14. Описать локально минимальные бинарные деревья, множество граничных вершин которых лежит на границе некоторого прямоугольника.

Задача 15. Описать локально минимальные бинарные деревья, множество граничных вершин которых лежит на некоторой окружности.

Задача 16. Описать локально минимальные бинарные деревья, множество граничных вершин которых лежит на некоторой кривой с заданными ограничениями на кривизну (для начала — на выпуклой кривой).

Замечание. Рубинштейн и его коллеги анонсировали существование полиномиального алгоритма поиска абсолютно минимального дерева Штейнера при условии, что граничные вершины расположены на заданной кривой.

Линейные сети

Задача 17. Какими свойствами обладают пространственные ломаные с выпуклым множеством вершин? Описать пространственные ломаные, для которых существуют позвенно параллельные ломаные, множество вершин которых выпукло (см. задачу 18).

Замечание. Для случая плоскости эта задача решена Н. С. Гусевым (см. главу 4 и [58]).

Задача 18. Описать плоские линейные деревья, для каждого из которых существует пореберно параллельное линейное дерево, геометрическая граница которого имеет заданное количество уровней выпуклости.

Задача 19. Обобщить теорему о связи числа вращения линейного дерева и количестве уровней выпуклости его геометрической границы на случай линейных сетей общего вида, т.е. сетей с циклами. (Нужно так естественно определить аналог числа вращения в общем случае, чтобы полученная оценка была точной.)

Задача 20. Вычислить (оценить) ранг характеристической системы линейной сети (или, что то же самое (см. главу 3) размерность пространства линейных сетей, параллельных данной и с данной границей) в геометрических или/и топологических терминах.

Задача 21. Найти критерий того, что многогранное множество всех линейных сетей, параллельных данной и с данной границей, ограничено.

Задача 22. Описать структуру граней многогранного множества всех линейных сетей, параллельных данной и с данной границей.

Взвешенные минимальные сети

Задача 23. Обобщить алгоритм Хванга на случай плоских взвешенных бинарных деревьев.

Замечание. Несложно убедиться, что для построения взвешенных локально минимальных бинарных деревьев алгоритм Хванга “в чистом виде” не подходит.

Задача 24. При каких условиях на веса взвешенного бинарного дерева применим алгоритм Хванга?

Задача 25. Пусть на торе фиксирована плоская метрика и пусть задана матрица $g \in M_2^+(\mathbb{Z})$. Как было показано в главе 5.2, на этом плоском торе может и не существовать замкнутой локально минимальной сети типа g. Можно ли так задать веса на ребрах параметризующего графа сети типа g, чтобы на данном плоском торе существовала взвешенная локально минимальная сеть типа g?

Задача 26. Та же задача, что и 25, для плоской бутылки Клейна, для квазирегулярного тетраэдра.

Задача 27. Описать взвешенные графы Штейнера без вершин степени 1 и 2 (регулярные 3-графы), которые могут быть реализованы как замкнутые взвешенные минимальные сети на плоских поверхностях, на поверхностях отрицательной кривизны, на поверхности квазирегулярного тетраэдра.

Задача 28. Описать взвешенные графы, которые могут быть реализованы как замкнутые взвешенные минимальные сети на плоских поверхностях, на поверхностях отрицательной кривизны, на поверхности квазирегулярного тетраэдра.

Задача 29. Понятие паркета, соответствующего плоскому бинарному дереву, можно легко обобщить на случай взвешенных бинарных деревьев с положительной весовой функцией, удовлетворяющей строгому правилу треугольника. Напомним, что каждому плоскому бинарному дереву соответствует плоская триангуляция. Пусть Γ — плоское взвешенное бинарное дерево. Поставим ему в соответствие триангуляцию, длины сторон которой равны весам соответствующих ребер дерева Γ. Проверить, верен ли для таких *взвешенных паркетов* аналог теоремы о паркетной реализации (см. теорему 5.3 главы 5): *если число вращения взвешенного бинарного дерева строго меньше шести, то это бинарное дерево планарно эквивалентно двойственной сети некоторого взвешенного паркета с теми же весами.*

Задача 30. Продолжение задачи 29. Описать взвешенные деревянные паркеты с числом вращения, меньшим шести.

Замечание. По-видимому, в такой общей постановке не удастся получить эффективное описание в терминах узлов ветвления, линейных участков и наростов. Например, в этом случае встречается бесконечное число типов узлов ветвления. Поэтому естественно возникает следующий вопрос: при каких ограничениях на возможные веса можно получить "конечную классификацию"? Например, если соответствующие паркеты являются подпаркетами в аффинном образе стандартного паркета плоскости, то, по-видимому, ответ вообще не изменится. Другой вариант — рассмотреть взвешенные бинарные деревья с заранее заданным конечным набором значений весов (т.е. конечным набором типов возможных треугольников соответствующих паркетов).

Задача 31. Продолжение задачи 29. Обобщить на случай взвешенных бинарных деревьев теорему реализации (см. теорему 5.6 главы 5).

Задача 32. Продолжение задачи 29. Обобщим понятие тривиальной сети Штейнера из главы 5 так. Назовем плоскую невырожденную сеть Штейнера *тривиальной*, если каждый ее фундаментальный цикл не содержит внутренних вершин. Пусть Γ — взвешенная тривиальная сеть. Назовем сеть Γ *правильной*, если для каждого ее фундаментального цикла определенное с помощью весов кручение, при обходе цикла против часовой стрелки, равно 2π. Проверить, верно ли, что для правильной сети число вращения между ее граничными ребрами не зависит от выбора пути, соединяющего эти ребра.

Задача 33. Продолжение задачи 32. Если результат, сформулированный в задаче 32, верен, то можно естественным образом определить число вращения правильной сети. Проверить, верен ли следующий результат: если число вращения правильной сети меньше 6, то эта сеть планарно эквивалентна двойственной сети некоторого взвешенного паркета (с соответствующими весами). Интересно также рассмотреть случай числа вращения, равного 6 (по-видимому, в этом случае препятствия к существованию паркетной реализации могут быть естественным образом сформулированы).

Задача 34. Продолжение задачи 32. Описать взвешенные паркеты, соответствующие правильным сетям, с числом вращения, меньшим шести (см. замечание после задачи 30).

Локально минимальные сети и минимальные остовные деревья

Задача 35. Какими свойствами должно обладать минимальное остовное дерево Γ, чтобы градиентный спуск (в классе сетей–следов), начав с Γ, приводил бы к абсолютно минимальному дереву?

Замечание. Минимальное остовное дерево из задачи 35 существует не для каждого граничного множества (постройте пример).

Задача 36. Описать локальную структуру минимальных остовных деревьев на плоскости и в пространстве. То же на римановом многообразии. То же для случая пространства Банаха–Минковского, см. [11].

Задача 37. Описать локальную структуру так называемых минимальных k-деревьев Штейнера, т.е. минимальных деревьев с не более чем k

дополнительными вершинами (k-Steiner minimal trees, см. [11]) на плоскости и в пространстве.

Задача 38. Назовем локально минимальное дерево Γ *сильно минимальным*, если оно совпадает с минимальным остовным деревом, натянутым на множество всех вершин дерева Γ. Описать сильно минимальные деревья.

Локально минимальные сети на поверхностях

Задача 39. Получить классификацию замкнутых минимальных сетей на замкнутых поверхностях постоянной отрицательной кривизны. Рассмотреть для начала случай рода 2.

Задача 40. Хорошо известно, что каждая двумерная поверхность M_g^2 рода $g > 1$ постоянной отрицательной кривизны может быть склеена из $4g$-угольника на плоскости Лобачевского. Дать естественное *геометрическое* описание всех метрик постоянной отрицательной кривизны на поверхности M_g^2 в терминах таких $4g$-угольников. Другими словами, дать естественное геометрическое описание пространств Тейхмюллера (если это возможно).

Задача 41. Изучить бифуркации замкнутых локально минимальных сетей на поверхностях при изменении метрики поверхности в классе метрик постоянной кривизны. Интересен уже случай плоских торов и плоских бутылок Клейна. Особенно интересен, конечно, случай поверхностей отрицательной кривизны. Здесь было бы интересно рассмотреть хотя бы один пример (для этого было бы полезно решить задачу 40).

Замечание. Отметим, что для случая плоских поверхностей в главе 5.2 построены так называемые области минимальности, описывающие все плоские поверхности, на которых имеется замкнутая минимальная сеть фиксированного типа. Это позволяет вычислять момент бифуркации при указанном изменении метрики. Таким образом, остается описать перестройку типа сети.

Задача 42. В разделе 5.2 показано, что на каждой плоской поверхности существует бесконечно много топологически различных замкнутых минимальных сетей. У некоторых из них матрицы типов отличаются на множитель. Получить “проективную” классификацию замкнутых локально минимальных сетей на замкнутых плоских поверхностях, т.е. описать типы замкнутых локально минимальных сетей на этих поверхностях с точностью до множителя. В частности, проверить, верно ли, что на каждой замкнутой плоской поверхности лишь конечное число “проективных типов” имеет минимальную реализацию.

Многогранники

Задача 43. Завершить классификацию замкнутых вложенных геодезических на платоновых телах (случай куба и тетраэдра разобран Т. В. Павлюкевич).

Задача 44. Завершить классификацию замкнутых локально минимальных сетей на платоновых телах (случай тетраэдра полностью разобран, см. главу 5, много информации о кубе и додекаэдре, см. [3]).

Задача 45. Описать многогранники, допускающие разветвленное накрытие тором с дырками. Гипотеза: если имеется замкнутая минимальная сеть, отличная от замкнутой геодезической, то такие накрытия существуют.

Задача 46. Распространить развитую в книге технику на случай неориентируемых многогранников.

Задача 47. Сформулировать и доказать теорему Гаусса–Бонне для случая несферических многогранников.

Задача 48. Существует ли многогранник, на котором есть вложенные замкнутые геодезические, а вложенных замкнутых минимальных сетей нет?

Задача 49. На любом ли многограннике существует взвешенная замкнутая минимальная сеть?

Минимальные сети с частично свободной границей

Задача 50. Построить теорию минимальных сетей с частично свободной границей, т.е. описать глобальное устройство таких сетей. (Локальная структура таких сетей может быть легко описана.)

Теория индекса минимальных сетей

Задача 51. Обобщить аналог теоремы Морса об индексе, полученный М. Прониным для случая минимальных деревьев (см. главу 5) на случай сетей с циклами.

Замечание. Для этого нужно понять, как правильно определить исчерпание сетей с циклами.

Задача 52. Получить аналог неравенств Морса для случая минимальных сетей. (Г. Карпуниным заложены основы соответствующей теории, доказано равенство Морса, см. главу 5.)

Задача 53. Обобщить результаты Г. Карпунина (см. главу 5) на случай произвольных римановых многообразий.

Задача 54. Вычислить (оценить) количество локально минимальных сетей (локально минимальных деревьев, локально минимальных бинарных деревьев), затягивающих граничное множество, состоящее из заданного числа вершин.

Задача 55. Изучить бифуркации минимальных сетей при деформации граничного множества.

Экстремальные сети в нормированных пространствах

Задача 56. Описать экстремальные кривые на многообразиях с нормой. В качестве примера рассмотреть левоинвариантные нормы на группах Ли.

Задача 57. Описать локальную структуру экстремальных параметрических сетей и сетей–следов на многообразиях с нормой. В качестве первого примера можно рассмотреть левоинвариантные нормы на группах Ли.

Задача 58. Получить критерий экстремальности замкнутой сети на двумерном торе (аналогично, двумерной бутылке Клейна), снабженном манхеттенской нормой.

Локально минимальные сети в смысле функционала манхеттенской длины

Задача 59. Верно ли, что сети, локально минимальные (экстремальные) по отношению к функционалу манхеттенской длины, являются устойчивыми по отношению к малым деформациям граничного множества (при разумных предположениях об общем положении границы)?

Задача 60. Обобщить теорему об устройстве пространства всех локально минимальных сетей с заданными топологией и границей на случай сетей, локально минимальных (экстремальных) по отношению к функционалу манхеттенской длины.

Задача 61. Описать локальное и глобальное устройство сетей, экстремальных относительно функционала взвешенной манхеттенской длины.

Отношение Штейнера

Задача 62. Проверить, справедлива ли гипотеза Гилберта–Поллака. Можно ли устранить пробелы в конструкции Ду–Хванга?

Замечание. Было бы очень полезно разобраться, какие результаты, касающиеся отношения Штейнера, получены с использованием конструкции Ду–Хванга, а какие — нет.

Задача 63. Для каких пространств отношение Штейнера достигается на конечных граничных множествах?

Замечание. Известно лишь несколько примеров таких пространств размерности 2, скажем ℓ_1^2.

Пусть B — произвольный БМ-шар в $\mathbb{R}^n$. Напомним, что множество

$$\hat{B} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y\rangle \leqslant 1 \ \forall y \in B\right\}$$

является БМ-шаром и называется *полярой* или *двойственным БМ-шаром* для B. Например, двумерные шары B_p^2 и B_q^2 являются двойственными при $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Задача 64. Как связаны отношения Штейнера двойственных БМ-шаров? Интересно рассмотреть двумерный случай, даже случай двумерных ℓ_p-норм.

Замечание. В книге [12] высказывается гипотеза, что в двумерном случае имеет место равенство, а в случае больших размерностей — равенства нет.